

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL



**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**PROYECTO DE GRADUACIÓN
PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN
CON MENCIÓN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

TEMA

**“MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA
APLICACIÓN EN LA PRUEBA DE RAZONAMIENTO NUMÉRI-
COS EN LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO”**

Autor:

JUAN CARLOS GRANDA ORELLANA

GUAYAQUIL - ECUADOR

AÑO

2017

DEDICATORIA

El trabajo realizado está dedicado a JEHOVÁ, familia y profesores pero en especial a mi director Dr. Johni Bustamante.

AGRADECIMIENTO

A Jehová por apoyarme siempre en él, mi esposa Laura , mi madre Zoila, mis hijos Ariana y Carlos, tíos y autoridades que me ayudaron e hicieron posible la culminación de este trabajo.

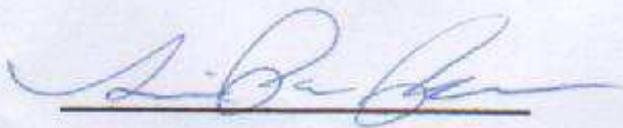
DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en este Proyecto de Graduación, me corresponde exclusivamente; el patrimonio intelectual del mismo, corresponde exclusivamente a la **Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, Departamento de Matemáticas** de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.



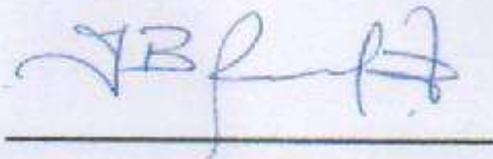
Juan Carlos Granda Orellana

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN



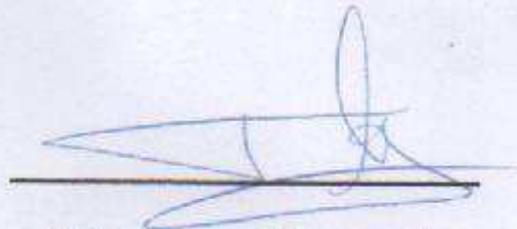
MED. Paola Reyes Ramos

PRESIDENTE DEL TRIBUNAL



Ph.D. Edgar Johni Bustamante

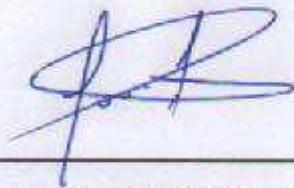
DIRECTOR DEL PROYECTO



M.Sc. Soraya Solís García

VOCAL DEL TRIBUNAL

AUTOR



JUAN CARLOS GRANDA ORELLANA

TABLA DE CONTENIDOS

DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTO	iii
DECLARACIÓN EXPRESA	iv
TRIBUNAL DE GRADUACIÓN	v
AUTOR	vi
TABLA DE CONTENIDOS	vii
CONTENIDO DE FIGURAS.....	ix
CONTENIDO DE TABLAS.....	x
CONTENIDO DE ABREVIATURAS	xi
OBJETIVOS.....	xii
OBJETIVO GENERAL	xii
OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	xii
INTRODUCCIÓN	xiii
CAPÍTULO I.....	1
EL PROBLEMA.....	1
1.1 Formulación del problema	1
1.2 Hipótesis de investigación	1
CAPÍTULO II	2
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EXÁMEN ENES	2
2.1 Tipos de problemas	2
2.1.1 Problemas de Razonamiento	2
2.1.2 Problemas con operaciones matemáticas	3
2.1.3 Regla de tres simple.....	3
2.1.4 Regla de tres conjunta.....	5
2.1.5 Reducción a la unidad.....	6
2.1.6 Fracciones.....	6
2.1.7 Problemas de las edades.....	7
2.1.8 Ecuaciones.....	8
2.1.9 Promedios.....	9
2.1.10 Geometría I.....	10
2.1.11 Geometría II.....	11

2.1.12 Velocidades.....	13
2.1.13 Porcentajes.....	14
2.2 Examen Enes.....	15
CAPÍTULO III	17
MARCO TEÓRICO	17
3.1 Educación y resolución de problemas. Antecedentes	17
3.2 Teóricos reconocidos en la resolución de problemas.....	18
3.3 Componentes básicos en el examen ENES	21
3.4 Factores psicológicos que inciden en el rendimiento académico	24
3.5 Aspectos Cognitivos	24
3.6 Estadística Nacional	25
CAPÍTULO IV.....	27
METODOLOGÍA	27
4.1 Identificación de la población y muestra.....	27
4.2 Descripción de los instrumentos.....	27
4.3 Descripción del procedimiento.....	28
4.4 Procesamiento y análisis de datos	28
4.5 Estadísticos descriptivos	29
4.6 Diagrama de cajas.....	30
4.7 Prueba t pareada para media de las diferencias	31
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	32
BIBLIOGRAFÍA.....	34
ANEXOS.....	36

CONTENIDO DE FIGURAS

Figura 1. Esquema de un Problema con operaciones matemáticas.....	3
Figura 2. Esquema de un Problema con operaciones matemáticas.....	8
Figura 3. Esquema de un Problema de Geometría I	10
Figura 4. Esquema de un Problema de Geometría para verificar resultados	11
Figura 5. Esquema de un Problema de Geometría II	12
Figura 6. Esquema de un Problema de Velocidades.....	13
Figura 7. Estadísticos Descriptivos Pre-test y Post-test	29
Figura 8. Diagrama de Cajas Pre-test y Post-test	30
Figura 9. Prueba T pareada para media de la diferencia	31

CONTENIDO DE TABLAS

Tabla 1. Esquema de un Problema con edades.....	7
Tabla 2. Ejemplos de traducción Lenguaje normal y Lenguaje algebraico	22
Tabla 3. Ejemplo de traducción entre el lenguaje sencillo y formal con representación numérica	22
Tabla 4. Resultado calificaciones Pre-test y Post-test.....	29

CONTENIDO DE ABREVIATURAS

ENES	Examen Nacional para la Educación Superior
EXADEP	Examen de Admisión a Estudios de Posgrado
INEVAL	Instituto Nacional de Evaluación Educativa
RAE	Real Academia Española
SENESCYT	Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

- Aplicar el Método de Resolución de Problemas en estudiantes de tercero de bachillerato como un medio progresivo, didáctico y efectivo, que mejore cuantitativamente su desempeño en la prueba ENES.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Demostrar que el método de resolución de problemas facilita la comprensión de los temas de razonamiento numérico.
- Desarrollar el pensamiento lógico y creativo en los temas relacionados con el razonamiento numérico.
- Diseñar un módulo de aprendizaje progresivo y proponer un curso de aprendizaje de los temas.
- Analizar las pruebas de entrada y salida y verificar resultados cuantitativos.

INTRODUCCIÓN

En este mundo académico, globalizado y lleno de metas, los estudiantes de bachillerato en el Ecuador se enfrentan a una situación intimidante y nada fácil de resolver el Examen Nacional para la Educación Superior (ENES). La prueba ENES se ha convertido en un verdadero reto para los estudiantes de tercero de bachillerato que aspiran obtener un cupo para ser admitidos en la Universidad.

Ante esta problemática urge encontrar un mecanismo de aprendizaje integral, natural y progresivo de los temas matemáticos presentes en dicha prueba, específicamente en el tema numérico. Cabe destacar que la problemática no solo se enfoca al docente y estudiante de tercero de bachillerato, si no al desconocimiento general del estudiante en los principios lógicos que rigen la dinámica de los temas numéricos desde su formación primaria y secundaria.

La metodología que se pretende aplicar radica en la resolución de problemas, la cual deberá generar en el estudiante confianza y aplomo. Esta resolución de problemas debe ser progresiva y en lenguaje sencillo. De esta manera el estudiante se verá identificado con las temáticas a tratar. El trato directo con ejercicios modelo generará confianza y seguridad.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

El aprendizaje progresivo de los temas de razonamiento lógico, utilizando lenguaje sencillo es de suma importancia en el aprendizaje integral de estos temas. En Ecuador y en muchos países de habla hispana, el razonar matemáticamente se ha convertido en un dilema. Algunas instituciones se esfuerzan por mejorar la situación, pero en su mayor parte sigue la problemática. A nivel latinoamericano se ha priorizado durante mucho tiempo la mecanización de la matemática, y ese paradigma se ha reflejado en alumnos “fuertes en álgebra” y expertos en “lógica formal”. Este proyecto tiene por objetivo presentar la Resolución de Problemas como una herramienta eficaz que permita interiorizar el razonamiento matemático en los estudiantes. El fundamento estadístico apunta una mejora cuantitativa en estudiantes que al rendir por primera vez la prueba ENES quedaron insatisfechos con su puntuación, luego del proceso de capacitación, se presentan por segunda ocasión a la prueba oficial del ENES.

1.1 Formulación del problema

¿Qué efecto tendrá la correcta aplicación de la metodología basada en Resolución de Problemas en el rendimiento académico de los estudiantes de tercero de bachillerato en lo concerniente a la prueba ENES?

1.2 Hipótesis de investigación

La aplicación de la metodología basada en Resolución de Problemas como una estrategia didáctica de enseñanza efectiva y utilizando lenguaje sencillo en estudiantes de tercero de bachillerato permite mejorar cuantitativamente su rendimiento académico.

CAPÍTULO II

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EXÁMEN ENES

2.1 Tipos de problemas

2.1.1 Problemas de Razonamiento

Los problemas de razonamiento, son aquellos problemas en los que no se requieren muchas bases matemáticas, entiéndase algebra o aritmética intermedia. Sánchez (s.f) concluye: “Son aquellas preguntas donde nos dan cierta información, y luego aplicando la deducción, tenemos que llegar a la conclusión; esta conclusión debe guardar o cumplir estrictamente un orden o configuración exacta” (p.53). Se puede concluir que el estudiante debe familiarizarse con ciertos esquemas, los cuales no necesariamente necesitan argumentos sólidos matemáticos.

Los problemas de razonamiento lógico suelen ser la “gran muralla” a la que se enfrentan docentes y estudiantes. El docente matemático ecuatoriano en su gran mayoría ha mecanizado procesos, tal vez esta sea parte del problema la falta de material especializado. Editorial Santillana ha desarrollado material para docentes, los cuales son una ayuda útil pero no suficiente; en cuanto a Razonamiento lógico publicaron una obra que le dan un espacio interesante al Razonamiento. Podemos destacar: Test de decisiones, Orden de información, Orden de información circular, Relación de parentesco, Método del cangrejo, Método de las equivalencias, Pensamiento lateral.

Existe además otra problemática, la cual es menos evidente. Los docentes no son adecuadamente preparados por el gobierno, dicho en otras palabras se enseña teoría y se toma en forma práctica. Santillana (2009) afirma: “En la actualidad, las propuestas educativas de capacitación deben ser revisadas. La educación enfrenta el desafío de responder de una manera innovadora a la demanda creciente de formación solicitada por los docentes”(p.3). Se ve claramente que hay que invertir tiempo y dinero y no todo docente necesariamente es un autodidacta. En definitiva los problemas de razonamiento son un “hueso duro de roer” para docentes y por ende para los estudiantes.

2.1.2 Problemas con operaciones matemáticas

Se puede argumentar, que en este tipo de operaciones se tiene que ser muy hábil a la hora de aplicar las operaciones básicas ya que estas no son tan evidentes. APOL (s.f) nos presenta el siguiente problema: “En cierto lugar el 1 de enero el sol sale a las 7h33 y se pone a las 17h15 ¿Cuál es la duración del día?” (p.66). Es evidente que el procedimiento básico consiste en hacer un gráfico tentativo, luego ordenar y sumar las horas, todo se reduce a una suma. Si un alumno no está acostumbrado este tipo de problemas, simplemente “quedará en el aire” o perderá tiempo valioso. El estudiante muchas veces, ni siquiera intenta hacer un algoritmo o esquema. En este tipo de problema ayudaría la siguiente gráfica:

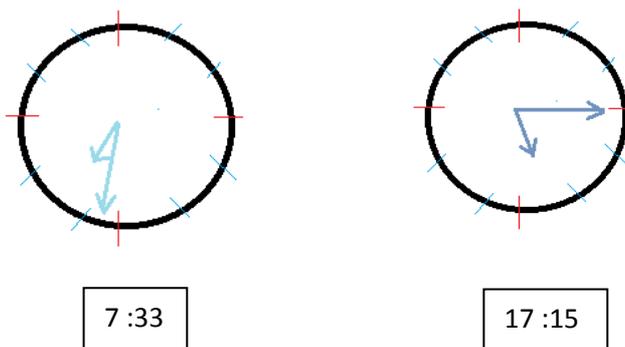


Figura 1. Esquema de un Problema con operaciones matemáticas

Queda claro el hecho de que, una gráfica puede ilustrar magníficamente un problema de esta naturaleza. Se puede ver el desarrollo completo en el anexo 1.

2.1.3 Regla de tres simple

La **regla de tres simple** puede ser directa o inversa, dependiendo de la naturaleza de las magnitudes en que se fundamente el problema; las magnitudes pueden ser directamente o inversamente proporcionales. Para la regla de tres simple se puede razonar con el alumno que son magnitudes que aumentan o disminuyen en forma proporcionada.

Santillana (2013) nos presenta el siguiente problema: “Una empresa puede construir 110 metros cuadrados de carretera al día con 3 máquinas. Si desea aumentar a 440 metros cuadrados la cantidad diaria a construir, ¿Cuántas máquinas necesitará?” (p.90). En este caso podemos razonar que si necesitamos hacer más carretera, necesitamos más máquinas. Esta magnitud es directa, además podemos hacer el siguiente esquema:

110 m	-----	3 máquinas
440 m	-----	X

Luego, como indican los protocolos de la regla de tres, multiplicamos en forma cruzada y dividimos para la magnitud restante:

$$X = \frac{3 \text{ máquinas (440 m)}}{110 \text{ m}} = 12 \text{ máquinas}$$

La **regla de tres inversa** plantea otra perspectiva, pues a diferencia de la directa, mientras una magnitud aumenta la otra disminuye. Galdós (2003) nos ofrece el siguiente problema: “Un grupo de 9 obreros puede hacer una obra en 6 días. ¿Cuántos obreros se necesitarán para hacer la misma obra en 3 días?”(p.203). Aquí podemos razonar que habiendo más obreros se necesitarán menos días, además podemos hacer un esquema:

9 obreros	-----	6 días
X	-----	3 días

En la regla de tres inversa se multiplica en forma horizontal y se divide para la magnitud restante:

$$X = \frac{9 \text{ obreros (6 días)}}{3 \text{ días}} = 18 \text{ obreros}$$

Es importante trabajar transversalmente la regla de tres, ya que esta se ve siempre en las pruebas del Senescyt.

2.1.4 Regla de tres conjunta.

La regla de tres conjunta presenta otros desafíos. Existe el método práctico, nos facilita la mecánica de las multiplicaciones. Galdós (2003), lo ilustra con el siguiente ejercicio modelo: “ Si 5 hombres trabajando 6 horas diarias han abierto una zanja de 40 metros en 8 días, ¿cuántos días necesitarán 9 hombres trabajando 8 horas diarias para abrir una zanja de 60 metros?” (p.203). Galdós nos propone un esquema con signos. La estrategia, es comparar las variables conocidas con la desconocida por separado, si la proporción es directa, se coloca el signo **+** en forma cruzada con la variable principal; si la proporción es inversa se coloca el **+** en forma horizontal. Se lo puede graficar del siguiente modo:

		-	-	-	-	
		+	+			+
Supuesto	5 hombres	6 horas diarias	40 metros	8 días		
Pregunta	9 hombres	8 horas diarias	60 metros	X		
		-	-		+	

Luego desarrollamos la fracción. Multiplicamos los positivos en el numerador y los negativos en el denominador:

$$X = \frac{8 \times 60 \times 6 \times 5}{40 \times 8 \times 9} = 5 \text{ días}$$

Nos damos cuenta de lo efectivo y sencillo de aplicar el método de signos.

2.1.5 Reducción a la unidad.

Este tipo de ejercicios requieren de un razonamiento adicional al de proporciones y por lo general debemos tratar de completar la unidad. Apol (s.f) nos presenta: “Julio puede pintar una pared en 4 horas. Juan Puede pintar la misma en 6 horas. ¿En cuánto tiempo, trabajando juntos, podrían pintar esa pared?”(p.68). Podemos hacer la siguiente cadena de razonamientos:

- Si Julio pinta una pared en 4 horas en 1 hora pintará $\frac{1}{4}$ pared.
- Juan pinta una pared en 6 horas en 1 hora pintará $\frac{1}{6}$ pared.
- Se supone que en una hora los dos juntos pintarán $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$

Esta fracción $\frac{5}{12}$ significa que en una hora, las dos personas trabajando juntos pueden hacer los cinco doceavos de la obra. Ahora para calcular el tiempo podemos recurrir a la regla

d
a

$\frac{5}{12}$ obra 1 hora
1 obra X hora

$$X = \frac{1(1)}{\frac{5}{12}} = 2,4 \text{ horas}$$

es de la siguiente forma:

Claramente se percibe la relación con la regla de tres.

