

Año:	2025	Periodo:	I PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Luis Fernando Mejías
Evaluación:	Primera	Fecha:	30 de junio de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, _____, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

“Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar”.

Firma: _____ Número de matrícula: _____ Paralelo: _____

1. Considere el espacio de funciones $C^1(\mathbb{R})$. ¿Es el conjunto de soluciones de la ecuación

$$y' + y^2 = 0,$$

un subespacio vectorial de $C^1(\mathbb{R})$? Explique.

Solución: No. Hay varias formas de justificar esto. Por ejemplo, si y es una solución no trivial, entonces $z = 2y$, no es una solución. En efecto,

$$z' + z^2 = (2y)' + (2y)^2 = 2y' + 4y^2 = 2y^2.$$

Otra manera de ver esto, es resolver explícitamente la ecuación. De hecho, la solución general de esta ecuación separable es

$$y = \frac{1}{c + t},$$

por lo que $ay = \frac{a}{x+c}$ no es solución, a menos que $a = 0$. Más aún, las soluciones generales no están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que ni siquiera pueden considerarse como elementos de $C^1(\mathbb{R})$.

Rúbrica:

Demuestra que el conjunto de soluciones de la ecuación no es un subespacio vectorial de $C^1(\mathbb{R})$	1-10 puntos
---	-------------

2. Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2, x_3 = 0 \text{ y } x_5 = -2x_2\}$.
- (a) Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.
- (b) Halle la dimensión de S y una base $\mathcal{B}$ para S .
- (c) Demuestre que $(-6, -2, 0, -2, 4) \in S$ y escríbalo como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{B}$.

Solución:

- (a) Notemos que cada elemento de S es de la forma $(3x_2, x_2, 0, x_4, -2x_2)$. En particular, $(0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$. Si $v = (3x_2, x_2, 0, x_4, -2x_2)$, $w = (3y_2, y_2, 0, y_4, -2y_2) \in S$, entonces

$$\begin{aligned} v + w &= (3x_2 - x_4, x_2, 0, x_4, -2x_2) + (y_2 - y_4, y_2, 0, y_4, -2y_2) \\ &= (3x_2 + 3y_2, x_2 + y_2, 0, x_4 + y_4, -2x_2 - 2y_2) \\ &= (3(x_2 + y_2), x_2 + y_2, 0, x_4 + y_4, -2(x_2 + y_2)). \end{aligned}$$

De modo que $v + w \in S$.

Si $v = (3x_2, x_2, 0, x_4, -2x_2) \in S$ y $c \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} cv &= c(3x_2, x_2, 0, x_4, -2x_2) \\ &= (c3x_2, cx_2, 0, cx_4, -c2x_2) \\ &= (3(cx_2), cx_2, 0, cx_4, -2(cx_2)). \end{aligned}$$

Así, $cv \in S$. Por tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.

- (b) Para hallar una base de S , consideremos, por ejemplo, $\mathcal{B} = \{(0, 0, 0, 1, 0), (3, 1, 0, 0, -2)\}$. Probaremos que $\mathcal{B}$ es una base para S . De hecho, dado $v = (3x_2, x_2, 0, x_4, -2x_2)$, tenemos

$$v = (3x_2, x_2, 0, x_4, -2x_2) = x_4(0, 0, 0, 1, 0) + x_2(3, 1, 0, 0, -2).$$

Esto es, $v \in \text{gen } \mathcal{B}$.

Ahora, como $(0, 0, 0, 1, 0)$ no es múltiplo de $(3, 1, 0, 0, -2)$, concluimos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base de S y $\dim S = 2$.

- (c) Se tiene que $(-6, -2, 0, -2, 4) \in S$ porque $4 = -2(-2)$ y $-6 = 3(-2)$. De la parte (b) concluimos que

$$(-6, -2, 0, -2, 4) = -2(0, 0, 0, 1, 0) - 2(3, 1, 0, 0, -2).$$

Rúbrica:

Demuestra que S es subespacio de $\mathbb{R}^5$	1-4 puntos
Halla una base $\mathcal{B}$ para S	1-4 puntos
Escribe $(-6, -2, 0, -2, 4)$ como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$	1-2 puntos

3. La ecuación diferencial

$$y' = y(1 - y) - 1/4$$

es un modelo simplificado de población llamado *modelo logístico con cosecha*. Aquí, $y(t)$ representa el porcentaje de la capacidad de carga de una población que crece de acuerdo al modelo logístico, pero que a su vez está siendo cosechada a una tasa constante de $1/4$ de la población.

