



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Esquema mimético para la aproximación de las soluciones de un modelo
de flujo no viscoso

PROYECTO INTEGRADOR

Previo a la obtención del Título de:

Matemático

Presentado por:

Esteban Adrián Pulley Pulley

Armando Andrés Correa Portilla

GUAYAQUIL - ECUADOR

Año: 2023

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi familia y profesores.

Esteban Pulley P.

DEDICATORIA

Este trabajo está dirigido a todos aquellos que perseveran y alcanzan el éxito a través de la dedicación. Que estas páginas inspiren a futuros académicos a recordar que nada es imposible.

Armando Correa P.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a los doctores Dany De Cecchis, Wilfredo Angulo y Guillermo Miranda por todo su tiempo, apoyo y sobre todo paciencia en el desarrollo de este trabajo. Sus comentarios y sugerencias han sido fundamentales para dar forma a esta investigación. De igual manera, quiero agradecer a mi madre, abuelita y familia porque ellos son la razón de todos mis logros.

Esteban Pulley P.

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a mis tutores, Dany De Cecchis y Wilfredo Angulo, por su paciencia y orientación; a Guillermo Miranda por compartir su valioso conocimiento con simplicidad. También, mi profundo agradecimiento a mi familia por enseñarme a nunca rendirme.

Armando Correa P.

DECLARACIÓN EXPRESA

“Los derechos de titularidad y explotación, nos corresponde conforme al reglamento de propiedad intelectual de la institución; *Esteban Adrián Pulley Pulley, Armando Andrés Correa Portilla*, damos nuestro consentimiento para que la ESPOI realice la comunicación pública de la obra por cualquier medio con el fin de promover la consulta, difusión y uso público de la producción intelectual”



Esteban Pulley P.



Armando Correa P.

EVALUADORES

Ph.D. Luz Elimar Marchan Mendoza

PROFESOR DE LA MATERIA

Ph.D. Dany De Cecchis De León

DIRECTOR



Ph.D. Wilfredo Angulo Sánchez

COTUTOR

RESUMEN

Un flujo no viscoso se puede encontrar en varios procesos industriales que involucran el movimiento de gases y materiales por ductos o tuberías. El estudio de estos flujos permite configurar experimentos de manera controlada e incluso mejorar la producción de una industria a través de la simulación computacional. La ecuación de Burgers es un modelo empleado con frecuencia para describir estos flujos. Esta ecuación diferencial parcial hiperbólica no lineal presenta soluciones discontinuas que describen ondas de choques típicas en fenómenos de transporte. Por tal razón, se diseñó un esquema WENO mimético que aproxima de forma numérica las soluciones de la ecuación de Burgers aplicado a un modelo de flujo no viscoso, capturando las ondas de choque y evitando oscilaciones espurias por medio de la implementación de operadores discretos miméticos, los cuales preservan propiedades continuas y físicas de los fenómenos.

Palabras Clave: esquema mimético, fluidos no viscosos, esquema Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO), ecuación de Burgers.

ABSTRACT

A non-viscous flow can be found in many industrial processes that involve the movement of gases and materials through pipes or ducts. The study of these flows allows the setup of controlled experiments and even improve industrial production through computational simulation. The Burger's equation is an applied model that describes these flows. This equation, it is a nonlinear hyperbolic partial differential equation (PDE) that have discontinuous solutions for describing typical shock waves in transport phenomena. Therefore, a mimetic WENO scheme was designed to numerically approximate the solutions of the Burger's equation applied to a non-viscous flow model, capturing shockwaves and avoiding spurious oscillations through the implementation of discrete mimetic operators that preserve continuous and physical properties of the phenomena.

Keywords: *mimetic scheme, non-viscous flow, Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) scheme, Burger's equation.*

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	I
ABSTRACT	II
ABREVIATURAS	V
CAPÍTULO 1	1
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Descripción del problema	1
1.2 Justificación del problema	2
1.3 Objetivos	3
1.3.1 Objetivo General	3
1.3.2 Objetivos Específicos	3
1.4 Marco teórico	3
1.4.1 Ecuación de Burgers	4
1.4.2 WENO	5
1.4.3 Métodos Miméticos	9
CAPÍTULO 2	13
2. METODOLOGÍA	13
CAPÍTULO 3	18
3. RESULTADOS Y ANÁLISIS	18
3.1 Benchmark	18
3.1.1 Experimentos numéricos	19
3.2 Caso de estudio real	23
3.2.1 Escenario de experimentación numérica	27
3.2.2 Modelo en forma compacta	28
CAPÍTULO 4	30
4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	30
4.1 Conclusiones	30
4.2 Recomendaciones	31

BIBLIOGRAFÍA
APÉNDICES

ABREVIATURAS

EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
EDP	Ecuación Diferencial Parcial
EDP's	Ecuaciones Diferenciales Parciales
ENO	Essentially Non-Oscillatory
ESPOL	Escuela Superior Politécnica del Litoral
MM	Método Mimético
MM-W5	Método Mimético-WENO de orden 5
WENO	Weighted Essentially Non-Oscillatory

CAPÍTULO 1

1. INTRODUCCIÓN

En el presente proyecto se elabora un esquema mimético para aproximar de forma numérica las soluciones de la ecuación de Burgers que modela un flujo no viscoso. Esta es una ecuación no lineal en derivadas parciales que modela fenómenos de propagación de ondas y shocks en fluidos. El modelo de flujo no viscoso, usando en la ecuación de Burgers, posibilita el estudio y análisis del fenómeno del golpe de ariete que se genera en los sistemas de tuberías. El modelado del fenómeno permite comprender los efectos de la no linealidad de los fluidos. El golpe de ariete es una de las principales causas de daños en tuberías e instalaciones hidráulicas, y este se produce por cambios drásticos en la velocidad de los fluidos, generando ondas de presión que ocasionan daños estructurales. Por tanto, su estudio es relevante en el diseño y operación de sistemas de tuberías en las industrias.

El esquema mimético propuesto proporciona una aproximación de alto orden, al discretizar los operadores de forma tal que se conserven las propiedades del medio continuo y las soluciones físicamente correctas.

1.1 Descripción del problema

Un flujo no viscoso se puede encontrar en diversos procesos industriales que involucran el movimiento de gases y fluidos por conductos o tuberías. En el diseño de sistemas de tuberías es importante identificar los puntos débiles que pueden generar daños estructurales a partir de la onda de presión generada por los golpes de ariete. Una de las ecuaciones más empleadas para describir este tipo de modelos es la ecuación de Burgers para el caso no viscoso, la cual es no lineal y se caracteriza por tener soluciones discontinuas, denominadas ondas de choque. Los golpes de ariete se producen por cambios repentinos en la velocidad del fluido, lo cual ocasiona que las soluciones del modelo presenten gran dispersión o incluso discontinuidades. La

ecuación de Burgers no viscosa permite modelar dicho fenómeno de forma simplificada cuando se desprecia la viscosidad del fluido.

La ecuación de Burgers puede ser resuelta por el método de las características para un periodo de tiempo corto. No obstante, las características se cruzan en un tiempo finito, produciendo una onda de choque. Después de esto, la ecuación no tiene solución en el sentido clásico. Por lo anterior, las soluciones de la ecuación de Burgers deben ser aproximadas por métodos numéricos capaces de capturar ondas de choque sin oscilaciones espurias. Los mejores resultados para problemas con discontinuidades o procesos físicos complejos se obtienen cuando el modelo discreto conserva las propiedades matemáticas intrínsecas de un sistema físico. Los métodos miméticos precisamente logran esto, al producir aproximaciones discretas que preservan propiedades físicas esenciales durante la simulación numérica.

En este trabajo, se propone un método numérico basado en un esquema mimético para aproximar las soluciones de la ecuación de Burgers aplicada a un flujo no viscoso, que capturen de forma óptima las ondas de choques.

1.2 Justificación del problema

La simulación de dinámica de fluidos ha sido un campo de investigación crucial durante muchas décadas, principalmente para la transferencia de calor y mecánica de fluidos de los diversos procesos industriales de las empresas. Entre estos procesos industriales podemos mencionar a los modelos hidrológicos, identificación de fuentes de calor, optimización de flujo de calor, minimización de la barrera del sonido generado por aeronaves supersónicas y transporte.

