FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	SEGUNDO TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	Avilés J., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	25/enero/2021

Tema 1

1. (3 PUNTOS) Califique como verdaderas (V) o falsas (F), sin justificar sus respuestas, las proposiciones dadas en los siguientes literales:

(a) Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $\forall p, q \in X \ \ [\ (\ d(p,q) > 0\ ) \Leftrightarrow (p = q)\ ]$

(b) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in dom\, f \ \ [0 < x - c < \delta \Rightarrow \ f(x) < \varepsilon]$

(c) $f + g$ es una función continua en $x = c$ solo si f y g son continuas en $x = c$

(d) f es continua en $x = c$ solo si $f'(c)$ existe

(e) El punto $P\big(c, f(c)\big)$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función f si ésta cambia su concavidad antes y después de dicho punto

(f) Si una función f es acotada y continua en todo el intervalo $[a, b]$, entonces es integrable en dicho intervalo

2. (3 PUNTOS) Califique como verdaderas (V) o falsas (F), sin justificar sus respuestas, las proposiciones dadas en los siguientes literales:

(a) Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $\forall p, q, r \in X \ \ [\ d(p,q) < d(p,r) + d(r,q)\ ]$

(b) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta < 0, \forall x \in dom\, f \ \ [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon]$

(c) Si $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe, entonces la función f es continua en $x = c$

(d) $D_x[f(x)g(x)] - f(x)\, D_x g(x) = g(x)\, D_x f(x)$

(e) Si la función f está definida en un intervalo I que contiene al punto crítico c, entonces $f(c)$ es un valor extremo

(f) La integral definida de una función continua f permite calcular el área con signo de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje X en un intervalo cerrado

3. (3 PUNTOS) Califique como verdaderas (V) o falsas (F), sin justificar sus respuestas, las proposiciones dadas en los siguientes literales:

(a) Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $\forall p, q \in X \quad [\,(\,d(p,q) = 0\,) \Leftrightarrow (p \neq q)]$

(b) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in dom\, f \quad [0 < -x + c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$

(c) Si f y g son funciones continuas en $x = c$, entonces la función f/g también es continua en $x = c$

(d) La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\big(c, f(c)\big)$ está dada por $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

(e) Si la función f está definida en un intervalo I que contiene al punto crítico singular c, entonces $f'(c) = 0$

(f) El resultado de una suma de Riemann siempre es un número real positivo

4. (3 PUNTOS) Califique como verdaderas (V) o falsas (F), sin justificar sus respuestas, las proposiciones dadas en los siguientes literales:

(a) Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $\forall p, q \in X \quad [d(p,q) > 0] \Leftrightarrow (p \neq q)$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in dom\, f \quad [x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$

(c) La función f es continua por la derecha en $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

(d) La velocidad en el instante $t = c$ de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $f(t)$ está dada por $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{c}$

(e) Si la función f es continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene un punto crítico c y si además $f'(x) > 0, \forall x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0, \forall x \in (c, b)$, entonces $f(c)$ es un valor extremo máximo local de f

(f) El valor de la constante de integración influye en el resultado de la evaluación de una integral definida

5. (3 PUNTOS) Califique como verdaderas (V) o falsas (F), sin justificar sus respuestas, las proposiciones dadas en los siguientes literales:

(a) Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $\forall p, q, r \in X \quad [\, d(p, r) + d(r, q) \geq d(p, q) \,]$

(b) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in dom\, f \quad [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -M]$

(c) f y g son funciones continuas en $x = c$ siempre que $f - g$ sea continua en $x = c$

(d) La pendiente de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\big(c, f(c)\big)$ está dada por $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

(e) Si la función f es continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene un punto crítico c y si además $f'(x) < 0, \forall x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0, \forall x \in (c, b)$, entonces $f(c)$ es un valor extremo mínimo local de f

(f) En el proceso de antiderivación es posible aplicar la propiedad aditiva para intervalos

6. (5 PUNTOS) Sea $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - 3x$:
(a) Determine un valor δ para que $-\frac{3}{2} < f(x) < -\frac{1}{2}$ siempre que $0 < |x - 1| < \delta$.
(b) Escriba la definición rigurosa del límite de f según las condiciones dadas y realice el análisis preliminar correspondiente.
(c) Elabore la interpretación gráfica, del límite analizado, en el plano cartesiano.

