FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.
Horario: 11:30 – 13:30

EXAMEN SEGUNDO PARCIAL PA0 I AÑO 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ..., al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que **NO** puedo usar calculadora; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y que, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.
Horario: 11:30 – 13:30

Tema 1 (20 puntos) Una empresa de logística mide la **eficiencia operativa** en función de dos variables de decisión:

- x: número relativo de turnos adicionales (puede ser negativo si se reducen).
- y: nivel de incentivos otorgados a los empleados (escala adimensional).

La eficiencia global se modela como: $f(x,y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2)$

a) Determina los puntos críticos y clasifícalos.
b) Interprete los resultados óptimos.

Solución

1. Cálculo de los puntos críticos

$$f_x(x,y) = e^{x+y} \cdot 1 \cdot (x^2 - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (2x) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 + 2x) = 0$$

$$f_y(x,y) = e^{x+y} \cdot 1 \cdot (x^2 - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (-4y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 - 4y) = 0.$$

2. Obtenemos dos ecuaciones que se tienen que cumplir simultáneamente. El factor con la exponencial es nunca nulo así que lo podemos cancelar en ambas. Nos quedan las ecuaciones

$$x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \quad , \quad x^2 - 2y^2 - 4y = 0$$

3. Las ecuaciones son no lineales, pero son parecidas. Entonces restando la primera de la segunda nos queda $2x + 4y = 0$ esto es $x = -2y$. Luego $x^2 = 4y^2$ y reemplazando esto en la segunda ecuación queda $4y^2 - 2y^2 - 4y = 0$, es decir

$2y^2 - 4y = 0$. Se factoriza como $2y(y-2) = 0$,

4. que ser $y = 0$ o bien $y = 2$. Cuando $y = 0$, debe ser también $x = 0$.

Obtenemos $P_1 = (0,0)$. Y

5. Cuando $y = 2$ debe ser $x = -4$, obtenemos el punto $P_2 = (-4,2)$.

6. Análisis de los puntos críticos

$$f_{xx}(x,y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 + 2x + 2), f_{yy}(x,y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 - 4y - 4),$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 + 2x).$$

Tenemos

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En (0,0) tenemos un punto silla pues:

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.
Horario: 11:30 – 13:30

$$f_{xx} = e^0(2 + 0 + 0 - 0) = 2$$
$$f_{yy} = e^0(-4 - 0 + 0 - 0) = -4$$
$$f_{xy} = e^0(0 + 0 - 0) = 0$$
$$H = 2(-4) - 0 = -8 < 0$$

Por otro lado tenemos el otro punto crítico $P_2 = (-4,2)$ donde

$$Hf(P_2) = \begin{pmatrix} e^{-2} \cdot (2) & 0 \\ 0 & e^{-2} \cdot (-4) \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 2e^{-2} < 0$ y $\det\big(Hf(P_1)\big) = (e^{-2})^2(6 \cdot 12 - 8 \cdot 8) = -e^{-4} \cdot 8 < 0,$

f tiene una silla en $P_2 = (-4,2)$.

Interpretación:

- **No hay máximos ni mínimos relativos**, ya que **ambos puntos críticos son de silla**.
- Esto sugiere que la eficiencia operativa:
    - **No se maximiza ni minimiza de forma clara** al variar solo las combinaciones de turnos e incentivos.
    - Podría depender de restricciones adicionales o factores externos no modelados.

Interpretación práctica:

- En (0,0): eficiencia neutra, sin turnos ni incentivos adicionales.
- En (−4,2): reducir turnos (-4) e incentivar (2) **no garantiza mejora sostenida**.

RÚBRICA

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante es capaz de resolver problemas utilizando optimización sin restricción y optimización con restricción.	El estudiante reconoce que debe optimizar, pero no aplica el procedimiento.	El estudiante plantea el procedimiento en la región abierta y encuentra los puntos críticos.	El estudiante. plantea el procedimiento encuentra los puntos críticos y calcula el determinante hessiano, pero no concluye.	El estudiante. plantea el procedimiento encuentra los puntos críticos determinando su carácter y justifica su decisión. Da una interpretación de los resultados.
	0-1	2-10	11-15	16-20

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.
Horario: 11:30 – 13:30

Tema 2 (20 puntos)