Muchos de los procesos experimentales requieren de condiciones de operación extremas que pueden resultar peligrosas, costosas y de larga duración, por esta razón obtener un modelo computacional riguroso del proceso resulta imprescindible. Para ello, es necesario que el método numérico utilizado para aproximar las soluciones sea lo suficientemente preciso. La ecuación de Burgers, empleada para modelar fluidos no viscosos, presenta soluciones discontinuas, en donde los métodos convencionales de discretización generan oscilaciones en las cercanías de las discontinuidades. Por lo

tanto, resulta imprescindible desarrollar un método numérico que capte las ondas de choque, utilizando un enfoque mimético, el cual mantenga propiedades importantes, como las leyes de conservación y principios máximos. Sumado a esto, el desarrollo de un método numérico requiere tomar en consideración aspectos que permitan asegurar convergencia, precisión y consistencia del mismo.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar un esquema mimético para la aproximación de las soluciones discontinuas de un modelo de fluido no viscoso en un proceso industrial

1.3.2 Objetivos Específicos

- Establecer una discretización algebraica compatible de operadores diferenciales para la mimetización del modelo continuo de fluido no viscoso
- Adaptar el esquema ponderado esencialmente no oscilatorio (WENO) al modelo discreto de fluido no viscoso para la captura de soluciones discontinuas del modelo continuo
- Analizar las propiedades de convergencia y estabilidad del esquema mimético mediante la simulación de un flujo viscoso en un proceso industrial

1.4 Marco teórico

El transporte de gases y líquidos a largas distancias, por medio de redes de tuberías, puede experimentar dinámicas transitorias que afectan negativamente el rendimiento del proceso donde interviene dicho transporte. Una dinámica transitoria frecuente es el golpe de ariete, conocido también como ariete hidráulico. El golpe de ariete se caracteriza por perturbaciones en la presión y velocidad que se desplazan a altas velocidades, aproximándose a la velocidad del sonido en el líquido. [1] Estas variaciones repentinas en la velocidad del flujo pueden ser causados por diversas situaciones como el cierre rápido de válvulas, la detención abrupta de bombas o cualquier acción que modifique la velocidad del fluido de manera brusca. El efecto del

ariete hidráulico podría ser perjudicial para el sistema de conductos, provocando desgaste del equipo debido a las abruptas oscilaciones de presión que pueden acelerar el deterioro y disminuir la vida útil de los dispositivos del sistema, llegando incluso a provocar la ruptura de la tubería o componentes del sistema. [2] Algunos sistemas en donde se puede generar el golpe de ariete por transporte de fluidos a largas distancias, por medios de redes de tuberías, son: oleoductos; tuberías de compresores de aire; propulsión de naves espaciales; sistemas de intercambio de calor en reactores (químicos y nucleares) e incluso en el flujo cardiovascular dentro de vasos sanguíneos. Por lo anterior, es importante implementar medidas apropiadas que permitan mitigar efectivamente el golpe de ariete en sistemas de tuberías.

1.4.1 Ecuación de Burgers

La ecuación de Burgers no viscosa es una ecuación no lineal en derivadas parciales, la cual es empleada para describir fenómenos de propagación de ondas de choque en medios continuos. A pesar de que no es una ecuación específica para representar el golpe de ariete, se puede emplear para modelar aspectos y características generales del fenómeno de manera simplificada. Consideramos la ecuación de Burgers en una dimensión para modelar el comportamiento del fluido no viscoso en un sistema unidimensional. Sea la ecuación no lineal

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u(x, t))] = 0 \quad (1.1)$$

donde $f(u(x, t))$ es una función no lineal de $u(x, t)$ en el dominio $(x, t) \in [0, L] \times (0, T]$, en el cual x representa el espacio, t denota el tiempo, $u(x, t)$ es la cantidad conservada y $f(u(x, t))$ su flujo. Además, consideramos $f''(u(x, t)) > 0$ para todo $u(x, t)$, es decir es una función convexa. Esto permite tratar con una no linealidad auténtica en sistemas de ecuaciones, como las ecuaciones de Euler. [3]

Cuando $f(u(x, t)) = \frac{u^2(x, t)}{2}$ se puede expresar 1.1 de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u^2(x, t)}{2} \right] = 0 \quad (1.2)$$

Para un tiempo corto, la solución de la ecuación puede ser construida por medio del método de las características. Sin embargo, para un tiempo t finito, la ecuación podría no tener solución única. Esto sucede debido a que eventualmente las características se cruzan si $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x}$ es negativa en algún punto. En el tiempo donde las características se cruzan por primera vez la función $u(x, t)$ tiene una pendiente infinita, por lo que se produce una onda de choque. A partir de este punto no existe solución clásica para la EDP; por lo que, la solución se convierte discontinua. [3]

Por ello, se requiere del diseño de un método numérico para la determinación de las soluciones discontinuas de la ecuación de Burgers no viscosa. Para esos propósitos, se consideraron dos esquemas ampliamente utilizados para la solución de ecuaciones en derivadas parciales. El primero fue el esquema WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) de quinto orden y el segundo los Métodos Miméticos.

1.4.2 WENO

El esquema WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) fue desarrollado usando una combinación convexa de todos los stencil candidatos en lugar de uno como en el esquema ENO (Essentially Non-Oscillatory) que permiten aproximar el flujo numérico. La combinación se realiza por medio de pesos no lineales que se expresan en función de indicadores de suavidad de la función, dándole un menor peso al stencil donde la función posee alguna discontinuidad. De esta forma, se evitan las oscilaciones en las regiones cercanas a las discontinuidades. [4]

A continuación, se observa una de las formulaciones alternativas del método WENO de diferencias finitas conservativas de alto orden, para resolver leyes de conservación hiperbólicas no lineales

$$\begin{cases} u_t + \nabla \cdot f(u) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

En una malla uniforme $x_i = i\Delta x$, donde un esquema de diferencias finitas conservativas tiene la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}u_i + \frac{1}{\Delta x} \left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0 \quad (1.4)$$

donde u_i es una aproximación al punto $u(x_i, t)$ y el flujo numérico

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{f}(u_{i-r}, \dots, u_{i+s})$$

es construido, de donde

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) = f(u(x))_x|_{x_i} + O(\Delta x^k) \quad (1.5)$$

para un esquema de orden k . Varios de los esquemas de diferencias finitas de alto orden, incluido el esquema WENO usan el siguiente lema [5]

Lema 1 (Shu y Osher). *Si una función $h(x)$ satisface la siguiente relación*

$$f(u(x)) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} h(\xi) d\xi \quad (1.6)$$

entonces

$$\frac{1}{\Delta x} \left(h\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - h\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right) = f(u(x))_x. \quad (1.7)$$

La prueba de este lema es una aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo.

Por el Lema 1, podemos tomar el flujo numérico como

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = h(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k). \quad (1.8)$$

Por la definición de $h(x)$ en la ecuación (1.6) tenemos que

$$\bar{h}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} h(\xi) d\xi = f(u_i)$$

el cual se conoce cuando se obtengan los puntos u_i . Por lo que, la tarea ahora es determinar los promedios de celda $\{\bar{h}_i\}$ de la función $h(x)$, y reconstruir sus puntos en la frontera de la celda $h(x_{i+\frac{1}{2}})$ para ser empleados como flujo numérico $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$. [5]

Luego, una vez determinados los promedios de celda $\{\bar{h}_i\}$ de la función $h(x)$, obtenemos aproximaciones de orden $(2k - 1)$ de la función $h(x)$ en la frontera de la celda, denotados por $h_{i-\frac{1}{2}}^+$ y $h_{i+\frac{1}{2}}^-$ de la siguiente manera [4]. Obtenemos los k valores reconstruidos $h_{i+\frac{1}{2}}^r$, de orden de precisión k donde

$$h_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \bar{h}_{i-r+j}, \quad r = 0, \dots, k-1, \quad (1.9)$$

basados en los k stencils

$$S_r(i) = \{x_{i-r}, \dots, x_{i-r+k-1}\}, \quad r = 0, \dots, k-1. \quad (1.10)$$

De la misma manera, obtenemos los k valores reconstruidos $h_{i-\frac{1}{2}}^r$ de orden de precisión k , usando

$$h_{i+\frac{1}{2}}^- = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \bar{h}_{i-r+j} \quad ; \quad h_{i-\frac{1}{2}}^+ = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{c}_{rj} \bar{h}_{i-r+j}$$

basados nuevamente en los stencils (1.10).