7. (5 PUNTOS) Sea $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - \frac{3}{2}x$:
(a) Determine un valor δ para que $0 < f(x) < 1$ siempre que $0 < |x - 1| < \delta$.
(b) Escriba la definición rigurosa del límite de f según las condiciones dadas y realice el análisis preliminar correspondiente.
(c) Elabore la interpretación gráfica, del límite analizado, en el plano cartesiano.

8. (5 PUNTOS) Sea $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - 4x$:
(a) Determine un valor δ para que $\frac{23}{4} < f(x) < \frac{25}{4}$ siempre que $0 < |x + 1| < \delta$.
(b) Escriba la definición rigurosa del límite de f según las condiciones dadas y realice el análisis preliminar correspondiente.
(c) Elabore la interpretación gráfica, del límite analizado, en el plano cartesiano.

9. (5 PUNTOS) Sea $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3 - 2x$:
(a) Determine un valor δ para que $-\frac{3}{2} < f(x) < -\frac{1}{2}$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$.
(b) Escriba la definición rigurosa del límite de f según las condiciones dadas y realice el análisis preliminar correspondiente.
(c) Elabore la interpretación gráfica, del límite analizado, en el plano cartesiano.

10. (5 PUNTOS) Sea $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$:
(a) Determine un valor δ para que $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$ siempre que $0 < |x - 4| < \delta$.
(b) Escriba la definición rigurosa del límite de f según las condiciones dadas y realice el análisis preliminar correspondiente.
(c) Elabore la interpretación gráfica, del límite analizado, en el plano cartesiano.

11. (5 PUNTOS) Determine el valor de la constante $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, para que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{a}{2x}\right)^{2x} = e^{-8}$$

utilizando el Teorema de L'Hôpital para el cálculo del límite.

12. (5 PUNTOS) Determine el valor de la constante $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, para que:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{sen(x)\big(1 + tan(2x)\big)^{\frac{a}{x}}}{tan(x)} \right) = e^{8}$$

utilizando el Teorema de L'Hôpital para el cálculo del límite.

13. (5 PUNTOS) Determine el valor de la constante $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, para que:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{cot(x)\big(1 + tan(2x)\big)^{\frac{a}{x}}}{csc(x)} \right) = e^{16}$$

utilizando el Teorema de L'Hôpital para el cálculo del límite.

14. (5 PUNTOS) Determine el valor de la constante $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ para que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{a}{3x}\right)^{2x} = e^{-6}$$

utilizando el Teorema de L'Hôpital para el cálculo del límite.

15. (5 PUNTOS) Determine el valor de la constante $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$, para que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x + a}{2x - 1}\right)^{x+5} = e^{\frac{3}{2}}$$

utilizando el Teorema de L'Hôpital para el cálculo del límite.

16. (6 PUNTOS) Considere la curva C, definida por:

$$ay = x^2 + \frac{bx}{y^{-1}}$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $P(2,-4) \in C$; y, la recta tangente a la gráfica de C cuando $x = 6$, sea horizontal.

17. (6 PUNTOS) Considere la curva C, definida por:

$$sen(x^2y) - y^2 + bx = a - \frac{\pi^2}{16}$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right) \in C$; y, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de C en dicho punto sea igual a $\frac{2-2\pi}{\pi+8}$.

18. (6 PUNTOS) Considere la curva C, definida por:

$$cos(x)\, e^y - ax = 2y + b$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(0,0) \in C$; y, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de C en P sea igual a 3.

19. (6 PUNTOS) Considere la curva C, definida por:

$$x^2 + y^2 - ax + by - 24 = 0$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(1,3) \in C$; y, la pendiente de la recta normal a la gráfica de C en P sea igual a -6.

20. (6 PUNTOS) Considere la curva C, definida por:

$$ax^2 - xy + y^2 = b$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(1,-1) \in C$; y, la pendiente de la recta normal a la gráfica de C en dicho punto sea igual a -1.

