

AÑO:	2023 - 2024	PERIODO:	PAO - I
MATERIA:	MATG1052 Métodos Numéricos	PROFESOR:	Edison Del Rosario
EVALUACIÓN:	3ra Evaluación	FECHA:	12-Septiembre-2023

**COMPROMISO DE HONOR**

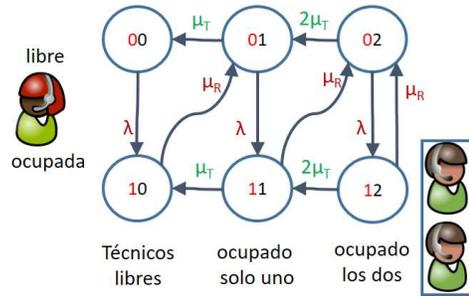
Yo, ....., al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora ordinaria para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.  
 Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.  
 "Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".  
 FIRMA: ..... NÚMERO DE MATRÍCULA: ..... PARALELO: .....

**Indicaciones generales:** Desarrolle los temas en forma ordenada, con letras y números claros, legibles a tamaño suficiente para facilitar la lectura. Todos los temas deben ser desarrollados para la forma analítica, con lápiz y papel, con expresiones matemáticas completas, donde se muestren los valores usados en las operaciones. Los cálculos numéricos pueden ser realizados usando los algoritmos, en cuyo caso adjunte los archivos correspondientes en el formato indicado en tareas: algoritmo.py, resultados.txt y gráficas.png al final de la evaluación en aula virtual.

**Tema 1** (25 puntos) Un call-center para soporte técnico de una mediana empresa se conforma de una recepcionista y dos técnicos. Se considera como "satisfecho" al cliente si su llamada fue procesada por la recepcionista y cualquiera de los técnicos.

La probabilidad  $P_{RT}$  de atención a llamadas se modelan con un sistema de ecuaciones (cadena de Markov) que al ser resuelta muestra probabilidad de encontrarse en cada estado.

$$\begin{aligned} \lambda P_{00} &= \mu_T P_{01} \\ (\mu_T + \lambda) P_{01} &= 2 \mu_T P_{02} + \mu_R P_{10} \\ (2 \mu_T + \lambda) P_{02} &= \mu_R P_{11} + \mu_R P_{12} \\ \mu_R P_{10} &= \lambda P_{00} + \mu_T P_{11} \\ (\mu_R + \mu_T) P_{11} &= \lambda P_{01} + 2 \mu_T P_{12} \\ (\mu_R + 2 \mu_T) P_{12} &= \lambda P_{02} \end{aligned}$$



$\lambda = 1/10, \mu_R = 1/3, \mu_T = 1/15$   
 La suma de probabilidades es uno.  
 $P_{00} + P_{01} + P_{02} + P_{10} + P_{11} + P_{12} = 1$

Los estados descritos en la gráfica y ecuaciones expresan el proceso de atención:

- En una llamada, los clientes son atendidos por la **recepcionista** que toma los datos y redirige la llamada a uno de los **técnicos** disponible (libre).
- Si un cliente llama mientras la recepcionista está ocupada, el cliente recibe tono de ocupado y cierra.
- Si ambos técnicos están disponibles, se selecciona uno con igual probabilidad.
- Si solo hay un técnico disponible, se le asigna la llamada.
- Si los dos técnicos están ocupados, se pierde la llamada.

Los tiempos de atención y llamadas siguen distribuciones exponenciales: recepcionista es de 3 minutos ( $\mu_R = 1/3$ ), por técnico es de 15 minutos ( $\mu_T = 1/15$ ). Los clientes llaman a intervalos de 10 minutos ( $\lambda = 1/10$ ).

- Plantee el sistema de ecuaciones, reemplazando la última ecuación con la que indica que la suma de probabilidades por cada estado  $P_{RT}$  suma 1.
- Establezca la forma matricial del sistema de ecuaciones y como matriz aumentada
- De ser necesario realice el pivoteo parcial por filas.
- Comente sobre la convergencia del sistema de ecuaciones y justifique sus observaciones usando los errores entre iteraciones o número de condición.
- Use un método directo, realizando al menos 3 iteraciones con todas las expresiones.