Dada la función $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^2}$

1. Hallar $P_2(xy)$, el polinomio de Taylor de segundo grado de f en $\mathbf{x}_0=(2,1)$.
2. Utilice $P_2(x,y)$ para aproximar $\sqrt{(2.02)^3+(0.97)^2}$

Solución:

1. Tenemos que:

$f(2,1)=\sqrt{2^3+1^2}=3$

$D_1f(x,y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2}}$, $\quad D_1f(2,1)=2$

$D_2f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^3+y^2}}$, $\quad D_2f(2,1)=\frac{1}{3}$

$D_{11}f(x,y)=\frac{3x^4+12xy^2}{4(x^3+y^2)^{3/2}}$, $\quad D_{11}f(2,1)=\frac{2}{3}$

$D_{12}f(x,y)=\frac{-3x^2y}{2(x^3+y^2)^{3/2}}$, $\quad D_{12}f(2,1)=-\frac{2}{9}$

$D_{22}f(x,y)=\frac{x^3}{(x^3+y^2)^{3/2}}$, $\quad D_{22}f(2,1)=\frac{8}{27}$

$$P_2(x,y)=f(2,1)+[(x-2)D_1f(2,1)+(y-1)D_2f(2,1)]$$
$$+\frac{1}{2}[(x-2)^2D_{11}f(2,1)+2(x-2)(y-1)D_{12}f(2,1)+(y-1)^2D_{22}f(2,1)]$$

$$=3+\left[2(x-2)+\frac{1}{3}(y-1)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x-2)^2+2\left(-\frac{2}{9}\right)(x-2)(y-1)+\frac{8}{27}(y-1)^2\right]$$, es decir

$$P_2(x,y)=3+2(x-2)+\frac{1}{3}(y-1)+\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{2}{9}(x-2)(y-1)+\frac{8}{27}(y-1)^2$$

2. Para $(x,y)=(2.02,0.97)$ y $\mathbf{x}_0=(2,1)$, tenemos $x-2=0.02, y-1=-0.03y=3.0304$

$$\sqrt{(2.02)^3+(0.97)^2}\approx P_2(2.02,0.97)=3.030$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe obtener el polinomio de Taylor de orden 2.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante plantea la fórmula de Taylor de primer y determina los incrementos.	El estudiante plantea la fórmula de Taylor de primer orden y las derivadas con respecto a las variables x e y correspondientes.	El estudiante evalúa en el punto indicado A todas las derivadas parciales y plantea la ecuación del polinomio de Taylor de segundo orden.	El estudiante obtiene la aproximación pedida reemplazando los incrementos y llegando al resultado exacto o deja expresado en fracciones.
	0-5	6-8	9-15	15-20

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.
Horario: 11:30 – 13:30

Tema 3 (20 puntos)

Evaluar la integral $\iint_D (x^2+y^2)^3 dA$ donde D es la región del primer cuadrante encerrada por las hipérbolas: $xy = 2, xy = 3, x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4$

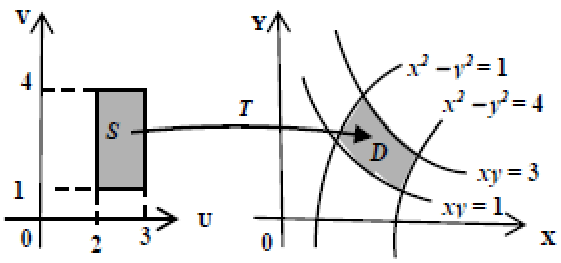
Solución:

Hacemos el siguiente cambio de variables:

$$u = xy, v = x^2 - y^2$$

Hallemos la región S del plano UV que corresponde a la región D del plano XY

$$xy = 2 \Rightarrow u = 2, xy = 3 \Rightarrow u = 3,$$
$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow v = 1, x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow v = 4$$



De acuerdo a las ecuaciones tenemos:

$$4u^2 + v^2 = 4x^2y^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{4u^2 + v^2}$$

Además:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2) = -2\sqrt{4u^2 + v^2}$$

Luego:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{-2\sqrt{4u^2 + v^2}}$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)^3 dA &= \iint_S \left(\sqrt{4u^2+v^2}\right)^3 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\
&= \iint_S (4u^2+v^2)^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}} dudv \\
&= \frac{1}{2}\iint_S (4u^2+v^2) dudv = \frac{1}{2}\int_2^3 \int_1^4 (4u^2+v^2) dvdu \\
&= \frac{1}{2}\int_2^3 \left[4u^2v+\frac{1}{3}v^3\right]_1^4 du = \frac{1}{2}\int_2^3 (12u^2+21) du = \frac{97}{2}
\end{aligned}
$$

