

AÑO:	2025 – 2026	PERIODO:	PAO – I
MATERIA:	MATG1052 Métodos Numéricos	PROFESOR:	Edison Del Rosario
EVALUACIÓN:	2da Evaluación	FECHA:	26-Agosto-2025

**COMPROMISO DE HONOR**

Yo, ....., al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora ordinaria para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.  
 Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.  
 "Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".  
 FIRMA: ..... NÚMERO DE MATRÍCULA: ..... PARALELO: .....

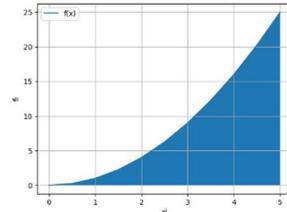
**Indicaciones generales:** Desarrolle los temas en forma ordenada, con letras y números claros, legibles a tamaño suficiente para facilitar la lectura. Todos los temas **deben ser desarrollados** para la forma analítica, con lápiz y papel, con **expresiones matemáticas completas**, donde se muestren los valores usados en las operaciones. Los cálculos numéricos pueden ser realizados usando los algoritmos, en cuyo caso adjunte en "aula virtual" los archivos correspondientes en el formato indicado en tareas: algoritmo.py, resultados.txt y gráficas.png.

**Tema 1** (35 puntos) Un centroide es un promedio ponderado, como el centro de gravedad, pero ponderado con una propiedad geométrica como el área o el volumen, y no con una propiedad física como el peso o la masa. Esto significa que los centroides son propiedades de formas puras, no de objetos físicos. Para el caso particular dado en  $f(x)$ , los resultados de los integrales permiten obtener las coordenadas del punto medio:

$$A = \int_0^5 f(x) \delta x = \int_0^5 x^2 \delta x$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A}$$

$$Q_y = \int_0^5 x \delta A = \int_0^5 x^3 \delta x \qquad Q_x = \int_0^5 y \delta A = \int_0^5 \frac{x^4}{2} \delta x$$



Donde  $Q_x$ ,  $Q_y$  corresponden al primer momento de área con respecto a cada eje. Realice el planteamiento de los integrales considerando que:

- Para el integral con  $Q_y$  use fórmulas de Simpson con al menos 3 tramos, mientras que
- Para el integral con  $Q_x$  use Cuadratura de Gauss de dos puntos.
- Desarrolle las expresiones completas del ejercicio para cada función.
- Indique el resultado obtenido para el integral requerido y la cota de error.
- Determine las coordenadas del centroide según las fórmulas presentadas.
- Adjunte algoritmo.py, resultado.txt y gráfica.png.

**Rúbrica:** literal a (5 puntos), literal b (5 puntos), literal c (10 puntos), literal d (5 puntos), literal e (5 puntos), literal f (5 puntos)

**Referencia:** [1] Engineering Statics Open and Interactive. Daniel W. Baker, William Haynes. [https://engineeringstatics.org/Chapter\\_07-centroids.html](https://engineeringstatics.org/Chapter_07-centroids.html)  
 [2] Centroide de una parábola mediante integración. Ingeniería elemental. 13 octubre 2022. <https://www.youtube.com/watch?v=8Hlw1UZYYzQ>

**Tema 2** (35 puntos) El modelo de crecimiento económico de Solow-Swan describe cómo el capital por trabajador  $k$  cambia con el tiempo  $dk/dt$ .

El cambio del capital por trabajador depende de la inversión, la depreciación  $d$  y el crecimiento de la población  $n$ .

$$\frac{\delta k}{\delta t} = s f(k) - (d + n)k$$

El primer término aumenta el capital por medio de la inversión por trabajador,  $s$  es la tasa de ahorro y  $f(k)$  es la función de producción. El siguiente término disminuye el capital por la depreciación  $d$  de equipos, junto con el capital necesario para equipar a los nuevos trabajadores  $n$ .

Una propiedad en el modelo de Solow indica que el capital por unidad de trabajo efectivo  $f(k)$  muestra rendimientos marginales decrecientes del capital.



En países desarrollados  $\alpha=0.3$ , mostrando que 30% del ingreso nacional total se atribuye al factor de producción de capital como edificios, maquinaria y equipos, mientras que el 70% restante se atribuye al factor de producción trabajo, sueldos y salarios. Considere  $s=0.15$ ,  $d=0.05$ ,  $n=0.015$ ,  $k(0)=1$

- a. Realice el planteamiento del ejercicio usando Runge-Kutta de 2do Orden
- b. Desarrolle tres iteraciones con expresiones completas para  $k(t)$  con tamaño de paso  $h=0.2$  meses
- c. Realice una observación sobre el resultado, a lo largo del tiempo para al menos 60 meses usando el algoritmo.
- d. Adjunte algoritmo.py, resultado.txt y gráfica.png.

**Rúbrica:** literal a (5 puntos), literal b (20 puntos), literal c (5 puntos), literal d (5 puntos)

**Referencia:** [1] Solow-Swan Model. Sean McClung. 8 abril 2025. <https://inomics.com/terms/solow-swan-model-1548564>

[2] Modelo de crecimiento de Solow. [https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo\\_de\\_crecimiento\\_de\\_Solow](https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_de_crecimiento_de_Solow)

[3] The Solow Model and the Steady State. Marginal Revolution University. Apr 12, 2016. <https://www.youtube.com/watch?v=LQR7rO-I96A>

[4] Human Capital & Conditional Convergence. Marginal Revolution University. Apr 26, 2016. <https://www.youtube.com/watch?v=SVWX4Xjl4Os>

[5] The Solow Model and Ideas.

**Tema 3** (30 puntos) Un cuadrado dieléctrico de 2 cm de lado donde los bordes están a tierra, 0 Voltios, y el vértice opuesto está a 80V. Calcular la distribución de potencial, suponiendo que la densidad de carga  $f(x,y)$  es nula.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Condiciones de contorno se muestran junto con la ecuación diferencial parcial

Suponiendo que se satisface la ley de Ohm, considere  $\Delta x = \Delta y = 1/4$

$$\Phi(x,0) = \Phi(0,y) = 0$$

Utilice diferencias finitas para las variables independientes  $x,y$

$$\Phi(x,2) = 40x$$

a. Plantee las ecuaciones discretas a usar un método numérico en un nodo  $i,j$

$$\Phi(2,y) = 40y$$

b. Realice la gráfica de malla, detalle los valores de  $i, j, x_i, y_j$

c. Desarrolle y obtenga el modelo discreto para  $\Phi(x_i, y_j)$

d. Determine el valor de Lambda  $\lambda$

e. Adjunte los archivos del algoritmo.py, resultados.txt, gráficas.png

**Rúbrica:** Selección de diferencias finitas divididas (5 puntos), literal b (5 puntos), literal c (10 puntos), literal d (5 puntos), literal e (5 puntos)

**Referencia:** Chapter 13: Partial Differential Equations (Part 2 - Elliptic PDEs). Lindsey Westover. 18 Marzo 2021.

<https://youtu.be/0eI5zrhtEjE?si=a8rQhpEEirvMBC26&t=633>