2.1.6 Fracciones.

Este tema, realmente es una piedra de tropiezo para la generalidad de estudiantes, los cuales no recuerdan nada de su procedimiento básico. Es de acotar que este tema es integrador ya que en la mayoría de temas de razonamiento numérico se hace alusión directa o indirecta a las mismas. El alumno que maneje correctamente este tema logrará destrezas importantes. Santillana (2013) nos ofrece: “Gasté los $\frac{3}{5}$ de mi dinero, es decir, \$600. ¿Cuánto tenía inicialmente?” (p.20. Tomo 6). Este tipo de ejercicio resulta fácil si se está familiarizado con el uso de

fracciones, pero puede complicar el trabajo con el alumno promedio. Se puede razonar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{5} \text{ dinero} \quad \dots\dots\dots \$ 600 \\ 1 \text{ dinero total} \quad \dots\dots\dots X \end{array} \qquad X = \frac{1(600)}{\frac{3}{5}} = 1000$$

2.1.7 Problemas de las edades.

El problema de las edades requiere ya un tratamiento básico algebraico, la diversidad bibliográfica propone métodos directos, pero el tratamiento con estudiantes con un escaso conocimiento de las matemáticas, nos conlleva a buscar la manera más didáctica de presentar este tema. Santillana (2009) propone: “Dora tiene el triplo de la edad de Liliana. Hace 5 años, la edad de Dora era cinco veces la edad de Liliana. ¿Qué edad tiene actualmente cada una?”(p.20). Esta editorial propone una interesante tabla de doble entrada y el proceso de solución:

Tabla 1. Esquema de un Problema con edades

	EDAD HACE 5 AÑOS	EDAD ACTUAL
DORA	3X - 5	3X
LILIANA	X - 5	X

Plantear la ecuación y hallar la edad de Liliana:

$$\begin{array}{l} 3x - 5 = 5(x - 5) \\ 3x - 5 = 5x - 25 \\ 20 = 2x \\ x = 10 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3x - 5 = 5(x - 5) \\ 3x - 5 = 5x - 25 \\ 20 = 2x \\ x = 10 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Hace 5 años la edad de} \\ \text{Dora era cinco veces la} \end{array}$$

La edad actual de Liliana es 10 años y la de Dora es 30 años. Se puede apreciar la manera didáctica como se plantea este problema. Es necesario pues, que el maestro “explore” la bibliografía, que ¡si la hay!

Y que se plantee nuevos paradigmas en la enseñanza. Santillana plantea infinidad de planteamientos pedagógicos para los temas de razonamiento numérico.

2.1.8 Ecuaciones.

Se puede razonar que, el tema de ecuaciones es medular en la mayoría de los temas de razonamiento numérico. Este tema, debe ser tomado en cuenta como eje transversal en los tres años de bachillerato, trabajándolo en forma progresiva. Es de destacar que en la mayoría de libros de álgebra se encuentra esta temática. Podemos rescatar en este aspecto el libro de álgebra de Baldor para estos propósitos ya que, en diferentes capítulos, trata el tema de las ecuaciones de una manera completa; desde las ecuaciones verbales sencillas, hasta las ecuaciones fraccionarias con 2 o más variables. El alumno de tercero de bachillerato debe dominar este tema y por ende el docente. El gran problema con el libro de Baldor, es creer que basta este libro para que el estudiante domine la matemática de bachillerato. Se recalca que para este tema es medular.

El tratamiento de las ecuaciones se lo debe hacer razonado y paso a paso. Baldor (2012. Tomo 3) nos ofrece el siguiente ejercicio modelo y su procedimiento: “La suma de la tercera y la cuarta parte de un número equivale al doble del número disminuido en 17. Hallar el número” (p.246).

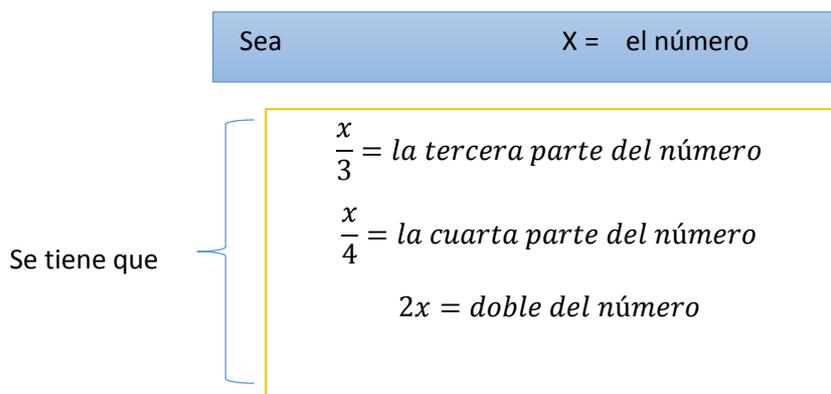


Figura 2. Esquema de un Problema con operaciones matemáticas

De acuerdo con las condiciones del problema, tendremos la ecuación:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2x - 17$$

Resolviendo:

$$4x + 3x = 24x - 204$$

$$4x + 3x - 24x = 204$$

$$-17x = -204$$

$$x = \frac{204}{17} = 12$$

Baldor ofrece para el tema de ecuaciones un formato clásico, directo y amplio. Se reduda en el criterio de que los estudiantes de bachillerato y sus docentes adapten el tema a su currículo de estudio.

2.1.9 Promedios.

El tema de promedios es un tema que se podría plantear de “menor nivel”, dado que tiene un algoritmo fijo y no presenta mayores dificultades. Es recomendable reconocerlo pues, de lo contrario se perdería valioso tiempo, a saber que normalmente la prueba da un minuto por pregunta. El siguiente problema ilustra de la mejor manera la esencia de este tema. APOL (s.f) propone:

En el colegio, para pasar de año debe tener un promedio superior o igual a 18 en el semestre. Si Juan tiene las siguientes notas: 1era:20, 2da:15, 3ra:20, 4ta:20. Si el total de notas son cinco. ¿Cuál debería ser la nota mínima que tiene que sacar Juan en la 5ta nota si es que quiere pasar de año? (p.72)

Para este ejercicio planteamos el siguiente algoritmo:

$$\frac{20 + 15 + 20 + 20 + x}{5} = 18$$

Y la resolución plantea álgebra básica:

$$75 + x = 18 (5)$$

$$x = 90 - 75$$

$$x = 15$$

Queda patente el hecho que, algoritmos sencillos son de gran ayuda.

2.1.10 Geometría I

La geometría, es uno de los temas que se los ve como los más complejos. Es notable que este tema prácticamente pasa inadvertido en la mayoría de currículos, el “pretexto” ideal, es que la geometría ocupa los últimos capítulos de los textos regulares. Es lamentable, que esta “comodidad” genere problemas posteriores en los cursos preuniversitarios. En la geometría uno, se plantean razonamientos básicos en su fundamento algebraico. La geometría de educación general básica es el fundamento de este tema. Se sigue recalcando, el hecho de que el maestro erudito debe retomar estos temas “pasados” e integrarlos a los cursos de bachillerato. Hay ejercicios en geometría que son integradores. (Apol, s.f) nos presenta el siguiente problema: “Un terreno rectangular tiene de ancho 5m menos que de largo y su perímetro es de 45m. ¿Sus dimensiones son?”(p.72). Aquí el estudiante debe plantearse un esquema o gráfica que posibilite ubicar las variables en forma coherente, por ejemplo:

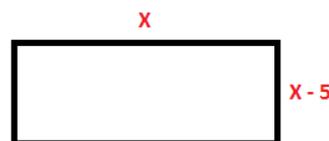


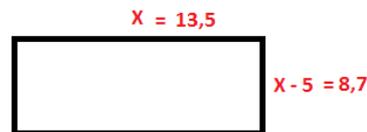
Figura 3. Esquema de un Problema de Geometría I

Este instante, es interesante ya que, se complementa el álgebra básica con la geometría básica. El problema, también plantea un concepto: perímetro.

Se nota pues el carácter integrador de la geometría básica. Queda finalmente resolver algebraicamente el problema.

$$\begin{aligned}x + x + x - 5 + x - 5 &= 45 \\4x - 10 &= 45 \\4x &= 45 + 10 \\4x &= 55 \\x &= 13,7\end{aligned}$$

Es interesante, el hecho de poder verificar resultados:



$X = 13,5$
 $X - 5 = 8,7$

Figura 4. Esquema de un Problema de Geometría para verificar resultados

Para efectos de este ejercicio, sumando los datos, la respuesta es ninguna de las anteriores. Este modelo básico es solo un ejemplo de que la geometría debe plantearse como eje transversal en los cursos de bachillerato.

2.1.11 Geometría II

Se propone la geometría dos como una geometría más especializada, donde hay que aplicar conceptos pitagóricos e integrarlos en una red algebraica concreta. Se puede apreciar a la geometría dos como integradora de conocimientos trigonométricos y algebraicos. Es común encontrar esta tipología de problemas en test de carácter internacional como el EXADEP. La academia de ciencias exactas APOL en su manual de aprendizaje propone cien problemas de geometría, un verdadero reto para docentes y estudiantes. APOL (s.f) propone: “Hallar el área de un hexágono inscrito en una circunferencia de 4 cm. de radio” (p.97). Esta simple línea propone retos interesantes, veamos un proceso de solución:

Primero graficamos el hexágono regular y su relación pitagórica

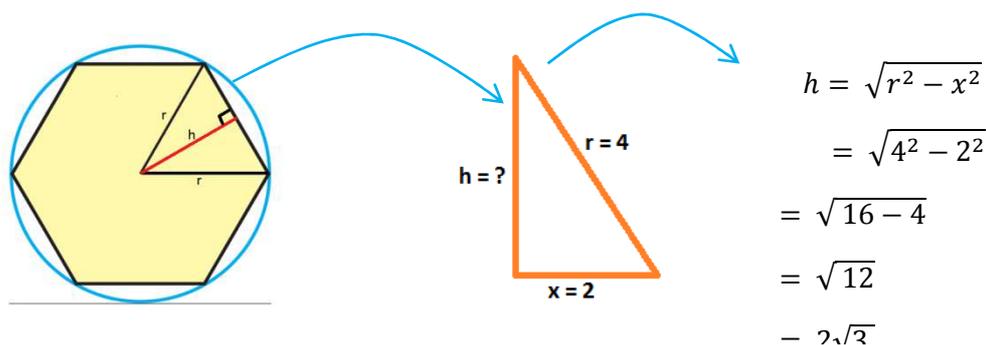
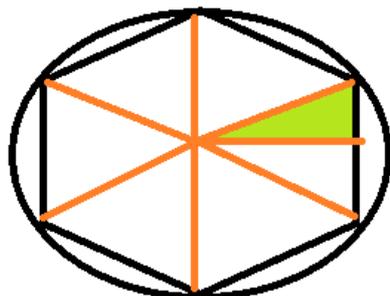


Figura 5. Esquema de un Problema de Geometría II

Luego, encontramos el área de este triángulo o de este sector: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2(2\sqrt{3})}{2} = 2\sqrt{3}$. Pero aquí surge otro análisis sobre el área del hexágono, pues solo se ha escogido un triángulo, no la totalidad del área.



Este triángulo es: $2\sqrt{3}$

Al razonar en el gráfico, nos damos cuenta que la respuesta sale en forma natural multiplicado por 12. Es decir $12(2\sqrt{3}) = 24\sqrt{3}$. La ventaja o la “grandeza” de la geometría estriba en el hecho de que, se puede plantear

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) 6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}(4)^2\right) 6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}(16)\right) 6 = (\sqrt{3}(4)) 6 = 24\sqrt{3}$$

de diferentes maneras un ejercicio. Veamos otra forma:

Este proceso, se basa en una propiedad del triángulo equilátero:

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ representa el área del triángulo, a es la longitud de un lado del triángulo. Se puede apreciar pues lo maleable de la geometría.

2.1.12 Velocidades.

El problema de las velocidades, plantea desafíos a un alumno promedio y el docente debería saberlo a plenitud. Estos ejercicios se asemejan a ciertos esquemas básicos de física. El siguiente problema modelo, permite observar los cuidados a tener en cuenta. APOL (s.f) propone: “Dos autos salen de dos ciudades A y B distantes entre sí 840 Km, para encontrarse. El de A va a 50 km/h. y el de B a 70Km/h. Si salieron a las 6 am, ¿a qué hora se encontrarán?” (p.73). Este ejercicio puede plantearse con un esquema sencillo aplicando los datos por separado y luego enlazarlos, de la siguiente manera:

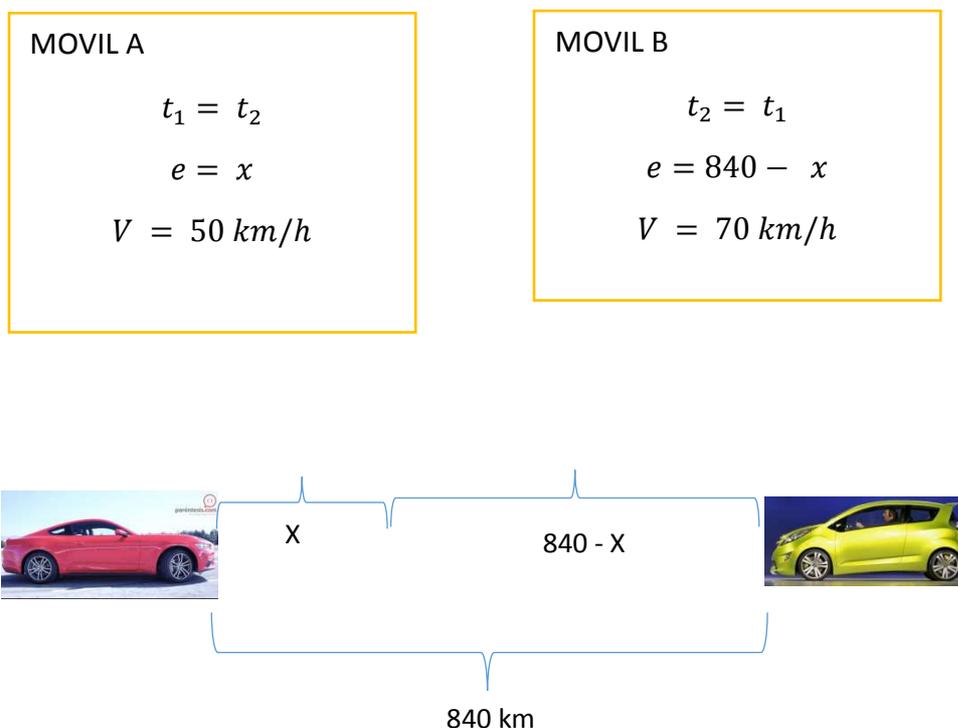


Figura 6. Esquema de un Problema de Velocidades

Luego Planteamos el sistema de ecuaciones:

MOVIL A

$$t_1 = \frac{e_1}{v_1}$$

MOVIL B

$$t_2 = \frac{e_2}{v_2}$$

Iguamos las ecuaciones y desarrollamos el problema:

$$\frac{e_1}{v_1} = \frac{e_2}{v_2}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{840 - x}{70}$$

$$70x = 50(840 - x)$$

$$70x = 42000 - 50x$$

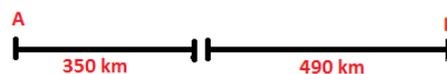
$$70x + 50x = 42000$$

$$120x = 42000$$

$$x = \frac{4200}{12}$$

$$x = 350$$

Con este dato ($x=350$), podemos notar que:



Finalmente:

$$t_1 = \frac{e_1}{v_1}$$

$$t_1 = \frac{350}{50}$$

$$t_1 = 7 \text{ horas}$$

Sisalieron a las 6 am más 7 horas nos da las 13h00, es decir que a esta hora se encontraron. Vemos que este tipo de problemas son integradores.

2.1.13 Porcentajes.

El tema de porcentaje se lo ve presente en muchas situaciones de la vida diaria, el docente puede llegar a desarrollar muy bien este tema, si lo presenta continuamente. A continuación un problema corto, pero requiere un análisis directo y preciso, hay que recalcar que así como este algoritmo sencillo, muchos temas de razonamiento numérico no son complejos y ayudarían a resolver muchos problemas de manera directa y rápida. APOL

(s.f) nos presenta: “En una clase de 30 estudiantes, 6 se dieron de baja y 15 fracasaron. ¿Qué porcentaje de estudiantes aprobó la clase?”(p.74).

Podemos aplicar el siguiente algoritmo:

$$\begin{array}{l} 30 \dots\dots\dots 100\% \\ 21 \dots\dots\dots x \end{array} \quad x = \frac{21(100)}{30} = 70\%$$

Podemos razonar que 70% fracasaron o se dieron de baja, como la pregunta es el porcentaje que se aprobó. Simplemente restamos de 100 y nos queda el 30% como respuesta. El tema de porcentaje por no ser tan complejo, debería plantearse desde los niveles básicos y las áreas de matemáticas deben tomarlo como eje transversal durante todo el proceso colegial. Normalmente, el alumno que deja de practicar una temática puede perder la destreza adquirida.

2.2 Examen Enes

El examen ENES está dirigido a estudiantes que se encuentran cursando el tercer año de bachillerato y egresados de la educación media, sin límite de edad, que deseen vincularse con la educación superior. La aplicación del ENES se hace en formato físico. Es una prueba conformada por un cuadernillo impreso y una hoja de respuestas previamente identificada con los datos de cada estudiante. Posee códigos de seguridad impresos, tanto en el cuadernillo como en la hoja de respuestas, mecanismos que permiten garantizar la transparencia del proceso.

El ENES es una prueba de aplicación colectiva, se aplica en una sola sesión y tiene una duración de dos horas. Normalmente son de cien a ciento veinte preguntas, esto da una media de 1 minuto por pregunta. El examen no evalúa conocimientos, explora los procesos básicos del aprendizaje y habilidades lógicas y abstractas. Los procesos explorados son: Razonamiento verbal, Numérico y Abstracto. Para efectos de este

proyecto el razonamiento numérico involucra la habilidad para estructurar y organizar los problemas utilizando un método y/o fórmula matemática. Lo que implica determinar operaciones apropiadas para computar con rapidez y pensar en términos matemáticos.

A pesar de los esfuerzos que se hacen en el sentido de preparar a los estudiantes, existe una sensación en el estudiante de que el docente y la institución no están a la altura de esta preparación. He aquí la problemática de este proyecto.

