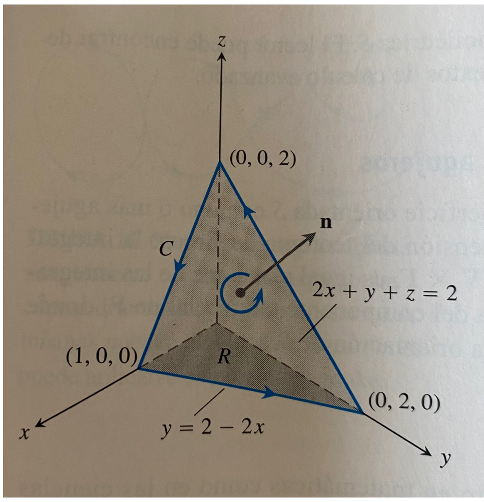
N. Córdova, L. Pérez, P. Ramos, L. Rodríguez

SOLUCIÓN Y RÚBRICA EXAMEN DE MEJORAMIENTO
CÁLCULO VECTORIAL PA02 2021

TEMA 1-a:

Dado el campo vectorial $F(x, y, z) = (xz, xy, xz)$ y siendo la curva C la frontera de la porción del plano $2x + y + z = 2$ en el primer octante, recorrida en el sentido antihorario vista desde arriba, evalúe $\int_c F \cdot dr$:

a) **Utilizando integrales de línea**
b) **Utilizando el Teorema de Stokes**



a) $C_1: (0,2,0) \to (0,0,2)$; $C_2: (0,0,2) \to (1,0,0)$; $C_3: (1,0,0) \to (0,2,0)$

C_1: $x = 0, dx = 0 ; z = 2 - y ; dz = -dy$

$$\int_0^1 0\, dx = 0$$

C_2: $y = 0, dy = 0 ; z = 2 - 2x ; dz = -2\, dx$

$$\int_0^1 x(2-2x) + 0 + x(2-2x)(-2)\, dx = -2\int_0^1 (x^2 - x)\, dx = -\frac{1}{3}$$

C_3: $z = 0, dz = 0 ; y = 2 - 2x ; dy = -2\, dx$

$$\int_1^0 0 + x(2-2x)(-2) + 0\, dx = -4\int_1^0 (x^2 - x)\, dx = -\frac{2}{3}$$

$$\int_c \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{dr} = \boldsymbol{0}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}-\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}=-\boldsymbol{1}$$

b) El plano es la superficie de nivel $f(x,y,z)=2$ de la función $f(x,y,z)=2x+y+z$, por lo tanto el vector unitario normal es:

$$\vec{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}}$$

Lo cual es consistente con el movimiento antihorario alrededor de C.

$$\nabla XF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & xz \end{vmatrix}=(0,x-z,y)$$

En el plano, z es igual a $2-2x-y$, de tal forma que:

$$\nabla XF=(0,x-(2-2x-y),y)=(0,3x+y-2,y)$$

$$(\nabla XF)\cdot\,\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{6}}\,(3x+y-2)$$

La circulación estará dada por: $\int_c \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr}=\iint_S\,(\nabla XF)\cdot\,\vec{n}\;\,dS$

El elemento de área de la superficie es: $dS=\frac{\nabla f}{|\nabla f\cdot k|}=\frac{\sqrt{6}}{1}\,dA=\,\sqrt{6}\,dA$

$$\int_c \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr}=\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2-2x}}\frac{1}{\sqrt{6}}\,(3x+y-2)\,\sqrt{6}\,dy\,dx=\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2-2x}}(3x+y-2)\,dy\,dx$$

$$\int_c \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr}=-\boldsymbol{1}$$

TEMA 1-b:

Considere la superficie S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$, orientada según la normal exterior a la esfera y el campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, yz^2, x^2z)$. Evalúe la integral $\int\int_S\ rot\, F \cdot N\ dS$:

a) **Directamente**
b) **Utilizando el teorema de Stokes**

Solución: En primer lugar, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -y & yz^2 & x^2z \end{vmatrix} = (-2yz, -2xz, 1).$$

