**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES Docentes: **Elvis Aponte**– Fecha: 21 de abril de 2025. Horario: 09:00 – 11:00

## PAUTA DE CORRECCIÓN Y RÚBRICAS EXAMEN FINAL PAE

**Tema 1(20 puntos)**

**Tema 1.** En un equipo de exploradores en busca de una pista para hallar un tesoro, se encuentran con un mapa, pero solo tiene dibujado sobre la cima de una montaña la ecuación $F(x, y) = \ln(\cos^2(x) + 1) + \ln(sen(y) + 2)$ junto a un emoji (O.O)^2. Uno de ellos comenta "vaya pista, que nos sentemos a echar un ojo al comportamiento de la función, jajá como si tuviéramos calculadora". Pero entre ellos, el graduado de la E.S.P.O.L. indica, la pista es clara, solo hay que sacar el polinomio de Taylor en el origen, y el 2 señala que debe ser de grado 2 y de este polinomio obtener un punto máximo. Es claro, verdad. ¿Cuál es el punto mencionado?

**Solución.** Procedemos a obtener las derivadas parciales de primer y segundo orden y las evaluamos en el punto $(0, 0)$. Note que $F(0, 0) = 0$.

$$F_x(x, y) = \frac{-2\cos(x)sen(x)}{cos^2(x) + 1} \to F_x(0, 0) = 0.$$

$$F_y(x, y) = \frac{cos(y)}{sen(y) + 2} \to F_y(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

$$F_{yx} = F_{xy} = 0.$$

$$F_{yy} = \frac{-sen(y)(sen(y)+2) - cos^2(y)}{(sen(y)+2)\text{^}2} \to F_{yy}(0, 0) = -\frac{1}{4}.$$

$$F_{xx} = 2\frac{(sen^2(x) - cos^2(yx))(cos^2(x) + 1)}{(cos^2(x) + 1)\text{^}2} \to F_{xx}(0, 0) = -1.$$

Así, siguiendo la fórmula del polinomio de Taylor de grado 2. Obtenemos:

$$T(x, y) = 2\ln(2) + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\left(-x^2 - \frac{1}{4}y^2\right).$$

Obtenemos así los puntos críticos de este polinomio.

$T_x = 0$ si $x = 0$. Por otra parte $T_y = 0$ si $y = 2$. Entonces el punto crítico es $(0, 2)$. Pero la matriz Hessiana es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Así $(0, 2)$ es un P.C. Máximo.

Rúbrica

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de una función de dos variables. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante atiende el enunciado del tema, obtiene las derivadas de primer y segundo orden con respecto a las variables x e y. | El estudiante evalúa todas las derivadas (hasta orden 2) parciales en el origen. | El estudiante plantea la ecuación del polinomio de Taylor de grado 2. | El estudiante obtiene del polinomio Taylor su punto silla y así emite una conclusión. |
| | 5 | 6 | 13 | 20 |

**Tema 2. (15) pts.** Una empresa puede elaborar sus productos en dos de sus plantas. El costo de producir $x$ unidades en su primera planta y $y$ unidades en la segunda planta está dado por la función conjunta de costo $C(x,y) = -\frac{x^3}{3} - y^3 + xy + 700$. Si la empresa tiene una orden de suministrar 10 unidades, ¿Cuántas unidades debe producir en cada planta con el objetivo de minimizar el costo total?

**Solución.**

Se debe resolver el sistema: $f_x = -x^2 + y = -3y^2 + x = f_y; x + y = 10$. Y la solución positiva es

$(10 - \frac{11-\sqrt{341}}{-2}, \frac{11-\sqrt{341}}{-2})$.

| Capacidades deseadas | Desempeño literal | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Inicial | En Desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| El estudiante debe saber plantear y resolver problemas de optimización de funciones escalares sujeta a restricciones. | El estudiante No sabe cómo plantear el problema. Pero se da cuenta que es por el teorema de Lagrange. | Identifica la función objetivo y las restricciones. O Plantea la función Lagrangeana. | Optimiza la función Lagrangiana, resuelve el sistema de ecuaciones, pero comete errores. Pero si resuelve. | El estudiante justifica adecuadamente en cuanto al punto silla. |
| | 1 | 8 | 10 | 15 |

**Tema 3 (15 puntos)** Calcular la integral $\iint_\Omega \frac{y^3 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^{12}}$. Donde $\Omega$ es la región delimitada por las curvas $y = 4x^4,\ y = 7x^4,\ y = 2x^9, y = 8x^9$.

**Solución**

El cambio adecuado es $u = \frac{x^4}{y}, v = \frac{x^9}{y}$.