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

3.1 Educación y resolución de problemas. Antecedentes

Muchas veces se cree que las matemáticas son difíciles y que solo un grupo reducido de estudiantes pueden “dominarla”. Surge una interrogante: ¿Un método adecuado de resolución de problemas, mejoraría cuantitativamente resultados? Existen estudios de cómo influyen diferentes representaciones de problemas, estilos cognitivos y rendimiento académico en la resolución de problemas. (Bañuelos, 1995). Este concepto es pertinente pues las diferencias académicas y de entorno de los estudiantes es variada e incluso si vienen de una misma institución educativa.

Muchos académicos hablan del estilo cognitivo, es decir como una persona percibe su ambiente o cómo se organiza su pensamiento. Es importante este concepto, ya que los diferentes estudiantes ven su entorno de diferente manera. Un problema matemático representa un doble componente, el problema en si con sus complicaciones verbales, algebraicas o geométricas. Ormrod (como se citó en Bañuelos, 1995) nos habla que resolver un problema contiene dos aspectos: el algoritmo y la heurística. El algoritmo, se lo trabaja paso a paso y busca un objetivo específico; el heurístico se refiere a la experiencia previa. En esta investigación se pretende analizar los mecanismos o estrategias apropiados para complementar estos componentes.

En este mundo tan competitivo y resultadista, el rendimiento académico es prioritario cuando se presentan pruebas que resultan ser de “vida o muerte”.

La resolución de problemas actualmente es considerada como uno de los procesos cognitivos más relevantes pues, los exámenes de promoción universitarios valoran el rendimiento académico. Es motivo de debate esta circunstancia, pero el hecho es que vivimos esta problemática y al parecer seguirá este sistema resultadista. La resolución de problemas, en su mejor concepción plantea estrategias efectivas para superar esta problemática. Se

suele hablar del estilo cognitivo, es decir como concibe el estudiante su mundo exterior. El estudio de los estilos cognitivos datan de la década del setenta y en resumidas cuentas, se recomienda que el docente adapte su instrucción al estilo cognitivo del estudiante.

Es claro, que ante distintos estilos cognitivos y rendimientos académicos, urge encontrar metodologías eficaces.

3.2 Teóricos reconocidos en la resolución de problemas

Entre los principales teóricos de la resolución de problemas matemáticos se encuentran: Polya, Schoenfeld y Kantowsky. Para Polya (1957, citado en Bañuelos 1995), un problema se resuelve correctamente si se siguen los siguientes pasos: Comprender el problema, concebir un plan para descubrir la solución, ejecución del plan y verificación del procedimiento y comprobación del resultado. Es claro que para Polya un reconocido docente y pedagogo húngaro, resolver problemas requiere una metodología. Veamos paso a paso sus postulados:

Comprender el problema: Aquí prima la incógnita y los datos del problema. Luego cuales son las condiciones. Se sugiere realizar una figura y adoptar una nomenclatura adecuada. Concebir un plan: Acaso hay un problema parecido o lo ha visto antes de forma diferente. Hay un teorema útil. Intente recordar algún problema del entorno con una incógnita igual o parecida... Podría extraer algo práctico a partir de los datos. Podría pensar en otros datos adecuados para hallar la incógnita? Ejecución del plan: Comprobar cada paso. Se puede demostrar la corrección del plan. Verificación: Se puede comprobar el resultado y el razonamiento?

Shoenfeld propone actividades de aprendizaje en el aula; el desea propiciar instancias parecidas a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de las matemáticas. Asume una postura de novato-experto. Su modelo de resolución es el siguiente:

Análisis

1. Trazar un diagrama. Si es posible.
2. Examinar casos particulares.
 - a. Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema.
 - b. Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.
3. Probar a simplificar el problema.

Exploración

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes:
 - a. Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.
 - b. Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.
 - c. Introduciendo elementos auxiliares.
 - d. Replanteando el problema mediante:
 - i. Cambio de perspectiva o notación
 - ii. Considerando el razonamiento por contradicción o el contra recíproco.
 - iii. Suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuales serían sus propiedades.
2. Examinar problemas ligeramente modificados:
 - a. Elegir subobjetivos
 - b. Relajar una condición y tratar de volver a imponerla.
 - c. Descomponer el problema en casos y estudiar caso por caso.
3. Examinar problemas ampliamente modificados:
 - a. Construir problemas análogos con menos variables.

- b. Mantener fijas todas las variables menos una, para determinar qué efectos tiene esa variable.
- c. Tratar de sacar partido de problemas afines que tengan parecido. (Bañuelos, 1995)

Kantowsky propone los siguientes procesos heurísticos, que se pueden emplear en un proceso de solución de problemas matemáticos:

1. Dibujar un diagrama (figura, esquema, tabla).
2. Examinar un caso especial
3. Identificar lo que se busca y lo que se da.
4. Identificar información relevante e irrelevante (examinar toda la información dada).
5. Trabajar hacia adelante desde el principio con la información dada.
6. Trabajar hacia atrás desde la conclusión.
7. Buscar un patrón o encontrar una generalización.
8. Buscar un problema relacionado.
9. Buscar un teorema, definición, operación o algoritmo que se aplique al problema.
10. Resolver parte del problema.
11. Verificar la solución.
12. Examinar si existe otra forma de encontrar la solución (soluciones alternas).
13. Examinar si se puede obtener otra solución.
14. Estudiar el proceso de resolución. (Bañuelos, 2009)

Se puede concluir en base a estos teóricos que la resolución de problemas, no es un proceso unidireccional, sino que plantea diferentes variables como: conocimientos previos, motivación, percepciones cognitivas, estilos de aprendizaje, como se presenta el problema en su esencia ya sea algebraica o gráfica, textual o combinada.

3.3 Componentes básicos en el examen ENES

En el examen ENES existe variedad de componentes a saber: algebraico, aritmético y geométrico. Cada uno representa retos grandes para los estudiantes. Los estudiantes que solo estudiaron álgebra “con Baldor”, se dan cuenta que su utilidad no es total, lamentablemente esa es la problemática de muchos estudiantes.

La aritmética, podemos decir que es medular en este examen pero razonada, en especial en los temas de:razonamiento, problemas con operaciones matemáticas, regla de tres simple y conjunta, fracciones, problemas con las edades, promedios, porcentajes, reducción a la unidad, series numéricas. Se deduce claramente que la aritmética debe ser un eje transversal en todos los años de colegio desde el básico y diversificado. Aquí se presenta el problema de fondo pues la aritmética no es una materia que se enseña en buena forma en el ciclo básico y en el diversificado ni se la recuerda. He aquí el detonante cuando se exige aritmética por “todos lados” en la prueba.

El álgebra está presente básicamente en el tema de las ecuaciones y en los procesos geométricos. Cabe señalar que si el estudiante es diestro para el álgebra, puede relacionar temas que se podrían hacer solo con razonamiento, además este alumno no debería tomarle mucho tiempo revisar la aritmética si la estudia correctamente. La geometría es un proceso más complejo, por motivos didácticos se la ha dividido en uno y dos. La geometría uno no representa mayores inconvenientes y se la puede ver en los textos de octavo, noveno. La geometría dos representa más dificultad, pues el alumno tiene que graficar la situación y relacionarla algebraicamente.

Existe una problemática parecida con la geometría, pues en la mayoría de los colegios, simplemente no se la da. Ante esta realidad el alumno podría estudiar geometría uno pero la dos requeriría más tiempo. Normalmente las autoridades de los colegios se apuran a última hora con cursos rápidos, sin saber realmente si sus maestros están capacitados. Se ve claramente que aprender conceptos matemáticos requiere tiempo y estos cursos “de última hora” ahondan más el problema.

El proceso de asimilación del estudiante es complejo, en el tema de las ecuaciones hay que practicar mucho el paso del lenguaje verbal al algebraico. Veamos un ejemplo:

Tabla 2. Ejemplos de traducción Lenguaje normal y Lenguaje algebraico

Lenguaje normal	Lenguaje algebraico
Cuatro veces un número	$4x$
El número aumentado en 30	$X+30$
El duplo de un número más el triplo del mismo número es igual a 20	$2x + 3x = 20$

Esto es asimilable pero cuando se presenta un concepto de número consecutivo, la cosa cambia, en el anexo 1 podemos ver su proceso de solución. Aquí queda claro que hay una infinidad de conceptos que no son difíciles, pero que hay que practicar. Muchos estudiantes creen haber comprendido un tema o concepto matemático, pero una respuesta no la pueden representar en dos lenguajes diferentes. Ejemplo:

$\frac{7}{2} \rightarrow 3.5$ Este ejemplo se presta para otro análisis, pues el lenguaje sencillo del maestro facilita la comprensión, veamos.

Tabla 3. Ejemplo de traducción entre el lenguaje sencillo y formal con representación numérica

Lenguaje sencillo	Lenguaje formal	Representación numérica
Siete dólares para dos personas	Siete medios	$\frac{7}{2} = 3.5 = 3\frac{1}{2}$

Al decir “Siete dólares para dos personas”, un alumno perspicaz nos responde tres con cincuenta. Se nota pues que el docente debe “filtrar” su información, para que se asimile mejor adaptando su lenguaje. “El lenguaje verbal es muy

esclarecedor como instrumento de comunicación de los conceptos matemáticos, pero como instrumento único de evaluación resulta insuficiente y equívoco”

(Díaz, 2009, p.21). Se nota claramente según este concepto que un “buen lenguaje” es una ayuda enorme. El maestro realiza todas las explicaciones posibles en un problema, en especial los primeros ejercicios de cada tema.

Investigaciones sugieren que el alumno consulte en diccionarios conceptos desconocidos, en especial de la Real Academia Española (RAE). “Puede ser que los algebristas árabes que por 7 siglos se asentaron en España, debieron enriquecer el idioma español con abundante vocabulario matemático” (Díaz, 2009, p.23). Se debe por tanto, sugerir su uso, aunque en el mercado existen además diccionarios matemáticos.

Estudiosos y teóricos modernos plantean sus postulados, los cuales son interesantes y hablan de un trabajo colaborativo que facilite el trabajo:

Revisar minuciosamente el escenario, el cual provee una situación problemática que requiere del participante conocimientos y habilidades específicas para ser resuelta. Seguir todas las etapas y actividades de la metodología, aun cuando parezca que no es necesario realizarlas todas. Cada una de ellas tiene un propósito y facilita el camino a la solución del problema. Definir y asumir con responsabilidad las tareas de cada integrante del equipo. Esto facilita que el trabajo sea verdaderamente colaborativo y por tanto se llegue a las metas de aprendizaje propuestas. Comprender que el trabajo en equipo no es sencillo, pero constituye una experiencia relevante en la vida profesional. Los alumnos deberán tratar de resolver los conflictos de sus equipos por si mismos y solicitar ayuda, únicamente en caso de requerirla. Mantener el contacto con el profesor a través de uno de los

integrantes del equipo para expresarle sus dudas y problemas. Administrar el tiempo adecuadamente. Mantener un proceso de análisis permanente de cada elemento nuevo que se vaya acumulando o incorporando producto de la investigación personal. (García, 2015, p.4)

José Ángel García en su magnífico artículo que forma parte de la referencia bibliográfica, aparte de ofrecernos su “método”, nos hace un recuento histórico del porqué del estancamiento docente en Latinoamérica. Es loable que en Costa Rica según el artículo, la matemática se humanizó y se la integró al contexto social. Ya Ecuador debe tomar iniciativas como esta.

3.4 Factores psicológicos que inciden en el rendimiento académico

Existen situaciones que afectan el rendimiento de los estudiantes como la ansiedad y el temor propios de estos exámenes, estudios sugieren una relación entre no sentirse preparado y el estrés previo al examen. Clark y Beck (como se citó en Martínez, 2014) indican que:

Un periodo previo a un examen la ansiedad será mucha si esperamos que el examen sea difícil y dudamos de nuestro nivel de preparación y por el contrario la ansiedad será baja si esperamos que el examen sea relativamente fácil o estamos seguros de nuestra preparación. (p.155)

Es comprensible que al no encontrar formas seguras de prepararse, el estrés haga que la prueba parezca más dificultosa. Incluso bien preparados al no dominar sus nervios han fracasado, pero esta circunstancia amerita otro estudio, no menos importante. Lo cierto es que un buen método de estudio que se asemeje a las condiciones reales de los exámenes, garantizan seguridad y aplomo.

3.5 Aspectos Cognitivos

En todos los modelos teóricos que hablan de la resolución de problemas, se habla de lo cognitivo del estudiante, es decir cómo el educando percibe su

mundo externo. Es interesante el hecho de que los estudiantes al analizar un ejemplo de regla de tres como el siguiente podríamos decir que de alguna forma se siente identificado ya que en su mayoría son estudiantes de zona rural: Un ganadero tiene 36 ovejas y alimento para ellas por el término de 28 días. Con 20 ovejas más, sin disminuir la ración diaria y sin agregar forraje. ¿Durante cuantos días podrá alimentarlas? Es razonable pensar que este tipo de ejercicios son los que invitar a pensar que la aritmética tiene su aplicación en la vida diaria. Este tema de regla de tres se presta para un sinnúmero de aplicaciones de la vida real. Estamos entrando por decirlo así en la cultura del estudiante. Uno de los primeros educadores matemáticos que propuso el empleo de elementos del contexto cultural del alumnado de la educación fue Allan Bishop (como se citó en Perales, 2016). Este autor define enculturación matemática “como un modelo de educación basado en la idea de introducir al alumno en la cultura con metodologías por proyecto y trabajo en grupos”. Se puede inferir que si “culturizamos la matemática” en este contexto, el estudiante se identifica más con los temas a estudiar.

3.6 Estadística Nacional

Revisemos una estadística nacional sobre la problemática matemática, la cual es grave:

El Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEVAL) luego de evaluar los conocimientos de 45000 estudiantes en matemática, lengua y literatura, ciencias naturales y estudios sociales... La matemática sigue siendo el dolor de cabeza para los menores. Por ejemplo, en el 4^o de educación general básica el 25% no alcanzó niveles elementales en esta materia; en 7^o año, el 30% presenta esta tendencia. Mientras que en 3^o año de bachillerato, el 31% de evaluados no domina los números (informe INEVAL, 2015) (Puga, 2016,p.3)

Esta estadística es impactante e invita a los docentes a no esperar políticas del estado a remediar el problema. El estado intenta ayudar pero la mayoría de

capacitaciones al docente no suple estas deficiencias teóricas. Es recomendable que el docente se convierta en un erudito, estudioso por el bien de sus estudiantes.

Muchos docentes argumentan, en especial los de tercero de bachillerato que como estos temas no están en el currículo de sexto que no se les pregunte. Aunque es tema de otro análisis, el gobierno en el currículo de segundo y tercero de bachillerato debe incluir razonamiento lógico. “Es necesario que el docente se forme y actualice con respecto a los fundamentos teóricos – metodológicos propios de la resolución de problemas... con el fin de plantear a los estudiantes enunciados que realmente posean las características de un problema...” (Pérez,2011,p.171). Yenny Pérez docente Venezolana exhorta a la erudición del docente desde el conocimiento puro de los temas hasta los fundamentos metodológicos.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

El método de investigación científica es una serie de pasos ordenados sobre cómo va a ser la investigación.

Para este diseño se aplicará un diseño Pre experimental. El subdiseño será el Pre-test – Post-test con un solo grupo. En este tipo de diseño se definen tres pasos fundamentales:

- Una medición previa de la variable dependiente a ser estudiada que sirve de línea base(pre-test)
- Introducción o aplicación de la variable independiente o experimental X a los sujetos del grupo.
- Una nueva medición de la variable dependiente entre los sujetos (post-test).

4.1 Identificación de la población y muestra

La población consiste en estudiantes que rindieron la prueba del SENESCYT y que quisieron tener otra oportunidad. Cabe destacar que estos estudiantes volvieron a dar la prueba, ya que no alcanzaron un puntaje adecuado. El requisito básico era entregar la calificación de la primera prueba, para acceder al curso. El compromiso de los estudiantes consistía en entregar su segunda calificación. Con estos datos se podría manejar el pretest y postest requerido. La muestra final consiste en el análisis de diez estudiantes.

4.2 Descripción de los instrumentos

Cabe destacar que las pruebas pre-test y post-test fueron tomadas por el ente rector encargado de la administración de las mismas, es importante notar que estas pruebas son estandarizadas y tiene años en el proceso de regulación por SENESCYT en la confiabilidad de las mismas. El instrumento está conformado por 3 componentes VERBAL, LÓGICO y ABSTRACTO; cada instrumento tiene

una puntuación bruta de 40 puntos, obteniéndose un total de 120 puntos, equivalente a un puntaje ponderado máximo de 1000 puntos conocido como Nota ENES.

El objeto de estudio del mencionado examen, consiste en analizar únicamente la calificación obtenida en la temática de razonamiento numérico, estipulada dentro del componente LÓGICO del Examen ENES.

4.3 Descripción del procedimiento

Al implementar el diseño pre-experimental se tomó un grupo de 10 estudiantes intencionadamente como referencia, con el fin de aplicar la metodología propuesta de Resolución de Problemas. El mencionado grupo de estudiantes se había presentado en el período del primer semestre del 2016 y buscaba mejorar la calificación obtenida con el fin de asegurar un cupo a la universidad para el período comprendido durante el segundo semestre de ese mismo año.

A los aspirantes en cuestión se les ofreció una inmersión intensiva dentro de la metodología seleccionada, reconociéndose en el proceso cada una de las etapas del método de resolución de problemas; manejándose además un lenguaje sencillo y fácil de entender por parte de los estudiantes.