RÚBRICA

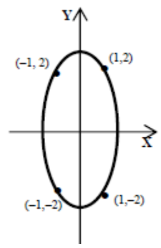
Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante es capaz de aplicar integrales dobles al cálculo de áreas de una región utilizando cambios de variable.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante trata de dibujar la región, pero comete errores	El estudiante hace un gráfico de la región general y grafica el dominio de integración y aplica correctamente un cambio de variable y encuentra la nueva región de integración.	El estudiante encuentra la nueva región de integración y reemplaza correctamente en la integral.	El estudiante calcula la integral correctamente llegando al valor requerido.
	0-2pts.	3-8 pts.	9-15 pts.	15-20 pts.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.
Horario: 11:30 – 13:30

Tema 4 (20 puntos)

Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 6xy$ sobre la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$

Solución : Aqui, la curva de restricción es la elipse



$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Entonces buscamos para la función $f(x,y) = 6xy$ los extremos sobre esta curva.

$$(1)\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = \lambda x & (2) \\ 6x = \lambda \dfrac{y}{4} & (3) \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1 & (4) \end{cases}$$

Despejando λ en (2): $\lambda = \frac{6y}{x}$ y reemplazando en (3): el valor de cero no aplica

$$6x = \frac{6y}{x}\frac{y}{4} \Rightarrow y^2 = 4x^2$$

Reemplazando este valor en (4): $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{4x^2}{8} = 1 \Rightarrow$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

Tenemos cuatro puntos críticos:

$$(-1,-2), (-1,2), (1,-2) \text{ y } (1,2)$$

Comprobación

(x, y)	$(-1,-2)$	$(-1, 2)$	$(1, -2)$	$(1, 2)$
$f(x, y)$	12	−12	−12	12

El máximo es 12 y es alcanzado en los puntos $(-1,-2)$ y $(1,2)$.

El mínimo es -12 y es alcanzado en los puntos $(-1,2)$ y $(1,-2)$.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.
Horario: 11:30 – 13:30

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe saber plantear y resolver problemas de optimización de funciones escalares sujeta a restricciones.	No sabe cómo plantear el problema.	Identifica la función objetivo y las restricciones. O Plantea la función Lagrangeana.	Optimiza la función Lagrangiana, resuelve el sistema de ecuaciones, pero comete errores.	El estudiante justifica adecuadamente que en dicho punto se alcanza el óptimo solicitado comparando con otro valor de la restricción.
	0	1-6	7 - 14	15-20

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.
Horario: 11:30 – 13:30

Tema 5 (20 puntos)

Suponiendo las hipótesis del Teorema de Green, evalúa la integral de línea

$$\oint_C (3x - y)dx + (2y + x^2)dy,$$

donde C es el contorno del rectángulo con vértices en $(0,0), (4,0), (4,2), y\ (0,2)$.

Solución

Las funciones componentes

$M(x,y) = 3x - y$
$N(x,y) = 2y + x^2$

implica que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x - y) = -1$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y + x^2) = 2x$$

Según el Teorema de Green:

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Sustituyendo las derivadas parciales:

$$\oint_C (3x - ydx + (2y + x^2)dy) = \iint_R\ (2x - (-1))dA = \iint_R\ (2x + 1)dA$$

La región R es el rectángulo con x desde 0 hasta 4 y y desde 0 hasta 2.

$\iint_R\ (2x + 1)dA = \int_0^4\ \int_0^2\ (2x + 1)dydx = \int_0^4\ (2x + 1) \cdot y|_0^2 dx$ =

= $\int_0^4\ 2(2x + 1)dx = 2[x^2 + x]_0^4 = 2(16 + 4) = 2 \cdot 20 = 40.$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante aplica el teorema de Green a campos bidimensionales.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante menciona, pero no escribe ni esboza el teorema de Green.	El estudiante plantea al usar Green calcula las derivadas correspondientes.	El estudiante aplica el Teorema correctamente pero no calcula la integral doble correctamente.	El estudiante resuelve la integral doble correctamente, una vez que ha aplicado y verificado correctamente la hipótesis del Teorema de Green y su formulación.
	0-1	2-4	5-13	14-20