El siguiente paso es encontrar las constantes d_r y \tilde{d}_r , de tal manera que se satisfaga

$$h_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r h_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = h(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1}),$$

$$h_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \tilde{d}_r h_{i-\frac{1}{2}}^{(r)} = h(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1})$$

Donde, por simetría

$$\tilde{d}_r = d_{k-1-r}.$$

Seguidamente, se encuentran los indicadores suaves β_r , mostrados en [4], para todo $r = 0, \dots, k-1$. Posteriormente, formulamos los pesos w_r y \tilde{w}_r empleando

$$w_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s} \quad ; \quad \tilde{w}_r = \frac{\tilde{\alpha}_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_s}$$

donde

$$\alpha_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2} \quad ; \quad \tilde{\alpha}_r = \frac{\tilde{d}_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}$$

para $r = 0, \dots, k-1$. De donde podemos obtener el $(2k-1)$ orden de reconstrucción, estos son

$$h_{i+\frac{1}{2}}^- = \sum_{r=0}^{k-1} w_r h_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}, \quad h_{i-\frac{1}{2}}^+ = \sum_{r=0}^{k-1} \tilde{w}_r h_{i-\frac{1}{2}}^{(r)}.$$

Para el caso simple de (1.3), en donde $\nabla \cdot f(u) \geq 0$, el esquema de diferencias finitas WENO de quinto orden [6] tiene el flujo dado por

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = w_1 \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} + w_2 \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} + w_3 \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(3)}, \quad (1.11)$$

donde $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(i)}$ son los tres flujos de tercer orden en los tres stencils determinados por

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} &= \frac{1}{3}f(u_{i-2}) - \frac{7}{6}f(u_{i-1}) + \frac{11}{6}f(u_i), \\ \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} &= -\frac{1}{6}f(u_{i-1}) + \frac{5}{6}f(u_i) + \frac{1}{3}f(u_{i+1}), \\ \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(3)} &= \frac{1}{3}f(u_i) + \frac{5}{6}f(u_{i+1}) - \frac{1}{6}f(u_{i+2}), \end{aligned}$$

y los pesos no lineales w_r son

$$w_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=1}^3 \alpha_s}, \quad \alpha_s = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}, \quad (1.12)$$

junto con los pesos lineales d_r , los cuales son

$$d_1 = \frac{1}{10}, \quad d_2 = \frac{3}{5}, \quad d_3 = \frac{3}{10}.$$

Además, los indicadores suaves β_r son determinados por

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{13}{12} (f(u_{i-2}) - 2f(u_{i-1}) + f(u_i))^2 + \frac{1}{4} (f(u_{i-2}) - 4f(u_{i-1}) + 3f(u_i))^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (f(u_{i-1}) - 2f(u_i) + f(u_{i+1}))^2 + \frac{1}{4} (f(u_{i-1}) - f(u_{i+1}))^2, \\ \beta_3 &= \frac{13}{12} (f(u_i) - 2f(u_{i+1}) + f(u_{i+2}))^2 + \frac{1}{4} (3f(u_i) - 4f(u_{i+1}) + f(u_{i+2}))^2. \end{aligned}$$

El parámetro ϵ se establece para evitar que el denominador en (1.12) sea 0 y usualmente tiene el valor de $\epsilon = 10^{-6}$. [6]

De esta manera, se concluye la descripción del esquema WENO de quinto orden para su caso simple.

1.4.3 Métodos Miméticos

El diseño de métodos numéricos para la resolución de problemas matemáticos no lineales, cuyas soluciones tengan discontinuidades o incluso procesos físicos complejos, requieren que el modelo discreto preserve las propiedades matemáticas intrínsecas del sistema físico. Esta es la característica principal del método mimético de diferencias finitas, el cual permite crear aproximaciones discretas que preservan propiedades fundamentales de ecuaciones continuas en mallas poligonales y poliédricas. [7]

En contraste con el método de diferencias finitas estándar, este método numérico discretiza los operadores básicos (gradiente, divergencia, rotacional) que componen el problema de valor de frontera, en lugar de las ecuaciones diferenciales parciales. De manera que se preserve la simetría y se satisface la versión discreta del Teorema de Green-Stokes-Gauss, el cual asegura la compatibilidad entre la ecuación diferencial parcial y las condiciones de frontera. [8]

Caso Unidimensional

Consideremos como dominio el intervalo $[0, 1]$, además de una malla uniforme, donde se dividirá el intervalo en n bloques cada uno de longitud $h = \frac{1}{n}$. Los lados de los bloques de la malla están determinados por $x_i = ih$, donde $i = 0, 1, \dots, n$, y los centros de los bloques por $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(x_i + x_{i+1})}{2}$, donde $i = 1, 2, \dots, n-1$. En la figura 1.1 podemos observar lo mencionado donde se evalúa la función y los operadores gradiente (G) y divergencia (D).

[8]

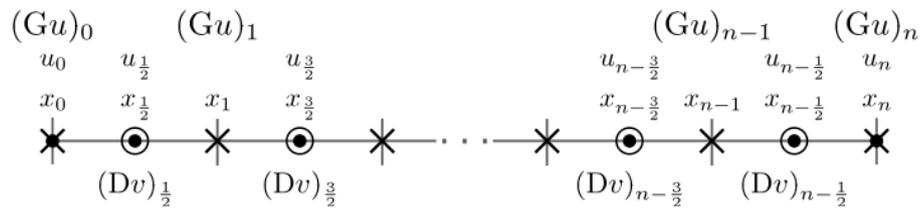


Figura 1.1. Malla staggered en 1D. Tomado de [8].

La función $u(x)$ será evaluada en los puntos denotados como puntos negros, "•", que corresponden a los centros de los bloques y a los extremos del dominio. El gradiente por su parte, será evaluado en los extremos de los bloques denotados como "×" y la divergencia será evaluada en los círculos, "○". [8]

La discretización del operador gradiente, para el caso unidimensional, en los nodos de frontera x_0 and x_n está dada por

$$\begin{aligned} (Gu)_0 &= -\frac{8}{3h}u_0 + \frac{3}{h}u_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3h}u_{\frac{3}{2}}, \\ (Gu)_n &= \frac{8}{3h}u_n - \frac{3}{h}u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3h}u_{n-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Esta discretización es de segundo orden sin usar nodos ficticios (puntos fantasma). Por otro lado, en los puntos internos de las aproximaciones de los operadores gradiente y divergencia se obtienen mediante el esquema de diferencias finitas centrado:

$$(Gu)_i = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{h} \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.14)$$

$$(Dv)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.15)$$

donde v representa al campo vectorial sobre el que se aplica el operador de divergencia, que en el caso de medios homogéneos, corresponde al gradiente de u , es decir $v_i = (Gu)_i$. [8]

Sea $\vec{u} \in \mathbb{R}^{n+2}$ el vector que corresponde a la evaluación de la función $u(x)$ en los centros de los bloques y los puntos finales del dominio, definido como,

$$\vec{u} \equiv (u_0, u_{\frac{1}{2}}, \dots, u_{n-\frac{1}{2}}, u_n)^t. \quad (1.16)$$

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ el vector que contiene la evaluación de la función v en los extremos de los bloques,

$$\vec{v} \equiv (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)^t. \quad (1.17)$$