Al ir evaluando y trabajando en clase se pudo notar el avance cualitativo y cuantitativo de los estudiantes. Cabe destacar que el cuaderno de trabajo es una herramienta que permite recabar evidencia de los temas tratados en forma progresiva.

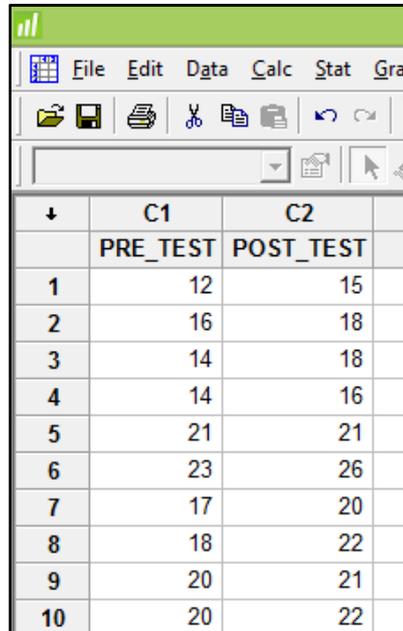
4.4 Procesamiento y análisis de datos

Para el procesamiento y el análisis de los datos se emplea el software Minitab 17. Minitab es un programa diseñado para ejecutar funciones estadísticas básicas y avanzadas. Combina lo amigable del uso de Microsoft Excel con la capacidad de ejecución de análisis estadísticos.

4.5 Estadísticos descriptivos

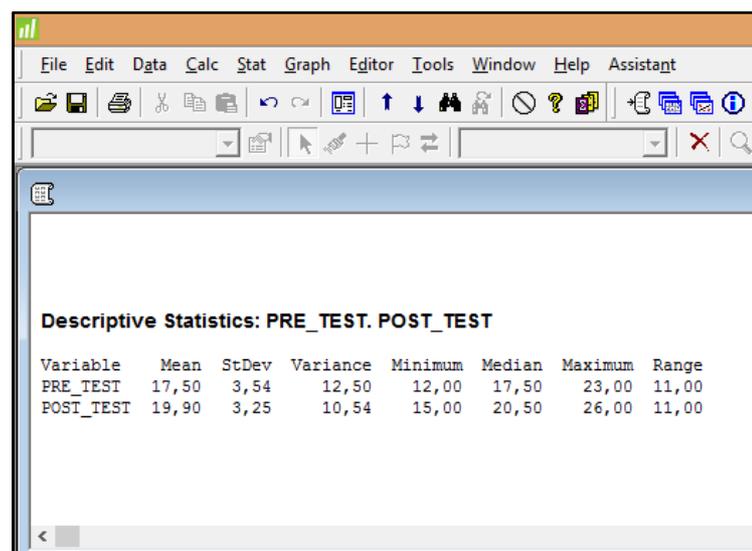
Se registraron las calificaciones de 10 estudiantes, mismos que habían rendido el Examen Nacional para la Educación Superior en dos instancias.

Tabla 4. Resultado calificaciones Pre-test y Post-test



	C1	C2
	PRE_TEST	POST_TEST
1	12	15
2	16	18
3	14	18
4	14	16
5	21	21
6	23	26
7	17	20
8	18	22
9	20	21
10	20	22

Con el fin de cuantificar la mejora al término de la recepción del primer examen se procedió a realizar la capacitación según la metodología seleccionada. Luego de la inmersión en la metodología los estudiantes se presentaron al segundo examen, obteniéndose los estadísticos descriptivos de las pruebas Pre-test y Post-test:



Descriptive Statistics: PRE_TEST. POST_TEST

Variable	Mean	StDev	Variance	Minimum	Median	Maximum	Range
PRE_TEST	17,50	3,54	12,50	12,00	17,50	23,00	11,00
POST_TEST	19,90	3,25	10,54	15,00	20,50	26,00	11,00

Figura 7. Estadísticos Descriptivos Pre-test y Post-test

Se evidencia que el promedio de la prueba Post-test es $\bar{x} = 19,90$ con una desviación típica $s = 3,25$ frente a la prueba Pre-test con $\bar{x} = 17,50$ y desviación típica $s = 3,54$. El valor de mediana varía de $\tilde{x} = 17,50$ a $\tilde{x} = 20,50$ en las pruebas Pre-test y Post-test respectivamente. Adicional, se observa del rango que varía desde $R=12$ hasta $R=23$ en el Pre-test y de $R=15$ hasta $R=26$ en el Post-test.

4.6 Diagrama de cajas

En la siguiente figura se muestran los diagramas de cajas tanto de las calificaciones obtenidas en el Pre-test como en el Post-test.

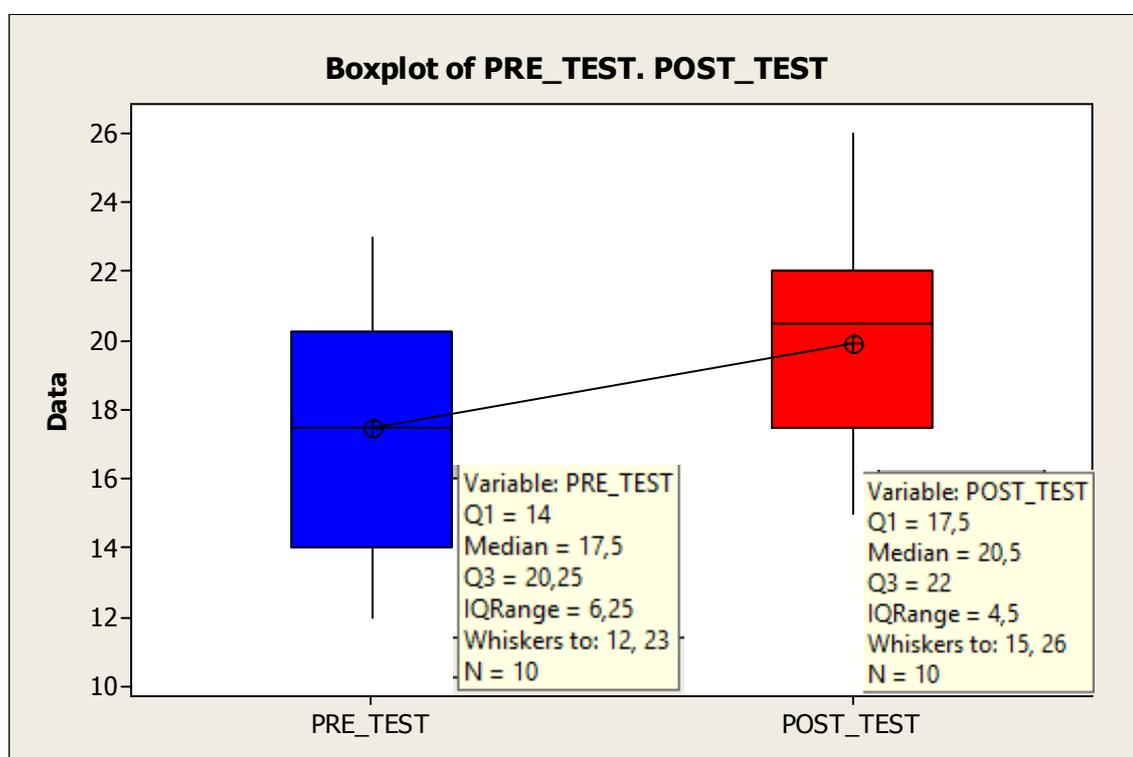


Figura 8. Diagrama de Cajas Pre-test y Post-test

En el mismo se puede apreciar que el rango Intercuartílico en la prueba Pre-test es 6,25 y en la prueba Post-test es 4,5. Los valores mínimos y máximos en el Pre-test corresponden a 12 y 23; mientras en el Post-test 15 y 26. Es relevante anotar que el Segundo cuartil corresponde a 17,5 en la prueba Pre-test; ubicándose bajo este puntaje el 50% de las calificaciones resultantes. En cambio en el Post-test el Segundo cuartil corresponde a 20,5.

4.7 Prueba t pareada para media de las diferencias

En esta Prueba t Pareada se postula como Hipótesis nula que la media de la diferencia para cada instancia del Post-test y el pre-test no son diferentes.

Con el soporte del software estadístico Minitab se obtuvieron los siguientes resultados:

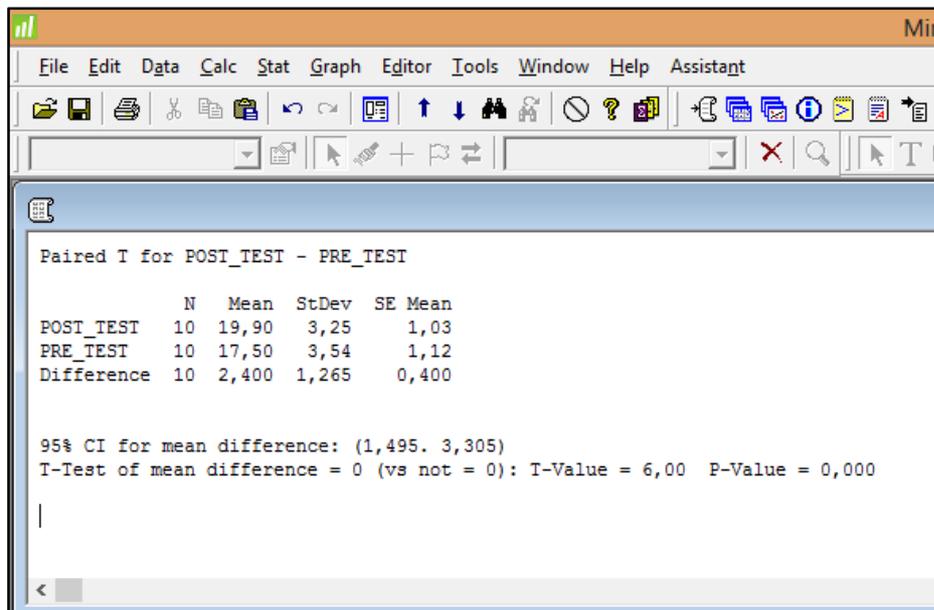


Figura 9. Prueba T pareada para media de la diferencia

El resultado anterior con un Valor_P=0 conlleva a rechazar la hipótesis nula en favor de la hipótesis alterna, es decir que sí existe evidencia estadística para confirmar que mediante la implementación de la metodología de Resolución de Problemas la media de las diferencias es estadísticamente significativa.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

- El aprendizaje basado en resolución de ejercicios correctamente aplicado, contribuye a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes. Se observó la mejora mediante una T pareada, obteniéndose $t = 6,00$ y un valor $p=0$.
- Durante el desarrollo del curso los estudiantes se motivaron y colaboraron entre sí con el propósito de desarrollar su propio solucionario. La motivación radicaba en ser partícipes activos de la resolución del módulo.
- Los estudiantes que respondieron en forma activa en clase y desarrollaron en forma efectiva sus cuadernos de trabajo desarrollaron más plenamente su pensamiento lógico y creativo.
- El módulo de aprendizaje basado en principios fundamentales de resolución de problemas constituyo una herramienta facilitadora para los propósitos del curso.

Se sugiere las siguientes recomendaciones

- Un llamado de atención a las autoridades donde realizó el estudio, para que el módulo de trabajo realizado se tome como referencia para el trabajo transversal en el aula; desde ciclos básicos y diversificados.
- Concienciar a los docentes de la institución, para que se capaciten usando la metodología aplicada en el proceso educativo; y estos puedan recomendar mejoras pedagógicas.
- Los estudiantes capacitados en el proceso repliquen estas temáticas en sus distritos educativos, para que la inferencia y trasmisión de conocimientos esté garantizada.
- Se realicen estudios del método de resolución de problemas en poblaciones mayores, para verificar la pertinencia e inferencia de resultados cualitativos y cuantitativos.

- Enseñar la matemática en forma natural usando un lenguaje sencillo y en forma progresiva y sistemática con el fin de generar confianza en el estudiante.

BIBLIOGRAFÍA

1. A.P.O.L. (sin fecha). El libro verde. Pruebas psicotécnicas. Guayaquil. Ecuador.
2. Bañuelos Márquez, A M; (1995). Resolución de problemas matemáticos en estudiantes de bachillerato. *Perfiles Educativos*, Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13206706>
3. Díaz, H H; (2009). El lenguaje verbal como instrumento matemático. *Educación y Educadores*, 12 13-31. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83412235003>
4. Equipo editorial Santillana. (2013). Prepárate para la U. Tomo 7. Guayaquil. Ecuador: Santillana.
5. Equipo editorial Santillana. (2009). Razonamiento lógico. Guayaquil. Ecuador: Santillana.
6. Galdós, L. (2003). *Matemática Galdós*. Madrid. España: Grafilles, S.L.
7. García Retana, J Á; (2015). EL LENGUAJE ORDINARIO: LA CLAVE PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS BASADO EN PROBLEMAS. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, 15() 1-24. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44733027021>
8. Nortes Checa, A; Martínez-Artero, R N; (2014). ¿Tienen ansiedad hacia las matemáticas los futuros matemáticos?. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 18() 153-170. Recuperado de <http://2ttp344999.redalyc.org/articulo.oa?id=56732350009>
9. Perales, F J; Albanese, V; Oliveras, M L; (2016). Matemáticas y lenguaje: concepciones de los profesores desde una perspectiva etnomatemática. *Perfiles Educativos*, XXXVIII() 31-50. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13244824003>
10. Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, 35(73), 8-26.
11. Romero, L. R. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación*, (1), 275-

294. Recuperado de <https://scholar.google.es/scholar?hl=es&q=PROBLEMAS+CON+OPERACIONES+MATEMATICAS+BASICAS&btnG=&lr=>
12. Sanchez, J. N. (sin fecha). *Psicotécnico Superior* . Lima Perú: San Marcos.
13. TIRADO, F; LARRAZOLO, N; BACKHOFF, E; (2013). HABILIDADES DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MÉXICO. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 18 1137-1163. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14028945006>
14. TOLEDO DELGADO, A M; PUGA PEÑA, L A; RODRÍGUEZ OROZCO, J M; (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, 197-220. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=441846839009>

ANEXOS

ANEXO 1
CUADERNO DE TRABAJO

PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO

1. He cambiado en el banco 100 billetes de 500 dólares por billetes de 100 dólares, ¿Cuántos billetes he recibido?

a) 50 b) **500** c) 5000 d) 20 e) 55

DESARROLLO

$$\frac{100 (500)}{100} = 500$$

2. Un granjero tiene 17 vacas. Todas excepto nueve, se abrieron paso a través de un agujero en la valla y se perdieron. ¿Cuántas quedan?

a) 7 b) 8 c) **9** d) 10 e) 11

DESARROLLO

9 porque dice excepto nueve.

3. Si Juana es tía de Carlos y Oscar es hermana de Juana. ¿Quién es el padre del hijo de Carlos?

1. Oscar b) el esposo de Juana c) **Carlos** d) el padre de Juana
e) Ninguna

DESARROLLO



4. Se le preguntó al joven Pedro por el número de camisas blancas, rojas y verdes que tenía; a lo cual contestó “todas mis camisas son blancas menos 2, todas son rojas menos 2 y todas son verdes menos 2” ¿Cuántas camisas rojas posee Pedro?

a) 1 b) 3 c) 2 d) 5 e) no determinado

DESARROLLO

Llamamos b , a , r al número de camisas blancas (b), azules (a) y rosadas (r). Tenemos que:

$$b = t - 2$$

$$a = t - 2$$

$$r = t - 2$$

RECORDEMOS QUE:

$$t = \text{totales}$$

$$(b + a + r) = t$$

$$\begin{cases} b = t - 2 \\ a = t - 2 \\ r = t - 2 \end{cases}$$

IGUALANDO: $b + a + r = t - 2 + t - 2 + t - 2$

RESOLVIENDO: $b + a + r = 3t - 6$

t

$$t = 3t - 6$$

$$6 = 3t - t$$

$$6 = 2t$$

$$\frac{6}{2} = t$$

$$t = 3$$

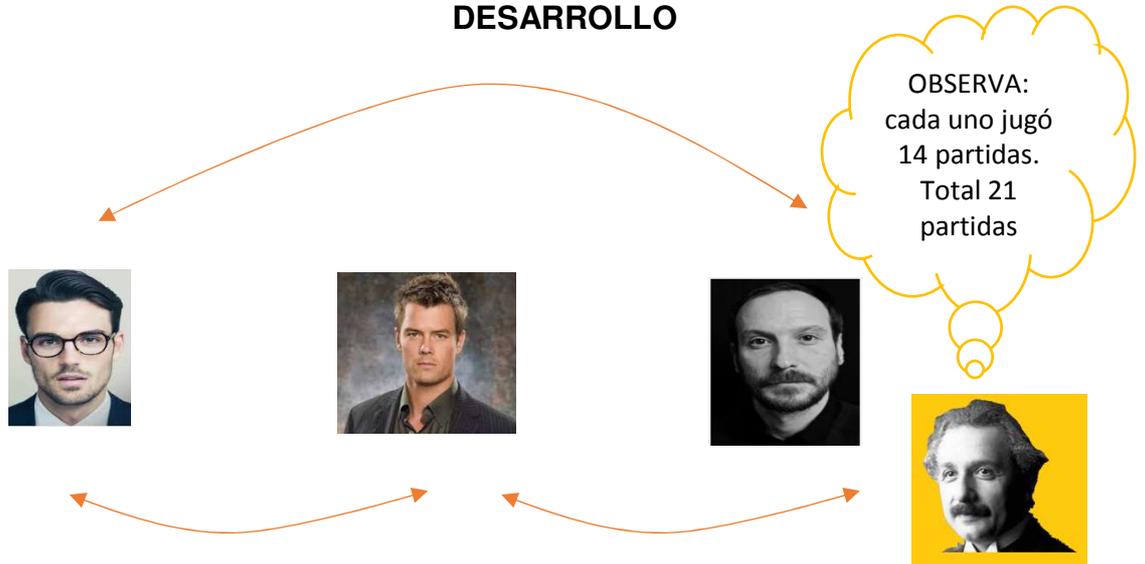
Como se supone que tiene camisas de todos los colores y el total de camisas es tres, llegamos a la conclusión que:

$$\begin{cases} \text{blancas} & = & 1 \text{ camisa} \\ \text{roja} & = & 1 \text{ camisa} \\ \text{verde} & = & 1 \text{ camisa} \end{cases}$$

5. Tres amigos jugaron entre sí, todos contra todos, partidas de ajedrez. En total jugaron 21 partidas. ¿Cuántas jugó cada uno?