- Halle la o las soluciones de equilibrio.
- Halle la solución general de la ecuación.
- Suponga que inicialmente se tiene una población de $1/4$ de la capacidad de carga. Calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. ¿Qué puede concluir de este resultado?

Solución:

- Primero notamos que

$$y(1 - y) - 1/4 = 0 \iff y - y^2 - 1/4 = 0 \iff y = 1/2.$$

Por tanto, tenemos una única solución de equilibrio $y(t) \equiv 1/2$.

- Reescribiendo la ecuación en la forma

$$y' = -1/4 + y - y^2$$

nos damos cuenta que estamos frente una ecuación de Riccati. Sea $u = y - 1/2$. Entonces,

$$u' = y' = y(1 - y) - 1/4 = (u + 1/2)(1 - u - 1/2) - 1/4 = -u^2$$

Separando variables, nos queda

$$u(t) = \frac{1}{c + t},$$

y así

$$y(t) = u(t) + 1/2 = \frac{1}{c + t} + 1/2.$$

- Si $1/4 = y(0)$, entonces

$$1/4 = 1/c + 1/2 \implies c = -4.$$

Luego, $y(t) = \frac{1}{-4+t} + 1/2$. Note que $y(t)$ no está definida en $t = 4$, por lo que solo podemos considerar $y(t)$ como solución en el intervalo $[0, 4)$. Por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ no existe. Sin embargo, $\lim_{t \rightarrow 4^-} y(t) = -\infty$, indicando que con esa condición inicial la población se extingue en algún tiempo t_0 . De hecho, si $t_0 = 2$, entonces $y(t_0) = 0$, indicando la extinción de la población en apenas dos unidades de tiempo.

Rúbrica:

Halla la solución de equilibrio $y(t) \equiv 1/2$	1-2 puntos
Identifica que es una ecuación de Riccati y halla su solución general	1-5 puntos
Halla solución particular e interpreta el resultado	1-3 puntos

4. Sea W el subespacio del conjunto de matrices 3×3 formado por las matrices que conmutan con la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Halle una base para W y en consecuencia su dimensión.

Solución: Una matriz $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ está en W si, y solamente si,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

lo cual a su vez es cierto si, y solamente si,

$$\begin{bmatrix} a+b & b+c & c \\ d+e & e+f & f \\ g+h & h+i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \end{bmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} b & c & 0 \\ e-a & f-b & -c \\ h-d & i-e & -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Comparando las entradas de estas dos matrices, concluimos fácilmente que $b = c = f = 0$, $a = e = i$ y $d = h$. Por tanto, una matriz arbitraria en W tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De aquí se deduce fácilmente que $\dim S = 3$ y que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base.

Rúbrica:

Halla las condiciones sobre las entradas de las matrices para estar en W	1-5 puntos
Usatales condiciones para hallar una base y la dimensión	1-5 puntos

5. Considere la ecuación diferencial lineal de tercer orden

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Como en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden, se puede demostrar que el conjunto S de soluciones de esta ecuación es un subespacio vectorial de dimensión 3 del espacio de funciones $C^3(\mathbb{R})$. Suponiendo esto cierto, demuestre que el conjunto de funciones $\{e^t, \cos t, \sin t\}$ es una base de S .

Solución: El wronskiano de las funciones $e^t, \cos t, \sin t$ es

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & \cos t & \sin t \\ e^t & -\sin t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

Luego,

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2 \neq 0.$$

Por el criterio del wronskiano, se tiene que el conjunto de funciones $\{e^t, \cos t, \sin t\}$ es linealmente independiente. Como $\dim S = 3$, basta verificar que las funciones e^t , $\cos t$ y $\sin t$ son soluciones de la ecuación diferencial dada para concluir que dichas funciones constituyen una base. De hecho,

$$\frac{d^3}{dt^3} e^t - \frac{d^2}{dt^2} e^t + \frac{d}{dt} e^t - e^t = e^t - e^t + e^t - e^t = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d^3}{dt^3} \cos t - \frac{d^2}{dt^2} \cos t + \frac{d}{dt} \cos t - \cos t = \sin t + \cos t - \sin t - \cos t = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y

$$\frac{d^3}{dt^3} \sin t - \frac{d^2}{dt^2} \sin t + \frac{d}{dt} \sin t - \sin t = -\cos t + \sin t + \cos t - \sin t = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Rúbrica:

Demuestra que las funciones son l.i. W	1-5 puntos
Demuestra que las funciones generan el espacio de soluciones	1-5 puntos