Además, sean $\vec{G}u \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\vec{D}v \in \mathbb{R}^{n+2}$ vectores asociados a las discretizaciones de los operadores gradiente y divergencia, dados por

$$\vec{G}u \equiv ((Gu)_0, (Gu)_1, \dots, (Gu)_{n-1}, (Gu)_n)^t = \mathbf{G}_h \vec{u}, \quad (1.18)$$

$$\vec{D}v \equiv (0, (Dv)_{\frac{1}{2}}, (Dv)_{\frac{3}{2}}, \dots, (Dv)_{n-\frac{3}{2}}, (Dv)_{n-\frac{1}{2}}, 0)^t = \mathbf{D}_h \vec{v}, \quad (1.19)$$

donde $\mathbf{G}_h, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+2)}$ y $\mathbf{D}_h, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(n+2) \times (n+1)}$ corresponden a la representación matricial de los operadores discretos del gradiente y divergencia dadas por las ecuaciones (1.13)- (1.15), estas son

$$\mathbf{G}_h \vec{u} = \frac{1}{h} \mathbf{G} \vec{u} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 3 & -\frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ u_{n-\frac{1}{2}} \\ u_n \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{D}_h \vec{v} = \frac{1}{h} \mathbf{D} \vec{v} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Notemos que la primera y última fila de las matrices \mathbf{D}_h y \mathbf{D} son nulas, debido a que el método mimético no discretiza la ecuación en la frontera. Por ello, el operador de la divergencia no se aplica a esos nodos y las filas en las matrices se incluyen solo para consistencia matemática. [8]

CAPÍTULO 2

2. METODOLOGÍA

En el presente capítulo se abordó el desarrollo de un esquema numérico de alto orden capaz de capturar discontinuidades u ondas de choque presentes en las soluciones de la ecuación de Burgers no viscosa, evitando además las oscilaciones espurias. Para ello, se planteó el método numérico WENO-Mimético, que aprovecha las propiedades no oscilatorias del método de quinto orden WENO y las bondades de conservación para sistemas de ecuaciones hiperbólicas proporcionadas por las diferencias finitas de los operadores miméticos.

A continuación, consideremos el sistema de leyes de conservación hiperbólicas no lineales en su caso más general (1.3)

$$\begin{cases} u_t + \nabla \cdot f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Dado que nos enfocamos en el caso unidimensional, es claro que la divergencia del flujo f tiene un colapso dimensional a una derivada espacial con respecto a x .

Ahora bien, se discretizó el dominio físico del problema por medio de una malla staggered, en donde los centros de las celdas son los puntos en donde se calculó la divergencia. En el esquema planteado se presenta el operador de divergencia de 4to orden, tanto en los puntos interiores como en la frontera. Es importante mencionar que los puntos de la función no son conocidos en los nodos de la malla. Sin embargo, estos son necesarios para poder determinar la divergencia de f en $x_{i+\frac{1}{2}}$. Cada uno de estos puntos es interpolado por medio del esquema WENO de quinto orden, utilizando la descomposición de flujo de Lax-Friedrich.

Consideramos

$$U^n = \left(u_0^n, u_{\frac{1}{2}}^n, u_{\frac{3}{2}}^n, \dots, u_{i+\frac{1}{2}}^n, \dots, u_N^n \right).$$

Sea \bar{f}_i el valor del flujo interpolado de la función en el nodo x_i dado por

$$\bar{f}_i(U^n) = \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^+(U^n) + \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^-(U^n),$$

donde

$$\bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^+(U^n) = \text{weno5} \left(\bar{f}_{i-\frac{5}{2}}^+(U^n), \bar{f}_{i-\frac{3}{2}}^+(U^n), \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^+(U^n), \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^+(U^n), \bar{f}_{i+\frac{3}{2}}^+(U^n) \right)$$

y

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^-(U^n) = \text{weno5} \left(\bar{f}_{i-\frac{3}{2}}^-(U^n), \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^-(U^n), \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^-(U^n), \bar{f}_{i+\frac{3}{2}}^-(U^n), \bar{f}_{i+\frac{5}{2}}^-(U^n) \right)$$

con

$$f_{i-\frac{1}{2}}^\pm = \frac{1}{2} \left(f_{i-\frac{1}{2}}(U^n) \pm \alpha U_{i-\frac{1}{2}}^n \right),$$

y

$$\alpha = \text{máx} \left(|f'(U_{i-\frac{1}{2}}^n)|, |f'(U_{i-\frac{1}{2}+1}^n)| \right).$$

La acción de la función weno5: $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$, se define de la siguiente forma [9]

$$\text{weno5}(a, b, c, d, e) = \frac{a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

donde

$$q_1 = \frac{(2a - 7b + 11c)}{6}, \quad q_2 = \frac{(-b + 5c + 2d)}{6}, \quad q_3 = \frac{(2c + 5d - e)}{6}$$

$$a_1 = \frac{1}{10(\epsilon + \sigma_1)^2}, \quad a_2 = \frac{3}{5(\epsilon + \sigma_2)^2}, \quad a_3 = \frac{3}{10(\epsilon + \sigma_3)^2};$$

el valor que se considera para ϵ es aproximadamente 10^{-6} y, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, llamados índices de suavidad de la función de flujo, son calculados como

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{13}{12}(a - 2b + c)^2 + \frac{1}{4}(a - 4b + 3c)^2, \\ \sigma_2 &= \frac{13}{12}(b - 2c + d)^2 + \frac{1}{4}(b - d)^2, \\ \sigma_3 &= \frac{13}{12}(c - 2d + e)^2 + \frac{1}{4}(3c - 4d + e)^2.\end{aligned}$$

Una vez obtenidos los nodos de la malla, es posible aproximar los centros de las celdas por medio de las fórmulas en diferencias finitas obtenidas por los operadores miméticos. En este caso, la derivada espacial se representa por el operador divergencia. Por cuestiones de implementación computacional, consideramos el operador de divergencia de segundo orden (1.21)

$$\mathbf{D}_h \vec{v} = \frac{1}{h} \mathbf{D} \vec{v} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}.$$

No obstante, es importante mencionar que se pueden considerar 4to y 6to orden. Para lo cual, es necesario realizar algunas modificaciones con el fin de alcanzar el mismo orden de precisión tanto en los nodos interiores como en los puntos cercanos a la frontera. A continuación, se presenta el operador divergencia de 4to orden [10]

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & & & & & \\ -\frac{4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & -\frac{1165}{5192} & \frac{129}{2596} & -\frac{25}{15576} & 0 & \cdots & \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & \cdots & & \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, note que en todas estas matrices, tanto la primera como la última fila están llenas de ceros. Esto se debe a que físicamente la divergencia no posee influencia sobre la frontera. Por otro lado, constituye una herramienta dimensional necesaria para la multiplicación de matrices. Sin embargo, con el fin de aprovechar las condiciones de frontera periódicas, se modificó la matriz $\mathbf{D}_h \vec{v}$ para imponer estas condiciones. Así,

$$\mathbf{D}_h \vec{v} = \frac{1}{h} \mathbf{D} \vec{v} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Seguidamente, después de obtener la aproximación de la derivada en cada punto, se realizó un avance temporal siguiendo una discretización temporal Runge Kutta de tercer orden

$$\begin{aligned} U_* &= U^n + \Delta t L(U^n), \\ U_{**} &= \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U_* + \frac{1}{4} \Delta t L(U_*), \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} U_{**} + \frac{2}{3} \Delta t L(U_{**}). \end{aligned}$$

Para el caso de segundo orden tenemos que

$$L(U^n) = -\frac{1}{h} [\bar{f}_{i+1}(U^n) - \bar{f}_i(U^n)],$$

donde $\bar{f}_i(U^n)$ son los valores de los nodos obtenidos con el método weno de quinto orden.

De forma general, para mayor orden \mathbf{D} tenemos

$$L(U^n) = -\mathbf{D} \begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \vdots \\ \bar{f}_N \end{pmatrix} = -\mathbf{D}\bar{f}.$$

CAPÍTULO 3

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos al emplear el método Weno Mimético (MM-W5), el Método Mimético (MM) y la solución exacta de la ecuación de Burgers no viscosa (1.2).

3.1 Benchmark

Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación de Burgers

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u^2(x, t)}{2} \right] &= 0, \quad (x, t) \in [0, 2] \times (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \forall x \in [0, 2], \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde

$$u_0(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x),$$

y condiciones de frontera periódicas.

Para este problema la solución exacta $u(x, t)$ se calcula mediante el método de las características, obteniéndose de manera implícita con la expresión

$$F(u, x, t) = 0, \quad (3.2)$$

donde

$$F(u, x, t) = u - \frac{1}{2} \text{sen}[\pi(x - ut)] - \frac{1}{4}.$$

Esta solución exacta u es suave hasta el instante $t = \frac{2}{\pi}$ y desarrolla una onda de choque que se mueve para interactuar con una onda de refracción.