- a) 7 b) 14 c) 12 d) 16 e) NA

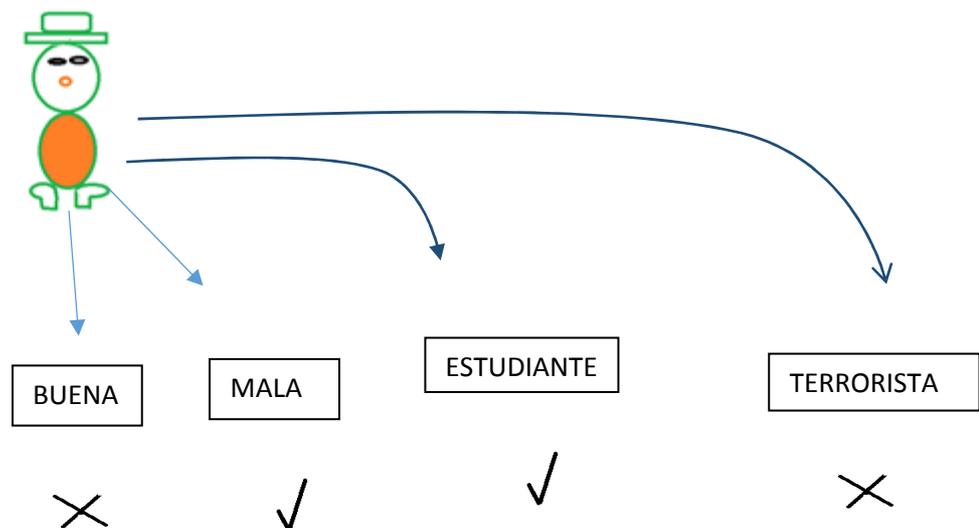
DESARROLLO



6. Una persona es buena o mala, la misma persona puede ser estudiante o terrorista, pero esta persona es estudiante y mala, luego no puede ser:

- a) estudiante y terrorista b) buena y terrorista c) terrorista y mala d) F. Datos e) NA

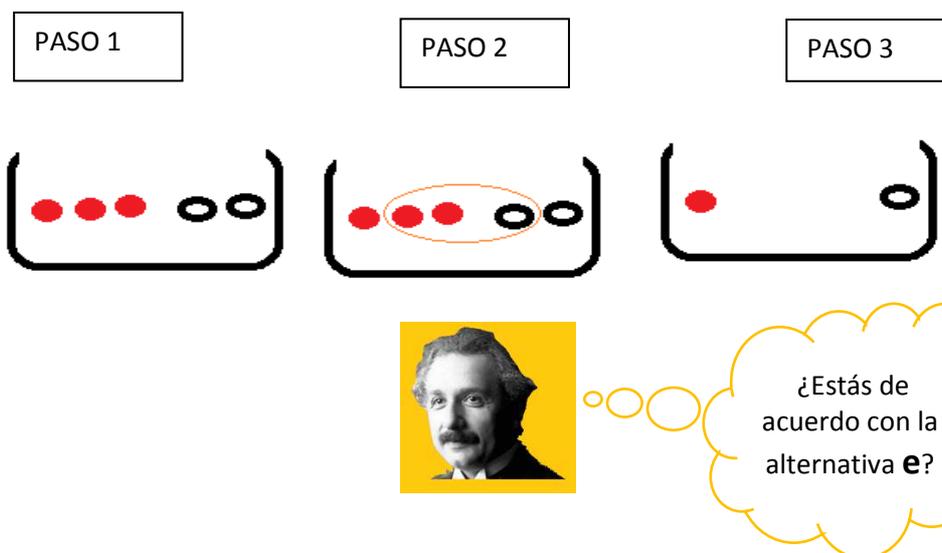
DESARROLLO



7. En una bolsa hay bolas, tres de ellas son rojas y dos son blancas. Al sacar tres bolas una es blanca. ¿Cuántas bolas quedan en la bolsa y de qué color?

- a) 2 blancas b) 2 rojas c) 1 roja d) no puede ser e) **1 roja y una blanca**

DESARROLLO



8) En una fiesta se encuentra cierta cantidad de muchachos y muchachas, así como también 7 madres. En un determinado momento, todos bailan, excepto 7 parejas que salen a tomar aire y las 7 madres se quedan dormidas. ¿Cuántas mujeres había en la fiesta, si el número total del personal era 97?

- a) 45 b) 49 c) 50 d) 51 e) **52**

DESARROLLO

Razonemos paso a paso:

- 1) Existen muchachos, muchachas y 7 madres.
- 2) Al total de personas, le podemos restar el número de madres:

$$97 - 7 = 90$$

3) Al ser 90 jóvenes, se supone que 45 son varones y 45 mujeres.



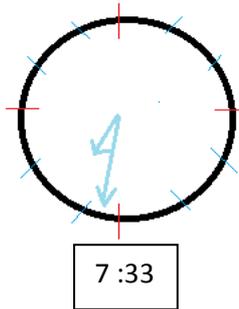
45 MUJERES + 7 MADRES =
52 MUJERES

PROBLEMAS CON OPERACIONES MATEMÁTICAS

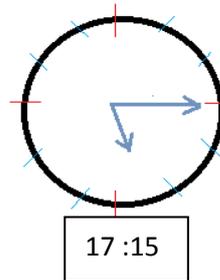
1. En cierto lugar el 1 de enero el sol sale a las 7h33 y se pone a las 17h15 ¿Cuál es la duración del día?

- a) 10h24 b) 12h30 c) 14h00 d) **9h42** e) 9h42

DESARROLLO



De 7:33 a 8:00 hay 27 minutos



De 8:00 a 17:15 faltan 9 horas con 15 minutos.

SUMAMOS:

$$\begin{array}{r} 27' \\ \underline{9h \ 15'} \end{array}$$

9h 42'

2 ¿Entre cuántas personas se reparten 185 naranjas, si a cada persona le tocan 10 y sobran 15 naranjas?

- a) 15 b) 14 c) 16 d) 19 e) **17**

DESARROLLO

Primero razonemos en la siguiente división:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 1 \overline{) 23} \\ \underline{21} \\ 2 \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array} \equiv \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Luego lo aplicamos al ejercicio:

$$\begin{array}{r} 185 \\ 15 \overline{) X} \end{array} \equiv \frac{185}{X} = 10\frac{15}{X}$$

$$\equiv \frac{185}{X} = \frac{10X + 15}{X}$$

$$185 = 10X + 15$$

$$170 = 10X$$

$$X = \frac{170}{10}$$

$$X = 17$$

Esto es álgebra básica.
PILAS PANA



3. Al efectuar una suma, se ha puesto el número 3 en vez del 8, en la cifra de las decenas, y 7 en vez de 6, en las centenas. ¿En cuánto ha sido aumentada la suma?

- a) 35 b) 40 c) **50** d) 70 e) 45

DESARROLLO

CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	
7	3	0	= 730
6	8	0	= 680

50

4. La cola de pescado es de 5cm; la cabeza es doble que la cola; el cuerpo tiene una longitud igual a la de la cabeza más el triple de la cola. ¿Cuál es el largo total del pescado?

- a) 40 cm. b) 50 cm. c) 60 cm. d) 72 cm. e) 25 cm.

DESARROLLO

The diagram illustrates the decomposition of a fish into its parts. A large fish on the left is shown with a bracket pointing to three smaller fish on the right, each representing a different part of the whole fish. The top fish is labeled '5 cm' and represents the tail. The middle fish is labeled '2 (5 cm)' and represents the head. The bottom fish is labeled '10 cm + 3 (5)' and represents the body. To the right of the fish is a box containing the following calculation:

$$5\text{cm} + 2(5\text{cm}) + 10\text{cm} + 3(5\text{cm})$$

$$= 5\text{cm} + 10\text{cm} + 10\text{cm} + 15\text{cm}$$

$$= 40\text{cm}$$

5. Tres grupos de voluntarios tienen en sus cuentas de ahorros \$3675, \$1575, \$2275 respectivamente; se requiere repartir este dinero a 43 ancianos, de tal forma que cada uno reciba igual cantidad de dinero. ¿Cuánto recibe cada uno?

- a) 160 b) 143 c) 174 d) 175 e) 170

DESARROLLO

$$\begin{array}{r}
 \$ 3675 \\
 \$ 1575 \\
 \$ 2275 \\
 \hline
 7525 \quad | \quad 43 \\
 322 \quad | \quad 175 \\
 215 \\
 (00)
 \end{array}$$

6. Un librero recibe 13 lápices por cada docena que compra, ¿Cuántos lápices recibe al comprar 6 gruesas? (Una gruesa tiene 144 lápices)

- a) 536 b) 636 c) 728 d) 858 e) 936

DESARROLLO

Primero calculamos la cantidad de lápices ($144 \times 6 = 864$)
 Luego calculamos la cantidad de docenas ($864 \div 12 = 72$)
 Finalmente, como nos dan 13 lápices por cada docena, todo se reduce a ($72 \times 13 = 936$)

CÁLCULO AUXILIAR

864	12
024	72
00	



Son problemas sencillos.
 Acostúmbrate a los procesos

7. Una persona trabaja cinco días semanales y cose 45 conjuntos de libros a la semana. Si cada conjunto contiene 7 libros, cual es el número de libros que cose diariamente
- a) 120 b) 80 c) 53 d) **63** e) 73

DESARROLLO

Primero vemos que esta persona al día cose 9 conjuntos de libros ($45 \div 5 = 9$).
 Como cada conjunto tiene 7 libros es lógico que la solución es 63.
 ($7 \times 9 = 63$)

8. Un funcionario tiene que archivar 800 cartas. Si puede archivar 80 en una hora, ¿ el número de cartas que le quedan por archivar luego de 7 horas de trabajo es:
- a) 140 b) **240** c) 250 d) 260 e) 100

DESARROLLO

$$\left. \begin{array}{l} 800 - 7(80) \\ 800 - 560 \\ \hline 240 \end{array} \right\}$$



Discute con tus compañeros y maestros el proceso aritmético

REGLA DE TRES

1. En un día de trabajo de 8 horas, un obrero ha hecho 10 cajas. ¿Cuántas horas tardará en hacer 25 de esas mismas cajas?

- a) 18 h b) 32 h c) 15 h d) 80 h e) **20 h**

DESARROLLO

+		-
	8 horas -----	10 cajas
	X -----	25 cajas

$$X = \frac{25 (8)}{10} = 20 \text{ horas}$$

+

2. Si una pieza de tela de 36 cm. De largo, lavándola se reduce a 33 cm. ¿Qué largo tendrá una pieza de tela de 48 cm. Después de lavarla?

- a) 47 b) **44** c) 45 d) 46 e) 45,5

DESARROLLO

+		-
	8 cm largo -----	33 cm
	48 cm largo -----	X

$$X = \frac{33 \text{ cm} (48 \text{ cm})}{36 \text{ cm}} = 44 \text{ cm}$$

+

3. Doce obreros han hecho la mitad de un trabajo en 18 horas. A esa altura de la obra 4 obreros abandonan el trabajo. ¿Cuántas horas tardarán en terminarlo, los obreros que quedan?

- a) **27 h** b) 12 h c) 18 h d) 15 h e) 10 h

DESARROLLO

$$\begin{array}{rcc}
 + & & - & + \\
 12 \text{ obreros} & \text{-----} & \frac{1}{2} \text{ trabajo} & \text{-----} & 18 \text{ horas} \\
 8 \text{ obreros} & \text{-----} & \frac{1}{2} \text{ trabajo} & \text{-----} & X
 \end{array}$$

$$- \quad +$$

$$X = \frac{18 \text{ horas} \times \frac{1}{2} \text{ trabajo} \times 12 \text{ obreros}}{\frac{1}{2} \text{ trabajo} \times 8 \text{ obreros}} = 27 \text{ horas}$$

4. Un ganadero tiene 36 ovejas y alimento para ellas por el término de 28 días. Con 20 ovejas más, sin disminuir la ración diaria y sin agregar forraje. ¿Durante cuántos días podrá alimentarlas?
 a) 18 días b) 20 días c) 25 días d) 435/9 días e) 23 días

DESARROLLO

$$\begin{array}{rcc}
 & + & + \\
 36 \text{ ovejas} & \text{-----} & 28 \text{ días} \\
 56 \text{ ovejas} & \text{-----} & X
 \end{array}$$

$$- \quad +$$

$$X = \frac{28 \text{ días} \times 36 \text{ ovejas}}{56 \text{ ovejas}} = 18 \text{ días}$$

5. Ocho obreros han tardado 24 horas para realizar cierto trabajo.
Cuánto tiempo hubiesen empleado para hacer el mismo trabajo 4 obreros?

a) 12 b) 48 c) 24 d) 36 e) 15

DESARROLLO

8 obreros ----- 24 horas

4 obreros ----- X

$$X = \frac{24 \text{ horas} \times 8 \text{ obreros}}{4 \text{ obreros}} = 48 \text{ horas}$$

6. Dos socios emprenden un negocio que dura 4 años. A invierte \$500 y B invierte \$350. ¿Cuánto corresponde a cada uno de una ganancia de \$250?

a) b) c) d) e)

A: \$145
B: \$105

A: \$150
B: \$100

A: \$151
B: \$99

A: \$153
B: \$97

A: \$147,05
B: 102,94

DESARROLLO

Primero calculamos el porcentaje de inversión de cada uno:

SOCIO A

SOCIO B

- +

\$ 850 ----- 100 %

\$ 500 ----- X

+

- +

\$ 850 ----- 100 %

\$ 350 ----- X

+

Luego sacamos la ganancia de cada uno:

GANANCIA DE A

$$\begin{array}{rcl} \$ 250 & \text{-----} & 100 \% \\ X & \text{-----} & \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2500 & 17 \\ 80 & 147,05 \\ \hline 120 & \\ 0100 & \\ 15 & \end{array}$$

Vemos que la ganancia de A es \$147,05 y la de B es \$102,95

$$\begin{array}{r} 250,00 \\ - 147,05 \\ \hline 102,95 \end{array}$$

7. Para hacer un túnel, 30 obreros gastan 18 días. ¿Cuántos obreros deberán agregarse para hacer el mismo trabajo en 3 días menos?

$$\begin{array}{rcl} - & + & \\ 30 \text{ obreros} & \text{-----} & 18 \text{ días} \\ X & \text{-----} & 15 \text{ días} \\ + & & \end{array}$$

Como $X = 36$,
"entonces deben agregarse 6 obreros"
($36 - 6 = 30$)

$$X = 36$$

8. Si una culebra recorre 27 pies en 3 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 54 pies?

- a) 9h b) **6h** c) 12h d) 486h e) Ninguna

DESARROLLO

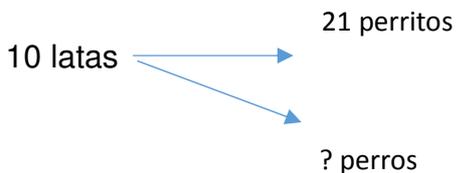
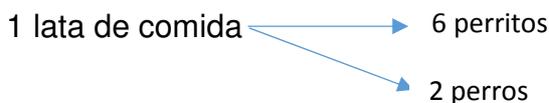
- +			
27 pies	-----	3 horas	$X = \frac{3 \text{ horas } (54 \text{ pies})}{27 \text{ pies}}$
54 pies	-----	X	
+			$X = \text{6 horas}$

REGLA DE TRES CONJUNTA

1. Con una lata de comida se puede alimentar a 6 perritos o a dos perros. Si se tiene 10 latas y se ha alimentado a 21 perritos. ¿Cuántos perros más se puede alimentar?

- a) 10 b) 11 c) 12 d) **13**
e) 14

DESARROLLO



- Con 10 latas se puede alimentar a 60 perritos, pero como ya se alimentaron 21 restamos ($60 - 21 = 39$ perritos)

- Se tiene alimento para 39 perritos mas, pero la proporción es (2 PERROS \equiv 6 PERRITOS), por lo tanto

$$39 \left(\frac{1}{3}\right) = 13$$

- Por la tanto se pueden alimentar 13 perros.

INTERESANTE EQUIVALENCIA

$$2 \text{ PERROS} \equiv 6 \text{ PERRITOS}$$

$$1 \text{ PERRITO} \equiv \frac{1}{3} \text{ PERRO}$$

2. ¿Cuántos metros habrán en 100 pulgadas si se conoce que una pulgada tiene 2,54 cm?

- a) 25,4 b) 254c) **2,54** d) 2540 e) 0,254

DESARROLLO

RECUERDA
LOS
FACTORES DE
CONVERSIÓN

$$100 \text{ pulgadas} \times \frac{2,54 \text{ cm}}{1 \text{ pulgada}} \times \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 2,54 \text{ m}$$



3. Si por 3 alpacas me pueden dar 3 vacas, por 3 vacas me pueden dar 5 caballos y por 8 caballos me dan 9 ovejas. ¿Por cuantas alpacas puedo cambiar 15 ovejas?