Tema 5

21. De los siguientes problemas, **SELECCIONE SOLAMENTE UNO** y resuélvalo.

    (6 PUNTOS) Un punto M se desplaza sobre la gráfica de $y = 2\,cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$, de manera tal que en cierto intervalo del recorrido, su ordenada cambia a una tasa constante de $-\frac{\pi}{3}\ unidades\ por\ segundo$. Determine la tasa de variación de la abscisa del punto, cuando las coordenadas de M sean $(\pi, 1)$.

    (6 PUNTOS) La ecuación de la demanda de cierto artículo en una empresa está dada por $p = \frac{800}{\sqrt{q+4}}$, siendo p el precio en dólares y q el número de unidades. Si la demanda registrada actualmente es de 12 unidades, aproxime, utilizando Cálculo Diferencial, el precio que se deberá establecer cuando se vendan 11 unidades.

22. De los siguientes problemas, **SELECCIONE SOLAMENTE UNO** y resuélvalo.

    (6 PUNTOS) Un punto M se desplaza sobre la gráfica de $y = -\,sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ de manera tal que, en cierto intervalo del recorrido, su ordenada cambia a razón de $-2\ unidades\ por\ segundo.$ Determine la tasa de variación de la abscisa del punto, cuando las coordenadas de M sean $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

    (6 PUNTOS) La ecuación de la oferta de cierto artículo en una empresa está dada por $p = \frac{(2q-5)^{3/2}}{10}$, definida para valores de $q \geq 3$, donde p es el precio en dólares y q el número de unidades. Si la oferta registrada actualmente es de 7 unidades, aproxime, utilizando Cálculo Diferencial, el precio que se deberá establecer cuando se produzcan 9 unidades.

23. De los siguientes problemas, **SELECCIONE SOLAMENTE UNO** y resuélvalo.

    (6 PUNTOS) Se inscribe un cubo en una esfera cuyo volumen aumenta a razón de 2 $pies^3/min$. Determine la tasa de variación de la longitud de la arista del cubo, cuando el radio de la esfera mida 0.5 $pies$.

    (6 PUNTOS) Los costos semanales en una empresa están dados por $C(q) = 25\,q^2 + 200q\ dólares$, siendo q el número de unidades producidas. Si en cada una de las últimas semanas se ha registrado un nivel de producción de 20 unidades, aproxime, utilizando Cálculo Diferencial, los costos semanales que se generarán, si se requieren producir 22 unidades semanales.

24. De los siguientes problemas, **SELECCIONE SOLAMENTE UNO** y resuélvalo.

(6 PUNTOS) Se inscribe una esfera en un cubo cuyo volumen aumenta a razón de 2 $pies^3/min$. Determine la tasa de variación de la longitud del radio de la esfera, cuando la arista del cubo mida 0.5 $pies$.

(6 PUNTOS) Los ingresos semanales obtenidos por la venta de q artículos en una empresa están dados por $I(q) = 250\,q + 45\,q^2 - q^3\ dólares$. Si en cada una de las últimas semanas la empresa ha registrado ventas de 10 artículos, aproxime, utilizando Cálculo Diferencial, los ingresos semanales que se generarán, si el número de artículos vendidos por semana cambia de 10 a 8.

25. De los siguientes problemas, **SELECCIONE SOLAMENTE UNO** y resuélvalo.

(6 PUNTOS) Se inscribe un cubo en una esfera cuya área de superficie disminuye a razón de 1.5 $pies^2/min$. Determine la tasa de variación de la longitud de la arista de dicho cubo, cuando el radio de la esfera mida 0.25 $pies$.

(6 PUNTOS) La utilidad semanal generada al producir y vender q unidades de cierto producto en una empresa está dada por $U(q) = 396\,q - 2\,q^2 - 400\ dólares$. Si en cada una de las últimas semanas, la empresa ha producido y vendido 20 unidades, aproxime, utilizando Cálculo Diferencial, la utilidad que se obtendrá cuando el número de unidades cambie de 20 a 21.