**Rúbrica:** literal a (2 puntos), literal b (5 puntos), literal c (3puntos), literal d (5 puntos), literal e (10 puntos).

**Referencia:** [1] 1Eva\_IT2017\_T3 Call Center Operadora y Dos Técnicos. ESTG1003-Blog de procesos estocásticos.

[http://blog.espol.edu.ec/estg1003/1eva\\_it2017\\_t3-call-center-operadora-y-dos-tecnicos/](http://blog.espol.edu.ec/estg1003/1eva_it2017_t3-call-center-operadora-y-dos-tecnicos/)

[2] Cadenas de Markov 01 Introducción. Goal Project. 30 agosto 2021. <https://www.youtube.com/watch?v=PGCJR9AEf0Y>

**Tema 2** (25 puntos) Se requiere determinar el área urbana a restaurar que devastada por incendios en una isla del océano Pacífico delimitada por la playa y mostrada en la figura.

Se dispone de algunos puntos de referencia tomados desde imágenes satelitales mostrados en la tabla.

- Plantear el ejercicio indicando el método de integración numérica a usar. Justifique su selección
- Desarrolle el método para los datos de la frontera superior
- Realice los cálculos para la frontera inferior delimitada por playa
- Estime la cota de error en los cálculos.



**Frontera superior**

X	350	300	350	420	444	484	504	534	568	620	660	720	780	740	800	800
Y	0	315	315	315	320	336	400	415	462	510	550	550	490	390	390	150

**Frontera inferior**

X	350	459	666	800
Y	0	63	130	150

**Rúbrica:** literal a (5 puntos), literal b (10 puntos), literal c (5 puntos), literal d (5 puntos)

**Referencia:** Incendios forestales devastan partes de la isla de Maui. DW español. 11 agosto 2023.

<https://www.youtube.com/watch?v=MTu02segoe4>

**Tema 3.** (20 puntos) Continuando con el ejercicio del área devastada por el incendio, con el objetivo de simplificar el registro de datos se propone describir los perfiles usando polinomios.

- Plantear el ejercicio para realizar interpolación polinómica. Describa criterios, intervalos, método.
- Desarrolle el o los polinomios para la frontera superior, siguiendo el método propuesto en el literal a.
- Desarrolle el o los polinomios para la frontera inferior, con un método diferente al literal a.
- Usando un algoritmo, grafique al menos un resultado del literal b y c.

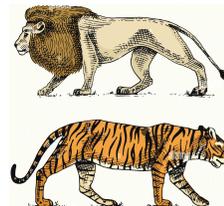
**Rúbrica:** literal a (5 puntos), literal b (5 puntos), literal c (5 puntos), literal d (5 puntos)

**Tema 4.** (30 puntos) Considere dos especies de animales que ocupan el mismo ecosistema, en competencia por los recursos de alimentos y espacio definidas por:

Donde las poblaciones de  $x(t)$  y  $y(t)$  se miden en miles y  $t$  en años. Use un método numérico para analizar las poblaciones en un periodo largo para el caso que:  $x(0)=1.5$ ,  $y(0)=3.5$

$$\frac{dx}{dt} = x(2 - 0.4x - 0.3y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - 0.1y - 0.3x)$$



- Realice el planteamiento del ejercicio usando Runge-Kutta de 2do Orden
- Desarrolle tres iteraciones para  $x(t)$ ,  $y(t)$  con tamaño de paso  $h=0.5$ .
- Usando el algoritmo, aproxime la solución entre  $t=0$  a  $t=10$  años, adjunte sus resultados en la evaluación.
- Realice una observación sobre el crecimiento de la población de las especies  $y(t)$  a lo largo del tiempo.

**Rúbrica:** literal a (5 puntos), literal b (15 puntos), literal c (5 puntos), literal d (5 puntos)

**Referencia:** [1] Modelos de competencia ejercicio 10. Zill, Dennis G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Edición 9. P109. p111.

[2] Competition in ecosystems. Stile Education. 11 septiembre 2019. <https://www.youtube.com/watch?v=L24Kp72V67g>