- a) 10 b) 11c) **8** d) 13 e) 14

DESARROLLO

3 alpacas _____ 3 vacas
 3 vacas _____ 5 caballos
 8 caballos _____ 9 ovejas
 15 ovejas _____ X alpacas

$$3 (5)(9) X = 3 (3)(8)(15)$$

$$X = \frac{3 (3)(8)(15)}{3 (5)(9)}$$

$$X = 8 \text{ alpacas}$$



Presta atención al orden de las cantidades y como se colocan en la ecuación. Visto de esa manera, esto es muy sencillo.

4. Si el precio de una tijera es el mismo que 5 lápices, 3 lápices cuestan lo mismo que 6 borradores. Por 90 borradores, ¿cuántas tijeras me pueden dar?

- a) 8 b) 9 c) 7 d) 12 e) 10

DESARROLLO

1 tijera _____ 5 lápices
 3 lápices _____ 6 borradores
 90 borradores _____ X tijeras

$$6(5) X = 90(3)(1)$$

$$X = \frac{90(3)(1)}{6(5)}$$

$$X = 9 \text{ tijeras}$$

5. En un local de ropa, con el dinero de 4 pantalones puedo comprar 10 camisas, 5 camisas cuestan lo mismo que 7 chompas. ¿Cuántas chompas se pueden comprar con 2 pantalones?

- a) 5 b) 8 c) 10 d) 9 e) 7

DESARROLLO

4 pantalones _____ 10 camisas
 5 camisas _____ 7 chompas
 X chompas _____ 2 pantalones

$$4(5) X = 10(7)(2)$$

$$X = \frac{10(7)(2)}{4(5)}$$

$$X = 7 \text{ chompas}$$

6. En algún momento en el pasado, el cambio monetario era el siguiente: 8 soles equivalían a 5 cruzeiros, 10 cruzeiros equivalían a 3 pesos y 6 pesos equivalían a 4 dólares. ¿Cuántos soles daban con 2 dólares?

- a) 16 b) 18 c) 10,5 d) 14 e) 13

DESARROLLO

8 soles _____ 5 cruzeiros
 10 cruzeiros _____ 3 pesos
 6 pesos _____ 4 dólares
 2 dólares _____ X soles

$$5 (3)(4) X = 8 (10)(6)(2)$$

$$X = \frac{8 (10)(6)(2)}{(5)3 (4)}$$

$$X = 16 \text{ soles}$$

7.Cuál será el precio de 10 varas de cobre teniendo en cuenta que 6 equivalen a 5 metros, que 18 metros cuestan 54 francos y que cada franco vale \$0,2?

- a) \$12 b) \$8 c) \$6 d) \$5 e) \$1

DESARROLLO

6 varas _____ 5 metros
 18 metros _____ 54 francos
 1 franco _____ \$0,2
 X _____ 10 varas

$$6 (18) X = 5 (54)(0,2)(10)$$

$$X = \frac{5 (54)(0,2)(10)}{18 (6)}$$

$$X = 5 \text{ dólares}$$

8. ¿El trabajo de cuántos hombres equivaldrá el trabajo de 8 niñas, si el trabajo de 4 niñas equivale al trabajo de 3 niños, el de 1 mujer al de dos niños y el de 3 mujeres al de 1 hombre?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

DESARROLLO

X hombres _____ 8 niñas
 4 niñas _____ 3 niños
 2 niños _____ 1 mujer
 3 mujeres _____ 1 hombre

$$4(2)(3)X = 8(3)(1)(1)$$

$$X = \frac{(8)(3)}{4(2)3}$$

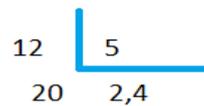
$$X = 1 \text{ hombre}$$

REDUCCIÓN A LA UNIDAD

1. Julio puede pintar una pared en 4 horas. Juan puede pintar la misma en 6 horas. ¿En cuánto tiempo, trabajando juntos, podrían pintar dicha pared?
- a) 2 h b) 2h 10 min c) 2h 15min d) 2h 20 min e) **2h 24 min**

DESARROLLO

$\frac{5}{12}$ ----- 1 hora
 1 total ----- X hora



$$0,4 \text{ horas} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hora}} = 24,0$$

$$X = \frac{(1)(1)}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}$$

$$X = 2,4 \text{ horas}$$

$$X = 2 \text{ horas y } 24 \text{ minutos}$$

2. Un caño "A" puede llenar un tanque 6 horas. Un segundo caño "B" puede llenar el mismo tanque en 4 horas y un tercero "C" lo llenaría en 12 horas. ¿En cuánto tiempo abriendo los tres caños a la vez, se llenará el tanque?
- a) 1 h b) 3 h c) **2h** d) 4 h e) 1,5 h

DESARROLLO



$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{2 + 3 + 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ obra ----- 1 hora

1 obra ----- X

$$x = \frac{1(1)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ horas}$$

3. Una piscina tiene 2 caños A y B. Con A, se llena en 2 horas; con B, se llena en 3 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará con A y B juntos?.

a) 1 h 12 min b) 1 h c) 1h 20 min d) 1h 15 min e) 1h 10min

DESARROLLO

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}$$

$\frac{5}{6}$ llena ----- 1 hora

1 total ----- X

$$x = \frac{1(1)}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5} = 1,2 \text{ horas} = 1 \text{ hora } 12 \text{ minutos}$$

4. Un tanque de agua puede ser llenado por una llave "A", en 3 horas y por otra "B" en 4 horas. Una compuerta "C" vacía el tanque en 2 horas. Si inicialmente el tanque está vacío y se abren simultáneamente las llaves "A" y "B", así como la compuerta "C", al cabo de ¿Cuánto tiempo estará el tanque lleno?

a) 9 h b) 10 h c) 8h d) 12h e) 11 h

DESARROLLO

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4 + 3 - 6}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12} \text{ obra} \text{ --- --- --- --- } 1 \text{ hora}$$

$$1 \text{ obra} \text{ --- --- --- --- } X$$

$$x = \frac{1(1)}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{1}{12}} = 12 \text{ horas}$$

5. Un caño llena una piscina en 6 horas y un desagüe lo desaloja en 7 horas. Si funcionan los dos juntos, ¿en qué tiempo llenarán la piscina?

- a) 13 h b) 1 h c) 36h d) 40h e) 42 h

DESARROLLO

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{7 - 6}{42} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{42} \text{ obra} \text{ --- --- --- --- } 1 \text{ hora}$$

$$1 \text{ obra} \text{ --- --- --- --- } X$$

$$x = \frac{1(1)}{\frac{1}{42}} = \frac{1}{\frac{1}{42}} = 42 \text{ horas}$$

6. Un estanque cuya capacidad es de 300 litros está vacío y cerrado en su desagüe. ¿En cuánto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo tres llaves que vierten; la 1ª, 36 litros en 3 minutos; la 2ª, 48 litros en 6 minutos y la 3ª, 15 litros en 3 minutos?

- a) 10 min b) 11 min c) 12 min d) 13 min e) 14 min

DESARROLLO

$$\frac{36}{3} + \frac{48}{6} + \frac{15}{3} = 12 + 8 + 5 = 25 \text{ litros en 1 minuto}$$

“Si 25 litros lleno en 1 minuto, entonces para llenar 300 litros de capacidad dividido ($300 \div 25 = 12$)”.

Abriendo las tres llaves se abrirá en **12 minutos**.

7. Un estanque tiene tres grifos que vierten: el 1^o, 50 litros en 5 minutos; el 2^o, 91 litros en 7 minutos y el 3^o, 108 litros en 12 minutos, y dos desagües por los que salen 40 litros en 5 minutos y 60 litros en 6 minutos, respectivamente. Si estando vacío el estanque y abiertos los desagües, se abren las tres llaves al mismo tiempo y necesita 40 minutos para llenarse, ¿cuál es su capacidad?

- a) 400 litros b) 500 litros c) 550 litros d) **560 litros** e) 600 litros

DESARROLLO

$$\left[\frac{50}{3} + \frac{91}{7} + \frac{108}{12} - \frac{40}{5} - \frac{60}{6} \right] \text{ litros} \times \text{minuto.}$$

$$[10 + 13 + 9 - 8 - 10] \text{ litros} \times \text{minuto.}$$

$$14 \text{ litros} \times \text{minuto.}$$

“Como se necesita 40 minutos para llenarse multiplicamos

$$14 \frac{\text{litros}}{\text{minuto}} \times 40 \text{ minutos}$$

$$= \mathbf{560 \text{ litros}}$$

8. Un estanque tiene agua hasta su tercera parte; si se abriera una llave que vierte 119 litros en 7 minutos y un desagüe por el que salen 280 litros en 8 minutos, el depósito vaciará en 53 minutos. ¿cuál es la capacidad del estanque?

- a) 2860 litros b) **2862 litros** c) 2867 litros d) 2970 litros e) 3000 litros

DESARROLLO

$$\left[-\frac{119}{7} + \frac{280}{8} \right] \text{ litros} \times \text{minuto.}$$

$$18 \frac{\text{litros}}{\text{minuto}} \times 53 \text{ minutos} = 954 \text{ litros}$$

$[-17 + 35]$ litros \times minuto.

18 litros \times minuto.

$$954 \text{ litros} \text{ --- } \frac{1}{3} \text{ tanque}$$

$$X \text{ --- } 1 \text{ tanque}$$

$$x = \frac{954(1)}{\frac{1}{3}} = 954 (3) = 2862$$

FRACCIONES

1. ¿De qué número es 108 un décimo menos?

- a) 100 b) 110 c) **120** d) 108 e) 102

DESARROLLO

$$x - \frac{1}{10} x = 108$$

$$\frac{10x - x}{10} = 108$$

$$9x = 1080$$

$$x = 120$$

2. ¿De qué número es 84 dos quintos más?

- a) 50 b) 48 c) 42 d) 36 e) **60**

DESARROLLO

$$x + \frac{2}{5} x = 84$$

$$\frac{5x + 2x}{5} = 84$$

$$7x = 84(5)$$

$$x = \frac{84(5)}{7} = 60$$

3. ¿Cuál de los siguientes números reemplazaría al signo de interrogación:

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{?}$$

- a) 14 b) **16** c) 15 d) 18 e) 8

DESARROLLO

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{?}$$

$$? = \frac{12(4)}{3}$$

$$? = \mathbf{16}$$

4. ¿Qué número sustituye los dos signos de interrogación en la siguiente

igualdad: $\frac{1}{?} = \frac{?}{64}$

- a) 7 b) **8** c) 9 d) 10 e) 12

DESARROLLO

$$\frac{1}{?} = \frac{?}{64}$$

$$64 = ?^2$$

$$? = \sqrt{64}$$

$$? = \mathbf{8}$$

5. Los $\frac{3}{4}$ de un número son 60. ¿Cuál es el número?

- a) **80** b) 90 c) 120 d) 150 e) 160

DESARROLLO

$$\frac{3}{4}x = 60$$

$$x = \frac{60(4)}{3}$$

$$x = 20(4)$$

$$x = \mathbf{80}$$

6. Pablo gastó los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{5}$ de 100. ¿Cuánto ha gastado?

- a) 60 b) 30 c) 55 d) 35 e) 65

DESARROLLO

$$\frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right) 100 = 30$$

7. Una rueda recorre 120 m, cuando ha girado los $\frac{3}{5}$ de la rueda. Si da una vuelta completa, ¿Cuánto recorrerá?

- a) 200m b) 72m c) 36m d) 100m e) ninguna

DESARROLLO

$$120 \text{ m} \text{ ----- girado } \frac{3}{5} \text{ rueda}$$

$$X \text{ ----- } 1 \text{ rueda completa}$$

$$x = \frac{120(1)}{\frac{3}{5}} = \frac{120(5)}{3} = 200 \text{ m}$$

8. Tengo x dólares, de los cuales gasto en compras quedándome $\frac{1}{4}$ del dinero y luego regalo la mitad. ¿Cuánto dinero me sobra?

- a) $\frac{3}{4} x$ b) $\frac{3}{8} x$ c) $\frac{1}{2} x$ d) $\frac{1}{8} x$ e) $\frac{6}{4} x$

DESARROLLO

$$\left(x - \frac{3}{4} x \right) - \frac{\left(x - \frac{3}{4} x \right)}{2}$$

$$\frac{4x - 3x}{4} - \frac{\frac{4x - 3x}{4}}{2} = \frac{x}{4} - \frac{\frac{x}{4}}{2} = \frac{x}{4} - \frac{x}{8}$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} = \frac{2x - x}{8} = \frac{1}{8} x$$

PROBLEMAS DE EDADES

1. La edad de Andrea es $x-10$. ¿Cuál será su edad dentro de 10 años?

- a) $x - 20$ b) $x + 10$ c) ~~x~~ d) $10x - 10$ e) $x + 20$

DESARROLLO

$$x - 10 + 10 = x$$

2. A tiene 20 años y B tiene 12 años. ¿Cuándo la edad de A será el doble de la de B?

- a) -4 (hace 4 años) b) 4 (dentro de 4 años) c) -2 (hace 2 años) d) 8 (dentro de 8 años)

DESARROLLO

$$A = 20$$

$$B = 12$$

$$\begin{aligned} A + X &= 2(B + X) \\ 20 + X &= 2(12 + X) \\ 20 + X &= 24 + 2X \\ 20 - 24 &= 2X - X \\ X &= -4 \end{aligned}$$

Hace 4 años

ANÁLISIS DE LAS EDADES

$$A + X = 2(B + X)$$

$$A - 4 = 20 - 4 = 16$$

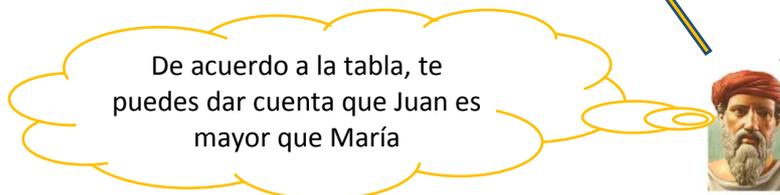
Las edades son 16 y 8

3. Carlos tiene el doble de la edad de Ana, Ana tiene la tercera parte de la edad de María, Juan tiene el triple de la edad de Carlos, entonces se cumple que:

- a) Juan es menor que María b) María es menor que Ana c) Carlos es menor que todos d) Carlos es mayor que María e) Juan es Mayor que María

DESARROLLO

CARLOS	ANA	MARÍA	JUAN
2X	X	3X	3 (2X)
2X	X	3X	6X



4. La edad de un padre es el cuádruplo de la de un hijo. Hace tres años era el quíntuplo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

- a) 36 y 9 b) 40 y 10 c) 48 y 12 d) 60 y 15 e) 28 y 7

DESARROLLO

Padre
4x
4x - 3

Hijo
x
x-3

“Como se pide la edad actual, colocamos el enunciado correspondiente”:

$$\begin{aligned}
 4x - 3 &= 5(x - 3) \\
 4x - 3 &= 5x - 15 \\
 -3 + 15 &= 5x - 4x \\
 12 &= x
 \end{aligned}$$

Padre	Hijo
4x	x
4 (12)	12
48	12

La edad del padre es 48 y la del hijo 12.

5. Antonio tiene el doble de la edad de Luis. Sumadas las dos edades dan 63 años en total. Después de 10 años, ¿qué edad tendrá Antonio?

- a) 21 años b) 42 años c) 52 años d) 41 años e) 44 años

DESARROLLO

Antonio 2x	Luis x		
			Después de 10 Años
		Antonio 2x + 10	Luis x + 10
	$2x + x = 63$	$2(21) + 10$	
	$3x = 63$	$42 + 10$	
	$x = \frac{63}{3}$	52	
	$21 = x$		

Antonio después de 10 años, tendrá **52** años.

6. La edad de un padre es el cuádruplo de la de su hijo y dentro de cinco años será el triple. Hallar la edad actual de cada uno.

- a) Hijo=5; Padre=20 b) Hijo=9; Padre=36 c) **Hijo=10; Padre=40** d) Ninguna

DESARROLLO

Padre 4x	Hijo x		RESULTADOS
4x + 5	x + 5	Padre 4x	Hijo x
		4(10)	10
		40	10
	$4x + 5 = 3(x + 5)$		
	$4x + 5 = 3x + 15$		
	$4x - 3x = 15 - 5$		
	$x = 10$		

7. Ann tiene el doble de la edad de Pedro y dentro de 8 años, la edad de Pedro será la que Juan tiene ahora. ¿Cuál es la edad de Pedro?

- a) 4 b) 8 c) 16 d) 24 e) 30

DESARROLLO

Juan 2x	Pedro x		RESULTADOS
2x + 8	x + 8	Juan 2x	Pedro x
		2(8)	8
		16	8
	$2x = x + 8$		
	$2x - x = 8$		
	$x = 8$		

8. Preguntando Andrés por su edad, respondió: "Hace 9 años, mi edad era los $\frac{2}{3}$ de la edad que tendré el año próximo". ¿Cuál es la edad actual de Andrés?