26. (6 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$, calcule la suma de Riemman, considerando los puntos muestra como el extremo derecho de cada subintervalo y la siguiente partición:

$$P:\ -\frac{3}{2} < -\frac{1}{2} < 0 < 1 < 2$$

27. (6 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$, calcule la suma de Riemman, considerando los puntos muestra como el extremo izquierdo de cada subintervalo y la siguiente partición:

$$P:\ -\frac{3}{2} < -\frac{1}{2} < 0 < 1 < 2$$

28. (6 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, calcule la suma de Riemman, considerando los puntos muestra como el extremo izquierdo de cada subintervalo y la siguiente partición:

$$P:\ -\frac{5}{2} < -1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < 2$$

29. (6 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, calcule la suma de Riemman, considerando los puntos muestra como el extremo derecho de cada subintervalo y la siguiente partición:

$$P:\ -\frac{5}{2} < -1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < 2$$

30. (6 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$, calcule la suma de Riemman, considerando los puntos muestra como el extremo derecho de cada subintervalo y la siguiente partición:

$$P:\ -3 < -1 < 0 < \frac{3}{2} < \frac{7}{2}$$

31. (6 PUNTOS) A partir del siguiente procedimiento:

$$\int sen^2(x)\,cos(x)\,\sqrt{9-sen(x)}\,dx \qquad u=\sqrt{9-sen(x)} \quad \rightarrow \quad u^2=9-sen(x)$$

***

Analice si existen o no errores. En caso de haber errores, califique el procedimiento como “INCORRECTO” y especifique cuál es el primer error cometido. En caso de no haber errores, califique el procedimiento como “CORRECTO” y continúelo a partir del desarrollo dado.

32. (6 PUNTOS) A partir del siguiente procedimiento:

$$\int cos(x+2)\,sen(2-3x)\,dx$$

$$u=cos(x+2) \;\rightarrow\; du=-\,sen(x+2)\,dx$$

$$dv=sen(2-3x)\,dx \;\rightarrow\; v=\frac{1}{3}cos(2-3x)$$

$$\int cos(x+2)\,sen(2-3x)\,dx=\frac{1}{3}cos(x+2)\,cos(2-3x)+\frac{1}{3}\int cos(2-3x)\,sen(x+2)dx$$

***

Analice si existen o no errores. En caso de haber errores, califique el procedimiento como “INCORRECTO” y especifique cuál es el primer error cometido. En caso de no haber errores, califique el procedimiento como “CORRECTO” y continúelo a partir del desarrollo dado, utilizando la misma técnica inicialmente considerada.

33. (6 PUNTOS) A partir del siguiente procedimiento:

$$\int \frac{csc^2(2x)}{sen^2(2x)-sen^4(2x)}\,dx$$

$$\frac{csc^2(2x)}{sen^2(2x)-sen^4(2x)}=\frac{csc^2(2x)}{sen^2(2x)\left(1-sen^2(2x)\right)}=\frac{\frac{1}{sen^2(2x)}}{sen^2(2x)\,cos^2(2x)}=\frac{1}{cos^2(2x)}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{csc^2(2x)}{sen^2(2x)-sen^4(2x)}\,dx=\int \frac{sen^2(x)+cos^2(x)}{cos^2(2x)}dx$$

***

Analice si existen o no errores. En caso de haber errores, califique el procedimiento como “INCORRECTO” y especifique cuál es el primer error cometido. En caso de no haber errores, califique el procedimiento como “CORRECTO” y continúelo a partir del desarrollo dado.

34. (6 PUNTOS) A partir del siguiente procedimiento:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}\,dx = \int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx$$

$$\frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+3} \qquad \rightarrow \qquad x^3+x^2+x+3 = A(x^2+3) + B(x^2+1)$$

***

Analice si existen o no errores. En caso de haber errores, califique el procedimiento como “INCORRECTO” y especifique cuál es el primer error cometido. En caso de no haber errores, califique el procedimiento como “CORRECTO” y continúelo a partir del desarrollo dado.