3.1.1 Experimentos numéricos

Emplearemos la siguiente notación:

- MM: Método Mimético
- MM-W5: Método Mimético-WENO de orden 5

Captura de onda de choque sin oscilaciones espurias:

A continuación, se fijó el número de celdas en $M = 30$, y se muestra en una sola gráfica la solución numérica del MM-W5, MM y la solución exacta, para los tiempos finales de simulación: $T = \frac{1}{\pi}, T = \frac{2}{\pi}, T = \frac{3}{\pi}$. Esto es, una gráfica para cada T y todo $x \in [0, 2]$. En cada uno de estos casos se calcula el error en norma ℓ_1 y en norma ℓ_∞ dados, respectivamente, por

$$e_{1,n}(\Delta x) := \|e_n\|_{\ell_1} = \Delta x \sum_j |u(x_j, t_n) - U_j^n|, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3)$$

$$e_{\infty,n}(\Delta x) := \|e_n\|_{\ell_\infty} = \max_j |u(x_j, t_n) - U_j^n|, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4)$$

donde u es la solución exacta y U la solución numérica. En estas expresiones se fija $n = N$, tal que $t_N = T$.

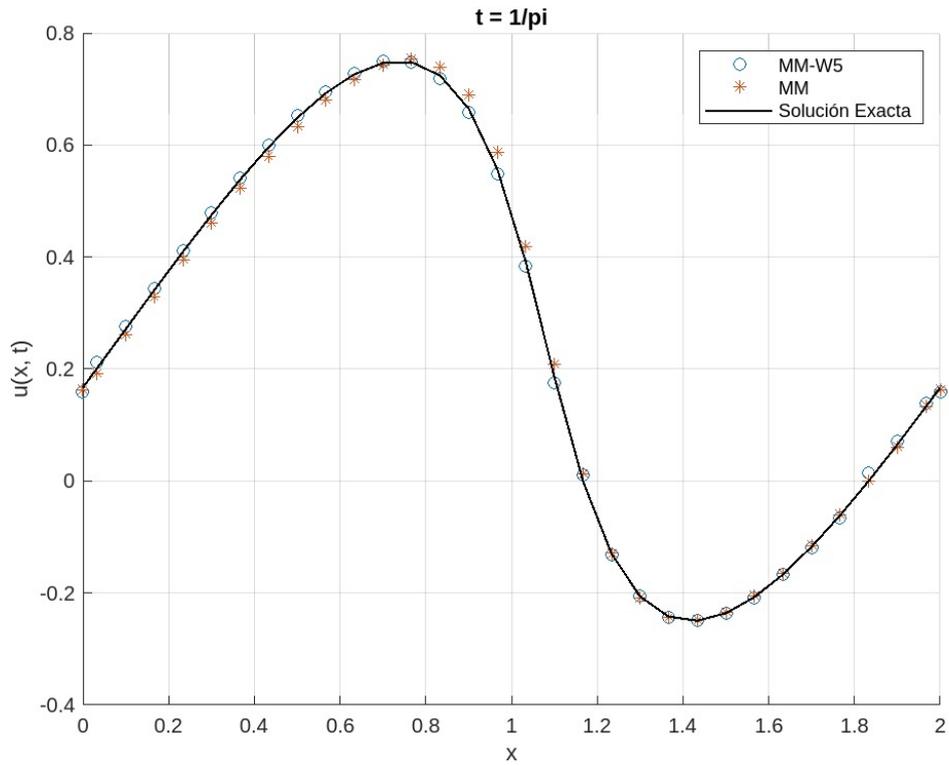


Figura 3.1. Gráfica para $M = 30$ celdas y $T = \frac{1}{\pi}$

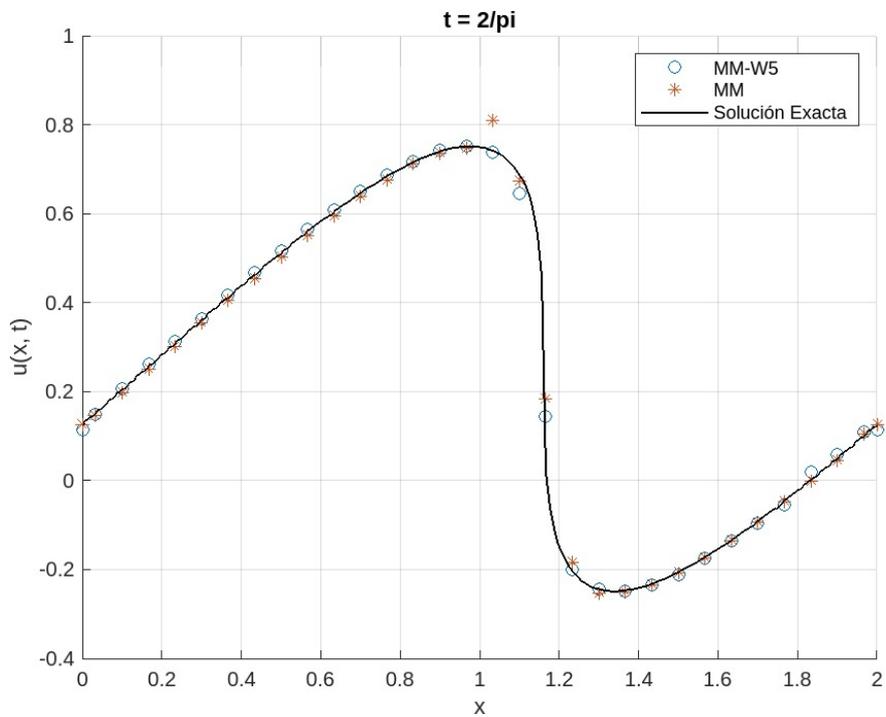


Figura 3.2. Gráfica para $M = 30$ celdas y $T = \frac{2}{\pi}$

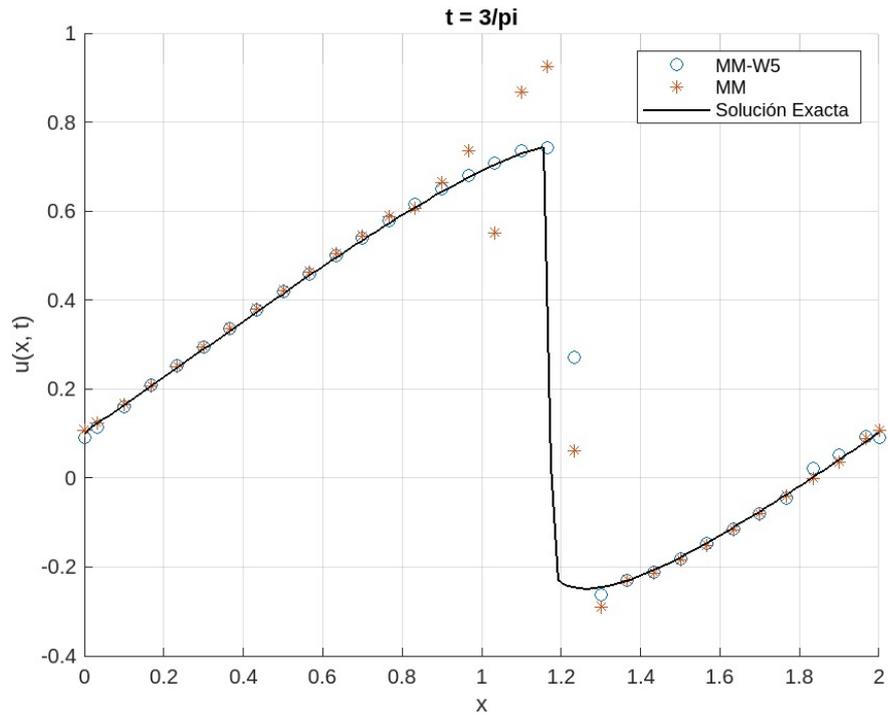


Figura 3.3. Gráfica para $M = 30$ celdas y $T = \frac{3}{\pi}$

Como se puede observar en la Figura 3.1, es decir, para $M = 30$ celdas y $T = \frac{1}{\pi}$, tanto el método MM-W5 como el MM aproximan de forma correcta la solución en una región donde la solución es suave. Por otro lado, en la Figura 3.2, en donde el tiempo $T = \frac{2}{\pi}$, se tiene que el método MM empieza a perder precisión en la región cercana en donde se empieza a formar la discontinuidad. Esto se hace más evidente en la tercera Figura 3.3 cuando $T = \frac{3}{\pi}$, en donde MM posee oscilaciones alrededor del choque, mientras que el MM-W5 captura la discontinuidad y evita dichas oscilaciones espurias.