- a) 27 años b) 28 años c) **29 años** d) 30 años e) 31 años

DESARROLLO

X Actual
X - 9 Hace 9 años

$$x - 9 = \frac{2}{3} (x + 1)$$

$$3(x - 9) = 2x + 2$$

$$3x - 27 = 2x + 2$$

$$x = \mathbf{29}$$

ECUACIONES

1. Cuatro veces un número es igual al número aumentado en 30. Hallar el número.

- a) **10** b) 30 c) 34 d) 28

DESARROLLO

$$4x = x + 30$$

$$4x - x = 30$$

$$3x = 30$$

$$x = \mathbf{10}$$

2. El duplo de un número más el triplo del mismo número es igual a 20. Hallar el número.

- a) 5 b) **4** c) 2 d) 6

DESARROLLO

$$2x + 3x = 20$$

$$5x = 20$$

$$x = 20/5$$

$$x = \mathbf{4}$$

3. Si el triple de un número se resta de ocho veces el número, el resultado es 45. Hallar el número.

- a) -9 b) 9 c) 8 d) 10

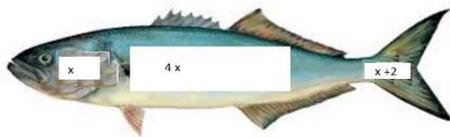
DESARROLLO

$$\begin{aligned}8x - 3x &= 45 \\5x &= 45 \\x &= 45/5 \\x &= 9\end{aligned}$$

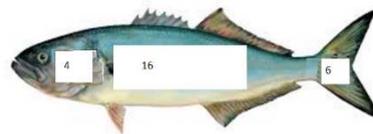
4. El cuerpo de un pez pesa 4 veces lo que pesa la cabeza, y la cola 2 libras más que la cabeza. Si el pez pesa 26 libras, ¿Cuál es el peso de cada parte?

- a) Cabeza=4, cuerpo= 16, cola=6 b) Cabeza=2, cuerpo= 6, cola=4 c) Cabeza=5, cuerpo= 15, cola=7 d) ninguna

DESARROLLO



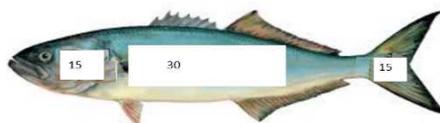
$$\begin{aligned}x + 4x + x + 2 &= 26 \\6x &= 26 - 2 \\6x &= 24 \\x &= 4\end{aligned}$$



5. La cabeza de una foca mide 15 cm de longitud, su cola es tan larga como la cabeza y mide la mitad del lomo. El lomo es tan largo como la cabeza y la cola juntas. Entonces la foca mide:

- a) 30 b) 45 c) 60 d) 65 e) 75

DESARROLLO



$$15 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 15 \text{ cm} \\ = 60 \text{ cm}$$

6. Tres números impares consecutivos suman 39. El número mayor es:

- a) 19 b) 17 c) 11 d) 13 e) **15**

DESARROLLO

1 #	2#	3#	$2x + 5$ es el número mayor. Reemplazamos:
$2x + 1$	$2x + 3$	$2x + 5$	$2x + 5$
$2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 = 39$			$2(5) + 5$
$6x + 9 = 39$			$10 + 5$
$6x = 39 - 9$			15
$6x = 30$			
$x = 5$			



RECUERDA:
 $2X \equiv \text{par}$
 $2X + 1 \equiv \text{impar}$

7. La suma de tres números impares consecutivos es 99. Hallar el mayor de dichos números.

- a) 31 b) **35** c) 37 d) 33 e) 39

DESARROLLO

1 #	2#	3#	2x + 5 es el número mayor.
2x + 1	2x + 3	2x + 5	Reemplazamos:
$2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 = 99$			2x + 5
$6x + 9 = 99$			2 (15) + 5
$6x = 99 - 9$			30 + 5
$6x = 90$			35
$X = 15$			

8. Si el doble de un número más el triplo de su consecutivo es 23. Hallar el número

- a) 5 b) **4** c) 3 d) 6 e) N.A.

DESARROLLO

$$2x + 3(x + 1) = 23$$

$$2x + 3x + 3 = 23$$

$$5x = 23 - 3$$

$$5x = 20$$

$$X = **4**$$

PROMEDIOS

1. En el colegio para pasar de año debe tener un promedio superior o igual a 18 en el semestre. Si Juan tiene las siguientes notas: 1era: 20; 2da: 15; 3ra: 20; 4ta: 20. Si el total de notas son cinco. ¿Cuál debería ser la nota mínima que tiene que sacar Juan en la 5ta nota si es que quiere pasar de año?

- a) 14 b) 18 c) 20 d) **15** e) ninguna

DESARROLLO

$$\frac{20 + 15 + 20 + 20 + x}{5} = 18$$

$$\frac{75 + x}{5} = 18$$

$$75 + x = 18 (5)$$

$$x = 18 - 75$$

$$x = 15$$

2. El promedio de los números N_1 ; N_2 y N_3 es 4. ¿Cuánto vale N_3 , si N_1 es igual a N_2 y N_1 es la mitad de N_3 ?

- a) 8 b) 4 c) 2 d) 9 e) ninguna

DESARROLLO

$$\frac{N_1 + N_2 + N_3}{3} = 4$$

$$N_3 = 12 - N_1 - N_2$$

Pero $N_1 = N_2$ por lo tanto

$$N_3 = 12 - 2N_1$$

$$\text{Pero } 2N_1 = N_3$$

Entonces

$$2N_1 + 2N_1 = 12$$

$$4N_1 = 12$$

$$N_1 = 3$$

Reemplazando

$$N_3 = 2N_1$$

$$N_3 = 2(3)$$

$$N_3 = 6$$

Recordemos que $N_1 = N_2 = 3$ por lo tanto:

$$N_2 = 3$$

Respuesta: Ninguna de las anteriores, pues: $N_1 = 3$, $N_2 = 3$ y $N_3 = 6$.

3. Lucía obtuvo 90 puntos de promedio en cinco exámenes de matemáticas. Las calificaciones fueron 84; 88; 91 y 92. ¿Cuál fue su calificación en el quinto examen?

- a) 87 b) 92 c) 89 d) 96 e) 95

DESARROLLO

$$\frac{84 + 88 + 91 + 92 + x}{5} = 90$$

$$x + 355 = 450$$

$$x = 450 - 355$$

$$x = 95$$

4. El promedio de 3 números es 6. El promedio de otros 2 números es 8. El promedio de los 5 números es:

- a) 34/2 b) 34/5 c) 14/2 d) 14/5 e) 12

DESARROLLO

$$\frac{x + y + z}{3} = 6$$

$$x + y + z = 18$$

$$\frac{m + n}{2} = 8$$

$$m + n = 16$$

$$\frac{18 + 16}{5} = \frac{34}{5}$$

5. El promedio de las 6 calificaciones de matemáticas de un estudiante es 75. Si el profesor elimina la nota más baja, el promedio sube a 85. ¿Cuál era dicha peor nota?

- a) 20 b) 25 c) 30 d) 40 e) 50

DESARROLLO

$$\frac{x + y + z + m + n + o}{6} = 75 \quad \text{Ec1}$$

$$\frac{x + y + z + m + n}{5} = 85 \quad \text{Ec2}$$

Trabajamos la ecuación 2 y reemplazamos en 1.

$$x + y + z + m + n = 85 \quad (5)$$

$x + y + z + m + n = 425$, luego reemplazamos en 1

$$\frac{425 + o}{6} = 75 \quad \longrightarrow \quad o = 75(6) - 425 \quad \therefore \quad o = 25$$

6. 500 estudiantes de cierto centro educativo tienen una estatura promedio de 1,67 m; se conoce además que por cada tres mujeres hay 7 hombres. Si la estatura promedio de las mujeres del centro educativo es 1,60 m ¿cuál es el promedio de la estatura de los varones?

a) 1,68 b) 1,70 c) 1,72 d) 1,71 e) 1,69

DESARROLLO

$$500 - 150 = 350 \text{ (varones)}$$

$$P_T = \frac{\text{Varones}(P_1) + \text{Mujeres}(P_2)}{500}$$

$$1,67 = \frac{350(P_1) + 150(1,6)}{500}$$

$$1,67(500) - 150(1,6) = 350 P_1$$

$$\frac{835 - 240}{350} = P_1$$

$$\frac{595}{350} = P_1$$

$$1,7 = P_1$$

:

$P_T \equiv$ Promedio total

$P_1 \equiv$ Promedio Varones

$P_2 \equiv$ Promedio Mujeres

Mujeres = x; Varones =
500 - x

$$\frac{x}{500 - x} = \frac{3}{7}$$

$$7x = 3(500 - x)$$

$$7x = 1500 - 3x$$

$$7x + 3x = 1500$$

$$10x = 1500$$

$$x = 150 \text{ (Mujeres)}$$

7. El promedio de tres números excede al menor de éstos en 14 unidades y es 10 unidades menos que el mayor de los tres. Si el segundo número es 25, entonces la suma de éstos números es:

a) 60 b) 64 c) 66 d) 61 e) 63

DESARROLLO

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = x+14 \\ \frac{x+y+z}{3} = z-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+25+z}{3} = x+14 \\ \frac{x+25+z}{3} = z-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z+25 = (x+14)3 \\ x+z+25 = (z-10)3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z = (x+14)3 - 25 \\ x+z = (z-10)3 - 25 \end{cases}$$



$$1 + 2z = -30 + 3z$$

$$1 + 30 = 3z - 2z$$

$$z = 31$$

Buscamos x

$$x - z = -24$$

$$x - 31 = -24$$

$$x = -24 + 31$$

$$x = 7$$

Igualando

$$3(x+14) - 25 = 3(z-10) - 25$$

$$x+14 = z-10$$

$$x-z = -14-10$$

$$x-z = -24$$

$$x = -24 + z$$

Con este valor reemplazamos en la

ecuación: $\frac{x+25+z}{3} = x+14$:

$$\frac{-24+z+25+z}{3} = -24+z+14$$

$$\frac{1+2z}{3} = -10+z$$

$x \equiv \text{Menor}$

$y \equiv \text{Mediano} = 25$

$z \equiv \text{Mayor}$

$$X=7; Y=25; z=31$$

Sumamos los valores:

$$7+25+31=63$$

8. El promedio de las calificaciones de los 30 estudiantes del paralelo A es 15, el promedio de calificaciones del paralelo B es 16 y el promedio de calificaciones del paralelo C es 11. Entonces el promedio de las calificaciones de los tres paralelos es:

a) 13

b) 12

c) 14

d) 11 e) 15

DESARROLLO

$$\frac{15 + 16 + 11}{3}$$

$$\frac{42}{3}$$

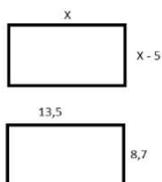
$$14$$

GEOMETRÍA 1

1. Un terreno rectangular tiene de ancho 5m menos que de largo y su perímetro es de 45 m. ¿Sus dimensiones son?

- a) 15 y 20 b) 19.25 y 24.25 c) 20 y 25 d) 21.25 y 26.25 e) ninguna

DESARROLLO



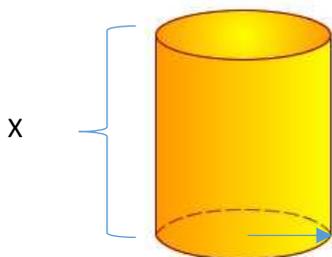
$$\begin{aligned} X + x + -5 + x -5 &= 45 \\ 4x - 10 &= 45 \\ 4x &= 45 + 10 \\ 4x &= 55 \\ X &= 13,7 \end{aligned}$$

De acuerdo con estos datos las medidas son: 13,5 y 8,7. La solución es: ninguna de las anteriores.

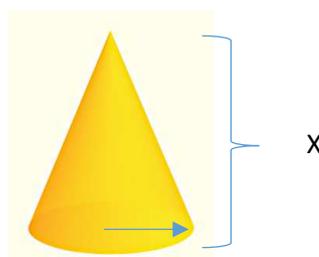
2. Un depósito de forma cilíndrica se llena en 12 horas. ¿En cuántas horas se llenará un depósito en forma cónica que tiene una base y una altura igual a la del cilindro?

- a) 3 b) 6 c) 4 d) 5 e) 7

DESARROLLO



$$\begin{aligned} \text{Área del cilindro} &= \pi r^2 h \\ &= \pi r^2 r \\ &= \pi r^3 \end{aligned}$$



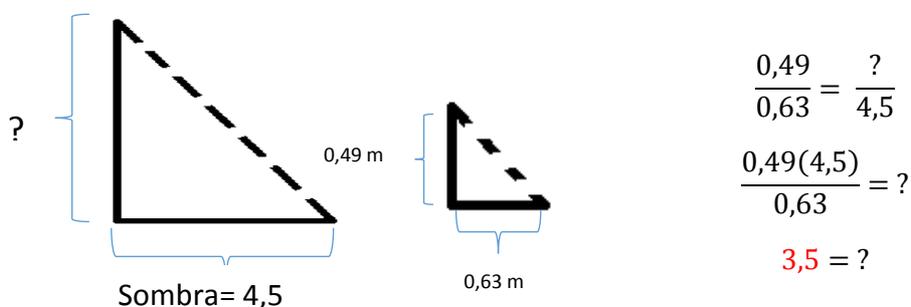
$$\begin{aligned} \text{Área del cono} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 r \\ &= \frac{1}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Nos damos cuenta que el cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro por definición de acuerdo a los datos del problema. La respuesta es sencilla, pues dividimos para tres el área del cilindro: $(12 / 3 = 4 \text{ horas})$

3. ¿Cuál será la altura de una columna que produce una sombra de 4,5 m sabiendo que a la misma hora una varilla vertical de 0,49 m arroja una sombra de 0,63 m?

- a) 4,93 b) 95/78 c) **3,5** d) 3/5 e) 4/3

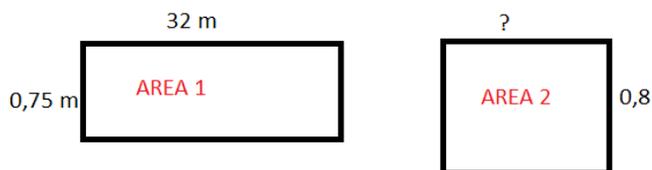
DESARROLLO



4. Una pieza de tela tiene 32 m, de largo y 0,75 m de ancho. Calcular la longitud de otra pieza de la tela de la misma área cuyo ancho es de 0,80 m.

- a) 20,2 m b) 30,3 m c) **30 m** d) 40,4 m e) 27,7 m

DESARROLLO



Según el enunciado ambas figuras tienen la misma área, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \text{Área 2} \\ 32 \text{ m} (0,75 \text{ m}) &= A1 = A2 \\ 24 \text{ m}^2 &= A1 = A2 \end{aligned}$$

Luego hacemos la relación con el área 2:

$$\text{Área 2} = ? (0,8 \text{ m})$$

$$24 \text{ m}^2 = ? (0,8 \text{ m})$$

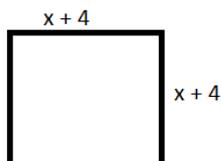
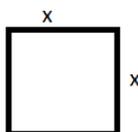
$$\frac{24 \text{ m}^2}{0,8 \text{ m}} = ?$$

$$? = 30 \text{ m}$$

5. Hallar la longitud del lado de un cuadrado, sabiendo que si se aumenta ésta en 4m, su área se incrementa en 64 metros cuadrados:

- a) 2 m b) 3 m c) 6 m d) 5 m e) 8 m

DESARROLLO



$$(x + 4)(x + 4) = x^2 + 64$$

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 64$$

$$8x = 64 - 16$$

$$8x = 48$$

$$x = \frac{48}{8}$$

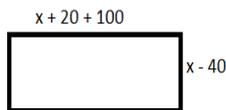
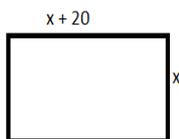
$$x = 6$$

6. Un rectángulo tiene 20 metros más de largo que de ancho. Si el largo tuviese 100 metros más y el ancho 40 metros menos, el área sería la misma.

Hallar las dimensiones del rectángulo primitivo.

- a) L=60; A=40 b) L=70; A=50 c) L=100; A=80 d) L=80; A=60

DESARROLLO



$$x(x + 20) = (x + 20 + 100)(x - 40)$$

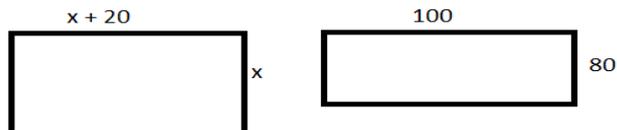
$$x(x + 20) = (x + 120)(x - 40)$$

$$x^2 + 20x = x^2 + 80x - 4800$$

$$4800 = 60x$$

$$\frac{4800}{60} = x$$

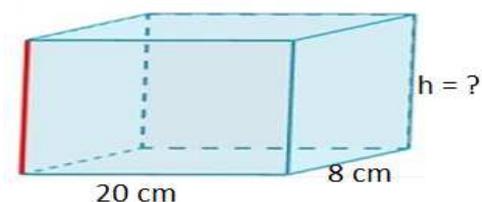
$$80 = x$$



7. Si el volumen total de un ladrillo es 656 cm^3 , el largo es 20 cm y el ancho es 8 cm, su altura es:

- a) 3 b) 4 c) 4,1 d) 28 e) 5

DESARROLLO



$$20(8)x = 650$$

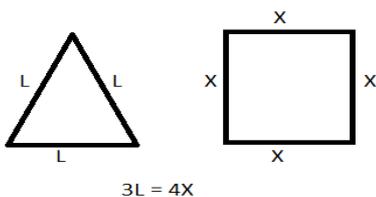
$$x = \frac{656}{160}$$

$$x = 4,1$$

8. Los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero, son iguales. Entonces, el área del triángulo, es el área del cuadrado, como:

- a) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ b) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

DESARROLLO



Área del equilátero = $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$, pero como $3L = 4x$

entonces $L = \frac{4x}{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4x}{3}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{16x^2}{9}\right)$$

$$\frac{4\sqrt{3}x^2}{4}$$

Relacionamos el área del cuadrado con el triángulo:

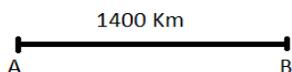
$$\frac{\frac{4\sqrt{3}x^2}{9}}{x^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

VELOCIDADES

1. Para ir de A a B hay que recorrer 1400 Km. Si lleva una velocidad de 50Km/h ¿Cuántas horas debe manejar para recorrer ésta distancia?