35. (6 PUNTOS) A partir del siguiente procedimiento:

$$\int x^3\sqrt{9x^2-4}\,dx$$

$$3x = 2\,sec(t) \qquad \rightarrow \qquad 3\,dx = 2\,sec(t)\,tan(t)\,dt \qquad \wedge \qquad \sqrt{9x^2-4} = 2\,tan(t)$$

***

Analice si existen o no errores. En caso de haber errores, califique el procedimiento como “INCORRECTO” y especifique cuál es el primer error cometido. En caso de no haber errores, califique el procedimiento como “CORRECTO” y continúelo a partir del desarrollo dado.

36. (5 PUNTOS) Obtenga el valor de:

$$\int_{-2}^{2} [\, |2x-1| + sgn(3-x)\,]dx$$

37. (5 PUNTOS) Obtenga el valor de:

$$\int_{-3}^{3} [\, \mu(2x-1) - sgn(x-6)\,]dx$$

38. (5 PUNTOS) Obtenga el valor de:

$$\int_{-2}^{2} [\, \mu(2x-1) + [\![x-3]\!]\,]dx$$

39. (5 PUNTOS) Obtenga el valor de:

$$\int_{-4}^{4} [\, |2x-1| - \mu(3-x)\,]dx$$

40. (5 PUNTOS) Obtenga el valor de:

$$\int_{-1}^{1} [\, [\![2x-1]\!] + sgn(0.5-x)\,]dx$$

41. (8 PUNTOS) Sea R la región del plano definida por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (e^x \geq y) \wedge (y \geq 1) \wedge (0 \leq x \leq 1)\}$$

(a) Realice el bosquejo de R.
(b) Grafique una franja representativa de la región, especifique la diferencial de área y calcule el área de la región.
(c) Bosqueje nuevamente R, grafique una franja representativa de la región dispuesta verticalmente, realice la respectiva rotación de la franja representativa, especifique la diferencial de volumen; y, calcule el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor de la recta $y = 0$.

42. (8 PUNTOS) Sea R la región del plano definida por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, (ln(x) \geq y) \wedge (1 \leq x \leq e) \wedge (y \geq 0)\}$$

(a) Realice el bosquejo de R.
(b) Grafique una franja representativa de la región, especifique la diferencial de área y calcule el área de la región.
(c) Bosqueje nuevamente R, grafique una franja representativa de la región dispuesta horizontalmente, realice la respectiva rotación de la franja representativa, especifique la diferencial de volumen; y, calcule el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor de la recta $x = e$.

43. (8 PUNTOS) Sea R la región del plano definida por:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, (\, sen(2x) \geq y \,) \wedge \left(\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \wedge (\, y \geq cos(x)\,)\right\}$$

(a) Realice el bosquejo de R.
(b) Grafique una franja representativa de la región, especifique la diferencial de área y calcule el área de la región.
(c) Bosqueje nuevamente R, grafique una franja representativa de la región dispuesta verticalmente, realice la respectiva rotación de la franja representativa, especifique la diferencial de volumen; y, plantee (pero no evalúe) la integral para calcular el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor de la recta $x = \frac{\pi}{2}$.

44. (8 PUNTOS) Sea R la región del plano definida por:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left(tan(x) \geq y \right) \wedge \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right) \wedge \left(y \geq 0 \right) \right\}$$

(a) Realice el bosquejo de R.
(b) Grafique una franja representativa de la región, especifique la diferencial de área y calcule el área de la región.
(c) Bosqueje nuevamente R, grafique una franja representativa de la región dispuesta horizontalmente, realice la respectiva rotación de la franja representativa, especifique la diferencial de volumen; y, plantee (pero no evalúe) la integral para calcular el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor de la recta $y = 0$.

45. (8 PUNTOS) Sea R la región del plano definida por:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left(sec^2(x) \geq y \right) \wedge \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right) \wedge \left(y \geq \frac{1}{2} \right) \right\}$$

(a) Realice el bosquejo de R.
(b) Grafique una franja representativa de la región, especifique la diferencial de área y calcule el área de la región.
(c) Bosqueje nuevamente R, grafique una franja representativa de la región dispuesta verticalmente, realice la respectiva rotación de la franja representativa, especifique la diferencial de volumen; y, plantee (pero no evalúe) la integral para calcular el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor de la recta $x = \frac{\pi}{4}$.