Se tiene

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{5x^{12}}{y^3}.$$

Entonces, aplicando la sustitución queda:

$$\iint_\Omega \frac{y^3 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^{12}} = \int_{1/7}^{1/4} \int_{1/8}^{1/2} \frac{1}{5u^6} \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 1/5(\frac{1}{4} - \frac{1}{7})(-\frac{1}{5})(2^5 - 8^5)$$

**Rúbrica**

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| El estudiante es capaz de aplicar integrales dobles para el cálculo de áreas de una región utilizando cambios de variable. | El estudiante trata de dibujar la región, pero comete errores | El estudiante hace un gráfico de la región y aplica correctamente el cambio de variable encontrando la nueva región de integración. | El estudiante calcula correctamente el jacobiano del cambio de variable y reemplaza correctamente en la integral. | El estudiante calcula la integral correctamente llegando al valor requerido. |
| | 2. | 5 | 10 | 15 |

**Tema 4 (15 puntos)**

Evaluar la integral de línea utilizando el Teorema de Green asumiendo que se cumplen las hipótesis del teorema. $\oint_C (3x\ln(8x^9+2) - x\mathrm{e}^{\mathrm{y}})dx + (2y\ln(y) + \mathrm{y}x^2)dy$, donde C es el contorno de un rectángulo con vértices en $(0,0), (7,0), (7,7), (0,7)$.

Solución

Las funciones componentes

$$M(x,y) = 3x\ln(8x^9+2) - x\mathrm{e}^{\mathrm{y}}$$
$$N(x,y) = 2y\ln(y) + \mathrm{y}x^2$$

implica que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x\mathrm{e}^{\mathrm{y}}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

Según el Teorema de Green:

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Sustituyendo las derivadas parciales:

$$\oint_C (3x - ydx + (2y + x^2)dy) = \iint_R \,(2xy + x\mathrm{e}^{\mathrm{y}})dA$$

La región R es el rectángulo con x desde 0 hasta 7 y y desde 0 hasta 7.

$\iint_R (2xy + x\mathrm{e}^{\mathrm{y}})dA = \int_0^7 \int_0^7 (2xy + x\mathrm{e}^{\mathrm{y}})dydx = 2\left(\frac{49}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}(\mathrm{e}^7 - 1).$

RUBRICA

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante aplica el teorema de Green a campos bidimensionales | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante menciona, pero no escribe ni esboza el teorema de Green. | El estudiante plantea que debe usar Green y verifica la hipótesis del teorema correctamente. | El estudiante aplica el Teorema correctamente pero no calcula la integral doble que corresponde al teorema. | El estudiante resuelve la integral doble correctamente, y concluye. |
| | 1 | 3 | 16 | 20 |

**Tema 5 (15 puntos)**

Con integrales triples determine el valor del volumen de la superficie acotada por:

$x = \frac{\pi}{2}\sqrt{y},\ y = sen(x), z = 0, x = z.$

Solución. La región de integración es haciendo $z = 0$:

$$R = \left\{(x, y, z) \in R^3 / \quad 0 \leq \mathrm{x} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{4}{\pi^2}x^2 \leq \mathrm{y} \leq sen(x), \quad 0 \leq \mathrm{z} \leq x\right\}$$

Luego la integral a resolver es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{4}{\pi^2}x^2}^{sen(x)} \int_0^x dzdxdy = 1 - \frac{1}{16}\pi^2.$$

**RUBRICA**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe obtener la integral triple. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante atendiendo el enunciado se da cuenta de la región de integración. | El estudiante plantea la integral que da repuesta al tema. | El estudiante resuelve parcialmente la integral triple. | El estudiante resuelve la integral en su totalidad y emite una conclusión. |
| | 7 | 11 | 14 | 15 |

**Tema 6 (20 puntos)**

Plantear la integral que da el volumen dentro de la esfera $0 = 16 - x^2 - y^2 - z^2$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que estan en el primer octante.

Solución. La region de integración es encontrada haciendo $x = 0$:
$R = \left\{(x, y, z) \in R^3 / \quad 0 \leq y \leq \sqrt{8}, \quad y \leq z \leq \sqrt{16 - y^2}\,, \ \sqrt{-y^2 + z^2} \leq x \leq \sqrt{16 - y^2 - z^2}\right\}$

Luego la integral a resolver es:

$$\int_0^{\sqrt{8}} \int_y^{\sqrt{16-y^2}} \int_{\sqrt{-y^2+z^2}}^{\sqrt{16-y^2-z^2}} dxdzdy.$$

**RUBRICA**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe obtener la integral triple que da el volumen de una región. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante atendiendo el enunciado se da cuenta de que la región de integración se obtiene haciendo a x o y igual a cero. | El estudiante plantea la integral de dos variables que corresponde a la repuesta al tema. | El estudiante acota la tercera variable de acuerdo con el enunciado del tema, considerando todo en el primer octante. | El estudiante plantea en su totalidad la integral pedida. |
| | 10 | 16 | 19 | 20 |