Error en norma ℓ_1 y en norma ℓ_∞

A continuación, se fijó el tiempo de simulación en $T = \frac{1}{\pi}$, y se muestra en la siguiente tabla el error en la norma ℓ_1 y el error en norma ℓ_∞ . Considerando los siguientes números de celdas $M = 40$, $M = 80$, $M = 160$ y $M = 320$.

M	MM		MM-W5	
	ℓ_1 error	ℓ_∞ error	ℓ_1 error	ℓ_∞ error
40	0.0326	0.0643	0.0135	0.0278
80	0.0190	0.0407	0.0098	0.0184
160	0.0089	0.0199	0.0043	0.0082
320	0.0041	0.0093	0.0016	0.0040

Tabla 3.1. Comparación de los errores ℓ_1, ℓ_∞ de los métodos numéricos MM y MM-W5 con M celdas en el tiempo de simulación final $T = \frac{1}{\pi}$

En base a los resultados obtenidos en la Tabla 3.1 se tiene que el método MM-W5 presenta una mejora en la aproximación de la solución, pues como se puede observar en la Figura 3.4 para la comparación del error ℓ_1 , para todos los números de celdas considerados, el método obtuvo menor error tanto en norma ℓ_1 como en la norma ℓ_∞ con respecto al método de diferencias finitas miméticas convencional. Es importante mencionar, que es posible aumentar el orden del operador con el fin de mejorar dichas aproximaciones y reducir los errores.

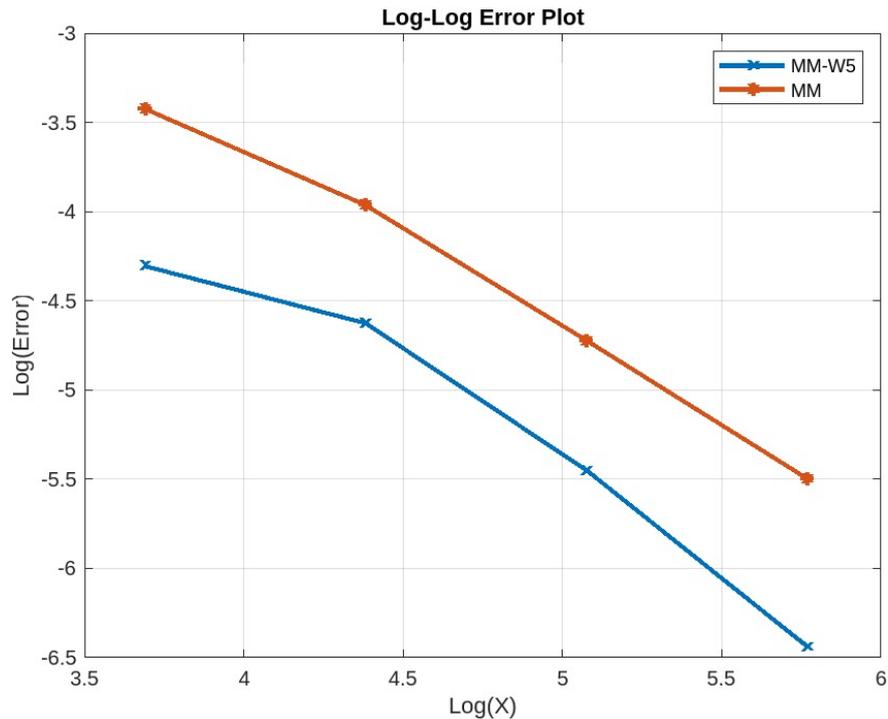


Figura 3.4. Comparación del error ℓ_1 de los métodos numéricos MM y MM-W5 a través de gráfica log-log

3.2 Caso de estudio real

Como se mencionó anteriormente, es importante implementar medidas que permitan mitigar de manera efectiva los efectos del golpe de ariete. Por esto, tanto la modelación matemática como la computacional son el medio complementario para el análisis del sistema de transporte y la determinación de las ondas de presión teniendo en cuenta las condiciones de operación y componentes del sistema de tuberías.

El factor determinante para el diseño de un método numérico radica en su capacidad para capturar las ondas de presión generadas por el ariete hidráulico, sin oscilaciones espurias. Estas propiedades del método son esenciales ya que influyen en la precisión de la predicción del fenómeno, una consideración fundamental para los ingenieros al momento de proponer estrategias de mitigación del golpe de ariete.

Por lo previamente mencionado, se implementará el MM-W5 para simular un sistema real de transporte de fluido que es típico en procesos industriales.

Como se muestra en la Figura 3.5, el sistema está constituido de una tubería de longitud



Figura 3.5. Disposición de una red de tuberías típica para el transporte de fluidos.

L a través de la cual se mueve el fluido, desde el depósito o reservorio hasta una terminal. El flujo en este sistema se encuentra modelado a través del modelo de transmisión de tuberías, dado por el siguiente sistema de EDPS's hiperbólicas no lineales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2D} v|v| &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + pc^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $x \in [0, L]$ es la variable espacial, $t \in [0, T]$ es la variable temporal, $v = v(x, t)$ es la velocidad de flujo, $p = p(x, t)$ es la caída de presión, D es el diámetro de la tubería, c es la velocidad de onda, f es el factor de fricción de Darcy-Weisbach, y ρ es la densidad de flujo. Las condiciones iniciales para el sistema (3.5) son:

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= \bar{p}^0(x), \quad \forall x \in [0, L], \\ v(x, 0) &= \bar{v}^0(x), \quad \forall x \in [0, L], \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\bar{p}^0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{v}^0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas que describen los perfiles iniciales de presión y velocidad, respectivamente. Algunas condiciones de frontera conocidas están dadas por:

$$\begin{aligned} p(0, t) &= p_0(t) = P, \quad \forall t \in [0, T], \\ v(L, t) &= v_L(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $P \in \mathbb{R}_+$ es la presión generada por el reservorio y $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de control de velocidad de flujo debido a la válvula. Respecto a esta función de control se tienen las siguientes observaciones y consideraciones:

- Si $u(t) = 0$, entonces se corresponde con la válvula cerrada (velocidad de flujo cero).
- Si $u(t) = u_{\text{máx}} \in \mathbb{R}_+$, entonces se corresponde con la válvula completamente abierta (máxima velocidad de flujo).
- Ya que la válvula estará completamente abierta en el tiempo inicial $t = 0$, entonces se tiene que

$$u(0) = u_{\text{máx}}. \tag{3.8}$$

- En el tiempo final $t = T$ se requiere que la válvula esté cerrada. Entonces se impone la siguiente restricción terminal.

$$u(T) = 0. \tag{3.9}$$

- Finalmente, para garantizar que la válvula no se vuelva a abrir durante el horizonte del tiempo, se tiene la siguiente restricción sobre su primera derivada

$$\frac{du}{dt}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.10}$$

Es decir, la función de control debe decrecer en el intervalo $[0, T]$.

La función de control que se ha descrito acá, se puede establecer como una incógnita para un problema de control óptimo en la frontera de sistemas de EDP's hiperbólicas, pero este estudio no es un alcance del presente trabajo. Sin embargo, se puede construir tres funciones de control $u(t)$ dadas en la siguiente proposición.

Proposición 1 (Funciones de control de flujo lineal y cuadrático). *Las siguientes funciones de clase $C^\infty([0, T])$*

$$u(t) = \frac{u_{\text{máx}}}{T}(T - t) \quad (3.11)$$

$$u(t) = \frac{u_{\text{máx}}}{T^2}(t^2 - 2Tt + T^2) \quad (3.12)$$

$$u(t) = \frac{u_{\text{máx}}}{T^2}(T^2 - t^2) \quad (3.13)$$

satisfacen las condiciones (3.8) - (3.10).