1. 25 h b) 26 h c) 27,5 h d) **28 h** e) 30 h

DESARROLLO



$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{1400 \text{ Km}}{50 \frac{\text{Km}}{\text{h}}} = \frac{\frac{1400 \text{ Km}}{1}}{\frac{50 \text{ Km}}{\text{h}}}$$

$$t = \frac{1400 \text{ Km} \cdot \text{h}}{50 \text{ Km}}$$

$$t = \mathbf{28 \text{ horas}}$$

2. De Quito, un domingo por la noche, en que no hay tanto tránsito vehicular, partió un auto rumbo a Machachi. El auto fue a 36 km/h y su destino está aproximadamente a 18 km. El tiempo que empleó, es:

- a) 2h b) 1h c) 30 min. d) 20 min. e) 45 min.

DESARROLLO

DATOS

$$v = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$e = 18 \text{ km}$$

$$t = ?$$

FÓRMULA

$$t = \frac{e}{v} = \frac{18 \text{ Km}}{36 \frac{\text{Km}}{\text{h}}} = \frac{1}{2} \text{ h}$$

$$\frac{1}{2} \text{ h} = \mathbf{30 \text{ minutos}}$$

3. De un mismo lugar parten dos autos A y B, en el mismo sentido y al mismo tiempo. A, va a 36 km/h y B, a 27 Km/h ¿Qué distancia los separará al cabo de 40 minutos?

- a) 6 km b) 4 km c) 8 km d) **6 km** e) 3 km

DESARROLLO

MOVIL A

$$v_1 = 36 \frac{km}{h}$$

$$t_1 = \frac{2}{3} h$$

$$e_1 = v_1 t_1$$

$$e_1 = 36 \frac{km}{h} \cdot \frac{2}{3} h = 24 Km$$

MOVIL B

$$v_2 = 27 \frac{km}{h}$$

$$t_2 = \frac{2}{3} h$$

$$e_2 = v_2 t_2$$

$$e_2 = 27 \frac{km}{h} \cdot \frac{2}{3} h = 18 Km$$

La respuesta se reduce a una resta: 24km-18km = **6km**

4. De una ciudad A a otra B, parte un microbús a 36 Km/h. Un automóvil que recorre la misma distancia, a 72 Km/h, tarde 3 horas menos que el microbús. ¿Qué distancia hay entre A y B?

- a) 108 Km b) 180 Km c) 210 Km d) 216 Km e) 232 Km

DESARROLLO

MOVIL A

Microbus

$$v_1 = 36 \frac{km}{h}$$

$$t_1 = t$$

$$e_1 = v_1 t_1$$

$$e_1 = e_2$$

MOVIL B

Automovil

$$v_1 = 72 \frac{km}{h}$$

$$t_2 = t - 3$$

$$e_2 = v_2 t_2$$

$$e_2 = e_1$$

Ahora colocamos los nuevos datos

Como $e_1 = e_2$

$$e_1 t_1 = v_2 t_2$$

$$36 t_1 = 72 (t_1 - 3)$$

$$36 t_1 = 72 t_1 - 216$$

$$216 = 72 t_1 - 36 t_1$$

$$216 = 36 t_1$$

$$6 = t_1$$

MOVIL A

Microbus

$$v_1 = 36 \frac{km}{h}$$

$$t_1 = 6 \text{ horas}$$

$$e_1 = ?$$

$$e_1 = v_1 t_1$$

$$36 \frac{Km}{h} \cdot 6 h$$

$$216 \text{ Km}$$

MOVIL B

Automovil

$$v_1 = 72 \frac{km}{h}$$

$$t_2 = t_1 - 3 = 6 - 3 = 3 \text{ horas}$$

$$e_2 = ?$$

$$e_2 = t_2 \cdot v_2$$

$$e_2 = 3 \text{ horas} \left(72 \frac{Km}{\text{horas}} \right)$$

$$e_2 = 216 \text{ Km}$$

5. Un automóvil parte de un lugar A hacia otro B, para luego retomar al punto de partida. De A a B la velocidad que emplea es de 22 Km/h y de B a A, 28 Km/h. ¿Cuál es la velocidad media en su recorrido actual?

- a) 25 Km/h b) 24 Km/h c) 24,8 Km/h d) 24,64 Km/h e) 25,64 Km/h

DESARROLLO

$$\frac{22 \frac{Km}{h} + 28 \frac{Km}{h}}{2} = \frac{50 \frac{Km}{h}}{2} = 25 \frac{Km}{h}$$

6. Un automóvil recorre un circuito que tiene la forma de un triángulo equilátero. Da una vuelta partiendo de uno de los vértices, recorriendo el primer lado con una velocidad de 12 Km/h; el segundo con 18Km/h y el tercero con 36Km/h. ¿Cuál es la velocidad media durante todo su recorrido?

- a) 22 Km/h b) 18 Km/h c) 20 Km/h d) 21 Km/h e) N.A.

DESARROLLO

$$\frac{\left(12 \frac{km}{h} + 18 \frac{km}{h} + 36 \frac{km}{h} \right)}{3} = \frac{66 \text{ km}}{3 h} = 22 \frac{km}{h}$$

7. Un observador nota que un tren pasa completamente delante de él, en 12 segundos y que tarda 1 minuto en cruzar un túnel de 432 metros. ¿Cuál es la longitud del tren?
- a) 100 m b) 120 m c) 115 m d) 112 m e) **108 m**

DESARROLLO

Hay que restar 60 segundos -12

segundos = 48 segundos

$$v = \frac{432m}{48s}$$

$$v = 9 \frac{m}{s}$$

Con este dato terminamos el problema:



DATOS

$$v = 9 \frac{m}{s}$$

$$t = 12 s$$

$$e = v \cdot t = 9(12) = \mathbf{108 \text{ metros}}$$

8. Dos autos salen de dos ciudades A y B distantes entre sí 840 Km, para encontrarse. El de A va a 50 Km/h y el de B a 70 Km/h. Si salieron a las 6 a.m. ¿a qué hora se encontrarán?
- a) 12 a.m. b) **1 p.m.** c) 2 p.m. d) 3 p.m. e) 4 p.m.

DESARROLLO

$$\frac{e_1}{v_1} = \frac{e_2}{v_2}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{840 - x}{70}$$

$$70x = 50(840 - x)$$

$$70x = 42000 - 50x$$

$$70x + 50x = 42000$$

$$120x = 42000$$

$$x = 350$$



$$t_1 = \frac{e_1}{v_1}$$

$$t_1 = \frac{350}{50}$$

$$t_1 = 7 \text{ horas}$$

Si salieron a las 6 am + 7 horas da **1 pm**

PORCENTAJES

1. Calcular el 30% del 40% de 2000.

- a) **240** b) 480 c) 60 d) 180 e) 360

DESARROLLO

$$\frac{30}{100} \left(\frac{40}{100} \right) (2000)$$

Respuesta: **240**

2. ¿Qué número dividido por 50 da el 2,8%?

- a) **1,4** b) 2,4 c) 2 d) 46 e) 1,6

DESARROLLO

$$\begin{aligned} \frac{x}{50} &= \frac{2,8}{100} \\ x &= \frac{2,8(50)}{100} \\ x &= \frac{14}{10} = \mathbf{1,4} \end{aligned}$$

3. ¿Qué porcentaje es 60 de $\frac{1}{2}$?

- a) 25% b) **12000%** c) 1000% d) 24000%

DESARROLLO

$$\frac{1}{2} \text{-----} 100\%$$

$$60 \text{-----} x$$

$$x = \frac{60(100\%)}{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{6000\%}{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{6000\% (2)}{1}$$

$$x = 12000\%$$

4. ¿El 50% de 2 más 1 me da?

- a) 2,5 b) 1,5 c) 5/2 d) 3/2 e) **2**

DESARROLLO

$$\frac{50}{100}(2) + 1$$

$$1 + 1$$

$$2$$

5. ¿De qué número es 96 el 20 % menos?

- a) **120** b) 76 c) 109 d) 80 e) 114

DESARROLLO

$$x - 20\% x = 96$$

$$x - \frac{20}{100} x = 96$$

$$\frac{100x - 20x}{100} = 96$$

$$80 x = 9600$$

$$x = \frac{9600}{80}$$

$$x = 120$$

6. ¿Qué número disminuido en su 35% equivale a 442?

- a) 597 b) 600 c) 642 d) **680** e) 692

DESARROLLO

$$x - 35\% x = 442$$

$$\frac{x}{1} - \frac{35}{100} x = 442$$

$$65x = 44200$$

$$x = \frac{44200}{65}$$

$$x = \mathbf{680}$$

7. El 20% de X es Y, el 20% de Y es Z, ¿Qué porcentaje de X es Z?

- a) 40% b) 20% c) **4%** d) 2% e) 1%

DESARROLLO

$$20\% x = y$$

$$20\% 20\% x = z$$

$$20\% y = z$$

$$\frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100} x = z$$

$$\frac{4}{100} x = z \rightarrow \mathbf{4\%} x = z$$

8. En cierto poblado de Santo Domingo de los Tsáchilas, viven 800 mujeres. De ellas el 3% se adorna con un solo pendiente. Del otro 97% la mitad usa dos pendientes y la otra mitad ninguno. ¿Cuántos pendientes llevan en total estas mujeres?

- a) 600 b) 700 c) **800** d) 900 e) 1000

DESARROLLO

Mujeres= 800; el 3% usa un solo pendiente = 24 mujeres y estas 24 mujeres equivalen a 24 pendientes.

Ahora buscamos el otro 97%: $\frac{800(97\%)(2)}{2} = 800 \left(\frac{97}{100}\right) = 776$.

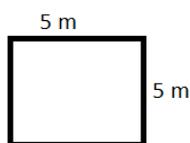
776 son los pendientes que usan la mitad del 97% de las mujeres.

Finalmente sumamos: $776+24= 800$

GEOMETRÍA 2

1. Hallar el perímetro y el área del cuadrado de lado igual a 5m.

- a) 100 y 50
- b) 100 y 25
- c) 20 y 25
- d) 25 y 25

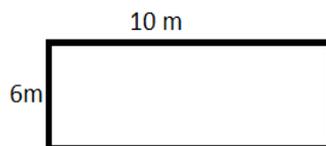


Perímetro = $p = 5\text{cm}+5\text{cm}+5\text{cm}+5\text{cm}+5\text{cm}=20\text{cm}$

Área= base. altura = $5\text{m} (5\text{m}) = 25 \text{ m}^2$

2. Hallar el perímetro y el área del rectángulo de lados igual a 10m. y 6m

- a) 32 y 60
- b) 34 y 66
- c) 30 y 66
- d) 34 y 60

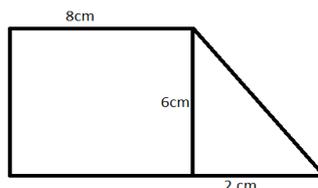


$P = 10\text{m}+6\text{m}+10\text{m}+6\text{m}=32\text{m}$

$A = (10\text{m}) (6\text{m}) =60\text{m}^2$

3. Hallar el perímetro y el área del trapecio rectángulo:

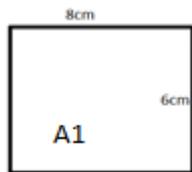
- a) $20 + 2\sqrt{10}$ y 50
- b) $24 + 2\sqrt{10}$ y 54
- c) 28 y 50
- d) $20 + 2\sqrt{5}$ y 50



DESARROLLO

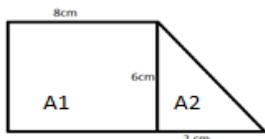
PERÍMETRO 1

Hacemos un diagrama guía y buscamos las áreas y perímetros por separado



$$p = 8 + 6 + 8 + 2$$

$$p = 24$$



$$r = \sqrt{2^2 + 6^2}$$

$$r = \sqrt{40}$$

$$r = 2\sqrt{10}$$

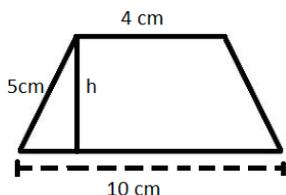
2

Con estos datos podemos ubicar el área 1 y área 2:

$$\begin{aligned} A_{total} &= A1 + A2 \\ &= \frac{1}{2} b \cdot h + b \cdot h \\ &= \frac{1}{2} (2)(6) + 8(6) \\ &= 6 + 48 \\ &= 54 \end{aligned}$$

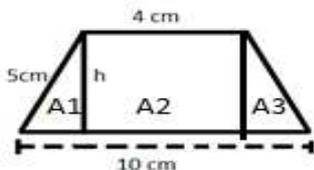
4. Hallar el perímetro y el área del trapecio isósceles:

- a) 24 y 28
- b) 32 y 30
- c) 28 y 30
- d) 36 y



DESARROLLO

Haciendo un diagrama tentativo, buscamos h y luego desarrollamos las áreas:



Primero buscamos p y h

$$p = 5 + 4 + 5 + 10 = 24$$

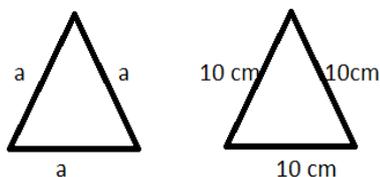
$$\text{Buscamos h: } \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\text{Área total} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= \frac{1}{2}(3)(h) + 4(h) + \frac{1}{2}(3)h \\ &= \frac{1}{2}(3)(4) + 4(4) + \frac{1}{2}(3)4 \\ &= 28m^2 \end{aligned}$$

5. Hallar el perímetro y el área del triángulo equilátero de lado igual a 10cm.

- a) 40 y $2\sqrt{3}$
- b) 35 y $25\sqrt{3}$
- c) 30 y $25\sqrt{3}$
- d) 30 y $2\sqrt{3}$



Usamos la siguiente definición:

$$\text{Área triángulo equilátero} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Área

Perímetro

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} (10 \text{ cm})^2$$

$$p = (10 + 10 + 10) \text{ cm}$$

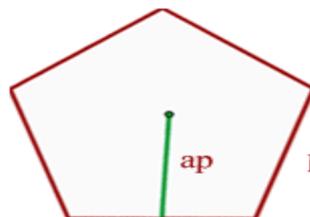
$$= 30 \text{ cm}$$

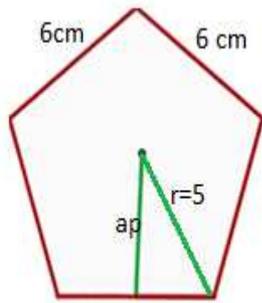
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} 100 \text{ cm}^2$$

$$= 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

6. Hallar el perímetro y el área del pentágono regular de lado igual a 6cm. y radio igual a 5 cm.

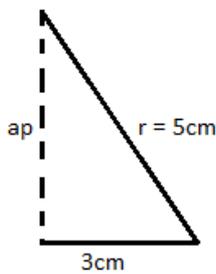
- a) 32 y 60
- b) 30 y 50
- c) 30 y 60
- d) 30 y 55





$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{5L \cdot ap}{2} \\ &= \frac{5(6)(4)}{2} = 60 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Perímetro} = (6 + 6 + 6 + 6) \text{ cm} = 30 \text{ cm}$$



$$ap = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

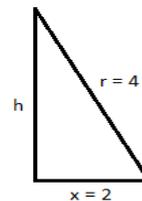
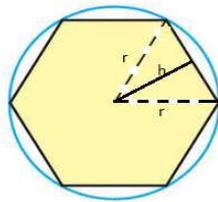
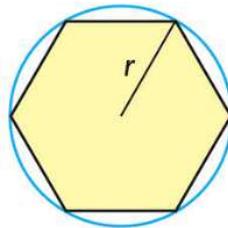
$$ap = \sqrt{25 - 9}$$

$$ap = \sqrt{16}$$

$$ap = 4$$

7. Hallar el área de un Hexágono inscrito en una circunferencia de 4cm. de radio.

- a) $24\sqrt{5}$
- b) $12\sqrt{3}$
- c) $12\sqrt{5}$
- d) $24\sqrt{3}$

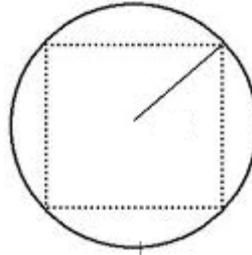


$$\begin{aligned} A &= \frac{x \cdot h}{2} \\ A &= 2\sqrt{3}(12) \\ &= 24\sqrt{3} \end{aligned}$$

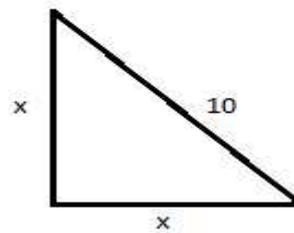
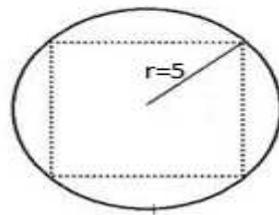
$$\begin{aligned} h &= \sqrt{r^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{4^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{16 - 4} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

8. Hallar el perímetro y el área del triángulo equilátero de lado igual a 10cm.

- e) 40 y $2\sqrt{3}$
- f) 35 y 25
- g) 30 y 25
- h) 30 y $2\sqrt{3}$



DESARROLLO



$$\begin{aligned} (10)^2 &= x^2 + x^2 \\ 100 &= 2x^2 \\ \frac{100}{2} &= x^2 \\ 50 &= x^2 \\ x &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Area triángulo} &= \frac{b \cdot h}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}(5\sqrt{2})}{2} \\ &= \frac{25(\sqrt{2})^2}{2} \\ &= \frac{25(2)}{2} \\ &= 25 \end{aligned}$$

ANEXO 2

EVIDENCIA FOTOGRÁFICA