Las funciones de control $u(t)$ dadas en esta proposición son bastante regulares, por lo que se puede suponer un cierre de la válvula no brusco que amortiguaría significativamente al golpe de ariete. Por lo contrario, cerrar la válvula repentinamente causará que una onda de presión oscilante (es decir: golpe de ariete) se propague a través de la tubería a alta velocidad. Para observar este efecto, se construyen funciones de control sin la regularidad que tienen las que fueron dadas en la Proposición 1. La siguiente proposición proporciona funciones de control del flujo por tramos en el horizonte de flujo $[0, T]$.

Proposición 2 (Funciones de control de flujo constante, lineal y cuadrático por tramos).

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{máx}}, & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ \frac{u_{\text{máx}}}{8}, & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.14)$$

$$u(t) = \begin{cases} \frac{u_{\text{máx}}}{T}(T - t), & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ \frac{u_{\text{máx}}}{T} \left(\frac{7}{8}T - \frac{3}{2}t \right), & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{u_{\text{máx}}}{4T}(T - t), & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.15)$$

$$u(t) = \begin{cases} \frac{u_{\text{máx}}}{T^2}(8t^2 - 4Tt + T^2), & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ \frac{u_{\text{máx}}}{T^2} \left(3t^2 - \frac{15}{4}Tt + \frac{5}{4}T^2 \right), & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{u_{\text{máx}}}{T^2} \left(\frac{t^2}{2} - Tt + \frac{T^2}{2} \right), & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.16)$$

$$u(t) = \begin{cases} \frac{u_{\text{máx}}}{T^2}(-8t^2 + T^2), & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ \frac{u_{\text{máx}}}{T^2} \left(-6t^2 + 3Tt + \frac{T^2}{8} \right), & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{u_{\text{máx}}}{T^2} \left(-t^2 + \frac{5}{4}Tt - \frac{T^2}{4} \right), & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.17)$$

3.2.1 Escenario de experimentación numérica

El escenario de experimentación numérica para este caso real se basa en una tubería de acero inoxidable de 200 metros, conectada a un depósito de 20 metros de altura. Los parámetros correspondiente se muestran en la tabla (3.2)

Parámetro	Valor	Unidades
L	200	m
D	100	mm
c	1200	m/s
f	0.03	adimensional
P	2×10^5	kg/(m · s ²)

Tabla 3.2. Tabla de parámetros de la experimentación numérica

Se asume que el flujo inicialmente está basado estacionario con velocidad constante

$$\bar{v}^0(x) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \forall x \in [0, L].$$

Por tanto, de la primera EDP en (3.5) se puede establecer la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO) para determinar la función $\bar{p}^0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^0}{dx}(x) + \frac{2f}{D} - 0, \quad \forall x \in (0, L]. \quad (3.18)$$

Como $\bar{p}^0(0) = P$, entonces este dato es una condición inicial para la EDO (3.18). Luego, al resolver este problema se encuentra que el perfil inicial de presión es

$$\bar{p}^0(x) = P - \frac{2\rho f}{D}x. \quad (3.19)$$

De manera similar, se puede determinar la condición $v(0, t) = v_0(t)$

$$v_0(t) = \frac{u_{\text{máx}}}{1 + \frac{f u_{\text{máx}}}{2D} t}, \quad \forall t \in [0, t]. \quad (3.20)$$

El campo de presión $p(x, t)$ en $x = L$

$$p(L, t) = p_L(t),$$

se conoce para $t = 0$

$$p_L(0) = \bar{p}^0(L) = P - \frac{2\rho f}{D} L.$$

Sin embargo, para $t \in (0, T]$ es desconocido y debe ser determinado como un problema de frontera libre para todo $t \in (0, T]$ en el nodo $x_N = L$ de la malla asociada a la discretización del MM-W5.

La máxima velocidad es $u_{\text{máx}} = 2$ m/s y el tiempo final es $T = 10$ s.

3.2.2 Modelo en forma compacta

Se quiere aproximar numéricamente, con el MM-W5, la función vectorial $\mathbf{u}(x, t)$ y su traza $\mathbf{u}_L(t)$ en $x = L$, mediante el siguiente sistema semi-lineal de leyes de balance hiperbólico con término fuente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{S}(\mathbf{u}(x, t)), \quad \forall (x, t) \in (0, L] \times (0, T], \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \bar{\mathbf{u}}^0(x), \quad \forall x \in [0, L], \\ \mathbf{u}(0, t) &= \mathbf{u}_0(t), \quad \forall t \in [0, T], \\ \mathbf{u}(L, t) &= \mathbf{u}_L(t), \quad t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Este sistema reproduce el modelo matemático del escenario físico real que se planteó anteriormente, con:

- La función vectorial de variables de estado $\mathbf{u}(x, t)$ dado por

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} v(x, t) \\ p(x, t) \end{pmatrix}.$$

- La matriz de coeficientes constantes A (matriz de velocidades de advección) dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- La función vectorial fuente $\mathbf{S}(\mathbf{u}(x,t))$ dado por

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}(x,t)) = \begin{pmatrix} -\frac{f}{2D}v(x,t)|v(x,t)| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- La función vectorial de datos iniciales $\bar{\mathbf{u}}^0(x)$ dada por

$$\bar{\mathbf{u}}^0(x) = \begin{pmatrix} \bar{v}^0(x) \\ \bar{p}^0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ P - \frac{2\rho f}{D}x \end{pmatrix}.$$

- La función vectorial $\mathbf{u}_0(t)$ de datos en la frontera $x = 0$ dada por

$$\mathbf{u}_0(t) = \begin{pmatrix} v_0(t) \\ p_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_{\text{máx}}}{1 + \frac{f u_{\text{máx}}}{2D}t} \\ P \end{pmatrix}.$$

- La función vectorial $\mathbf{u}_L(t)$ de traza en la frontera $x = L$ dada por

$$\mathbf{u}_L(t) = \begin{pmatrix} v_L(t) \\ p_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ p_L(t) \end{pmatrix},$$

donde la componente $v_L(t) = u(t)$ es alguna de las funciones control dada por las Propositiones 1 y 2, y $p_L(t)$ es la otra incógnita que se debe aproximar o imponer con el MM-W5 para todo $t \in (0, L]$ puesto que en $t = 0$ tiene el valor $p_L(0) = P - \frac{2\rho f}{D}L$.

CAPÍTULO 4

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La simulación numérica de diversos fenómenos y procesos de la industria es una tarea complicada, no solo por tener que aproximar las soluciones de alguna EDP, sino que también estas aproximaciones deben representar el fenómeno físico lo más preciso posible. No obstante, bajo ciertas condiciones las soluciones que modelan estos procesos tienden a generar discontinuidades por cambios bruscos en la naturaleza del proceso como lo es la presión.

Si bien los métodos miméticos implementan operadores que imitan las propiedades continuas, estos no captan bien las discontinuidades. Incluso al aumentar el orden del operador, estas aproximaciones empeoran al presentarse oscilaciones cerca de las discontinuidades. Por lo que, el método WENO Mimético otorga claras ventajas en estos aspectos, pues permite utilizar las mismas fórmulas de diferencias finitas de alto orden sin tener que pagar el precio de oscilaciones. Además, como se observó en los resultados, el método propuesto captura de forma precisa las discontinuidades u ondas de choques presentes en la solución.

4.1 Conclusiones

- La aplicación de la malla staggered permitió una discretización algebraica compatible con la derivada espacial, en donde se consideró el operador de divergencia de segundo orden, calculado en los centros de la celda, tomando en cuenta también que el operador de divergencia no tiene influencia sobre la frontera.
- El esquema WENO de quinto orden se empleó para interpolar los valores de los centros de las celdas hacia los nodos. Esto permitió que el esquema capture las soluciones discontinuas del modelo al asignar pesos en base a coeficientes de suavidad en regiones de mayor o menor suavidad frente a la presencia de

discontinuidades como se visualizó en los resultados previos, evitando oscilaciones espurias.

- La convergencia y estabilidad del método están directamente relacionados con el orden del operador mimético que se considere, en este caso divergencia. No obstante, es importante mencionar que aunque los operadores miméticos preservan el mismo orden hasta la frontera [11], la modificación de la matriz \mathbf{D} para condiciones de frontera periódicas puede reducir el orden del esquema.

4.2 Recomendaciones

- Es significativo considerar que, al incrementar el orden de los operadores es necesario también modificar la primera y última fila de la matriz \mathbf{D} , con el fin de utilizar las condiciones de frontera periódicas.
- Es importante notar que el paso temporal depende del número de Courant CFL para asegurar la estabilidad del método. Es decir, se recomienda no tomar un paso de tiempo arbitrario.
- Se recomienda siempre utilizar el flux splitting en el esquema WENO, pues la separación del flujo en una dirección positiva y otra negativa permite manejar las discontinuidades y gradientes abruptos en una simulación. En adición, ayuda a mitigar problemas numéricos de estabilidad y a obtener resultados físicamente más confiables y precisos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. C. Potter, D. C. Wiggert, and B. Ramadan, *Mecánica de fluidos*, 4th ed. Cengage Learning, 2012.
- [2] J. Záruba, *Water Hammer in Pipe-Line Systems*. Elsevier, 1993.
- [3] R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, 2nd ed. Birkhauser Verlag, 1992.
- [4] S. Chi-Wang, “Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws,” 1997.
- [5] J. Yan, S. Chi-Wang, and Z. Mengping, “An alternative formulation of finite difference weno schemes with lax-wendroff time discretization for conservation laws.”
- [6] S. Chi-Wang, “High order finite difference and finite volume weno schemes and discontinuous galerkin methods for cfd,” 2001.
- [7] K. Lipnikov, G. Manzini, and M. Shashkov, “Mimetic finite difference method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 257, 2013.
- [8] S. G. Jones, J. Arteaga, and O. Jiménez, “A study of mimetic and finite difference methods for the static diffusion equation,” *Computers Mathematics with Applications*, vol. 76, 2018.
- [9] W. Angulo, “Un cuento muy breve sobre el método de volúmenes finitos.”
- [10] J. E. Castillo and R. Grone, “A matrix analysis approach to higher-order approximations for divergence and gradients satisfying a global conservation law,” 2003.

[11] M. Gonzales and S. Murillo, "Análisis de la solución numérica en la ecuación de difusión no estacionaria unidimensional usando esquemas de diferencias finitas miméticas y crank nicolson," 2018.

APÉNDICES

APÉNDICE A

A.1 Anexo: Código MATLAB

```
1
2 function resultado = weno5(a,b,c,d,e); % Función WENO de orden 5
3 eps = 10^-6; % Valor del exponencial
4 q1 = (2*a -7*b+11*c)/6; % Valor de q_1
5 q2 = (-b+ 5*c + 2*d)/6; % Valor de q_2
6 q3 = (2*c + 5*d - e)/6; % valor de q_3
7
8 % índices de suavidad
9 sigma1 = (13/12)*(a-2*b + c)^2 + (1/4)*(a-4*b+3*c)^2;
10 sigma2 = (13/12)*(b- 2*c + d)^2 + (1/4)*(b-d)^2;
11 sigma3 = (13/12)*(c- 2*d +e)^2 + (1/4)*(3*c - 4*d + e)^2;
12
13 a1 = (1/10)*(1/(eps + sigma1)^2);
14 a2 = (3/5)*(1/(eps + sigma2)^2);
15 a3 = (3/10)*(1/(eps + sigma3)^2);
16
17 resultado = (a1*q1 +a2*q2 + a3*q3)/(a1+a2+a3);
18 end
```

Código A.1. Implementación del esquema WENO de orden 5

```
1
2 clc
3 close all
4 clear
5
6 %Accedemos a la funciones y operadores de la libreria mole
7 addpath(' ../mole_MATLAB')
8
9 %Definimos el dominio
10 a = -20;
11 b = 20;
12
13 k= 2; %orden de precisión
14 n=300; %numero de celdas
15 dx = (b-a)/n; %espacio entre nodos
16
17 t=13; %tiempo de simulación
18 CFL = 0.20; % Número de Courant
19
20 %Definimos nuestro operador mimetico
21
22 D = div(k,n,dx);
23
24 %Generamos la malla staggered
25 malla = [a a+dx/2: dx : b-dx/2 b];
26 %Consideramos la condición inicial
27 U = exp(-(malla.^2)/50)';
28
29 %dt inicial
30 dt=CFL*dx/max(abs(U));
31
32 % Implementamos avance temporal de Runge Kutta
```

```

33 %Time integration loop
34 for i = 0 : t/dt
35
36     %Actualizamos dt
37     dt=CFL*dx/max(abs(U))
38     plot(malla, U, 'LineWidth', 2)
39     str = sprintf('t = %.2f', i*dt);
40     title(str)
41     xlabel('x')
42     ylabel('u(x, t)')
43     grid on
44     drawnow
45
46
47     U1 = U + operadorLWeno(U,D,n,dt,dx);
48     U2 = (3/4)*U + (1/4)*U1 + (1/4)*operadorLWeno(U1,D,n,dt,dx);
49     U3 = (1/3)*U + (2/3)*U2 + (2/3)*operadorLWeno(U2,D,n,dt,dx);
50     U = U3;
51
52 end

```

Código A.2. Resolución de la ecuación de Burgers no viscosa

```

1
2 %Complementa WENOMimeticoFinal
3
4 function resultado = operadorLWeno(U,D,n,dt,dx)
5
6 % U solucion actual
7 % D operador mimetico divergencia
8 % n numero de celdas
9
10 %Lax Friedrichs Flux Splitting
11
12 %Determinamos el valor de alpha
13
14 alpha = zeros(1,n+2);
15
16 for i= 1:n+1
17     alpha(i) = max(abs(U(i)),abs(U(i+1)));
18 end
19
20 alpha(n+2) = max(abs(U(n+2)),abs(U(1)));
21
22
23 %Definimos fplus y fminus
24
25 fp = (1/2)*((U'.^2)/2 + alpha.*U');
26
27 fm = (1/2)*((U'.^2)/2 - alpha.*U');
28
29 %Determinamos fBarp y fBarm
30
31 %fBarp
32 fBarp = size(1,n+1);

```

```

33
34 fBarp(1) = weno5(fp(end-2),fp(end-1),fp(1),fp(2),fp(3));
35 fBarp(2) = weno5(fp(end),fp(1),fp(2),fp(3),fp(4));
36 fBarp(3) = weno5(fp(1),fp(2),fp(3),fp(4),fp(5));
37
38 for i = 4:n-1
39     fBarp(i) = weno5(fp(i-2),fp(i-1),fp(i),fp(i+1),fp(i+2));
40 end
41
42 fBarp(n) = weno5(fp(end-3),fp(end-2),fp(n),fp(n+1),fp(1));
43
44 fBarp(n+1) = weno5(fp(end-2),fp(end-1),fp(n+1),fp(1),fp(2));
45
46 %fBarm
47 fBarm = size(1,n+1);
48
49 fBarm(1) = weno5(fm(end-2),fm(end-1),fm(1),fm(2),fm(3));
50 fBarm(2) = weno5(fm(end),fm(1),fm(2),fm(3),fm(4));
51 fBarm(3) = weno5(fm(1),fm(2),fm(3),fm(4),fm(5));
52
53 for i = 4:n-1
54     fBarm(i) = weno5(fm(i-2),fm(i-1),fm(i),fm(i+1),fm(i+2));
55 end
56
57 fBarm(n) = weno5(fm(end-3),fm(end-2),fm(n),fm(n+1),fm(1));
58
59 fBarm(n+1) = weno5(fm(end-2),fm(end-1),fm(n+1),fm(1),fm(2));
60
61
62 fBarSum = fBarp + fBarm;
63
64 % Periodic BC imposed on the divergence operator (Segundo orden)

```

```
65 D(1,2) = 1/(2*dx);
66 D(1,end-1) = -1/(2*dx);
67 D(end,2) = 1/(2*dx);
68 D(end,end-1) = -1/(2*dx);
69
70 resultado = -dt*D*fBarSum';
71
72 end
```

Código A.3. Función para el operador de discretización espacial