Dado que $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, parametrizamos la superficie S mediante

$$S(x, y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right), \quad (x, y) \in D,$$

donde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1\right),$$

y tiene la orientación exterior a la esfera porque $S_x \times S_y(0, 0) = (0, 0, 1)$. Calculamos directamente

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \iint_D \operatorname{rot} F(S(x, y)) \cdot S_x \times S_y\, dx\, dy = \iint_D (1 - 4xy)\ dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(1 - 4r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\right)\ r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - r^4 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\right]_0^2\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 - 8 \operatorname{sen} 2\theta)\ d\theta = [2\theta + 4\cos 2\theta]_0^{2\pi} = 4\pi,$$

usando el cambio de variables a coordenadas polares.

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \oint_C F \cdot dr,$$

donde la curva C, que es la frontera de S, viene dada por $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$. Una parametrización de la curva con orientación inducida por la superficie orientada por la normal exterior a la esfera es

$$r(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Calculamos

$$\oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen} t, 0, 0) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\ dt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = 4\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = 2\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Rúbrica general:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe calcular la circulación de un campo a lo largo de una trayectoria, directamente y aplicando el Teorema de Stokes	No puede calcular correctamente la integral de línea parametrizando todas las curvas	Calcula correctamente la integral de línea parametrizando todas las curvas, llegando correctamente el resultado o cometiendo errores en el proceso	Calcula el rotacional, define la superficie y el vector normal, y establece correctamente el teorema de Stokes o comete errores en el proceso	Desarrolla correctamente el ejercicio calculando correctamente la integral y comprobando el teorema de Stokes o comete algún error no significativo
	0-4	5-10	11-17	18-20

TEMA 2-a:

Siendo C el contorno del triángulo con vértices en los puntos (1,1) , (2,2) y (1,3) recorrido en sentido positivo, evalúe la integral $\oint_C \; 2(x^2+y^2)\,dx + \;(x+y)^2\;dy$

a) De manera directa

b) Utilizando el Teorema de Green

a) Calculamos directamente la integral de línea en forma diferencial:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_3} P\,dx + Q\,dy,$$

donde C_1 es el segmento que une los puntos $(1,1)$ y $(2,2)$, C_2 es el segmento que une los puntos $(2,2)$ y $(1,3)$, y C_3 es el segmento que une los puntos $(1,3)$ y $(1,1)$. La recta que contiene a C_1 es $y=x$, la que contiene a C_2 es $y-2=-(x-2)$, es decir $y=4-x$, siendo $x=1$ la recta que contiene a C_3. Parametrizamos C_1 con $(x,y)=(t,t)$, $1\leq t\leq 2$, el segmento C_2 con $(x,y)=(4-t,t)$, $2\leq t\leq 3$, y C_3 con $(x,y)=(1,3-t)$, $0\leq t\leq 2$. A continuación, calculamos las tres integrales de línea

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_1^2 \left[2\left(t^2+t^2\right)+(2t)^2\right]dt = \int_1^2 8t^2 dt = 8\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{56}{3}.$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} P\,dx + Q\,dy &= \int_2^3 \left[2\left((4-t)^2+t^2\right)(-1)+4^2\right]dt\\ &= \int_2^3 \left[(-2)\left(16-8t+2t^2\right)+16\right]dt\\ &= \int_2^3 \left(-4t^2+16t-16\right)dt = (-4)\int_2^3 \left(t^2-4t+4\right)dt\\ &= (-4)\int_2^3 (t-2)^2\,dt = (-4)\left[\frac{(t-2)^3}{3}\right]_2^3 = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

$$\int_{C_3} P\,dx + Q\,dy = \int_0^2 (4-t)^2(-1)\,dt = \left[\frac{(4-t)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}-\frac{64}{3} = -\frac{56}{3}.$$

Por tanto, tenemos que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -\frac{4}{3}.$$

b) Por medio del Teorema de Green:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

Dado que $Q_x - P_y = 2(x+y) - 4y = 2x - 2y$, tenemos que calcular

$$I = \iint_D (2x-2y)\;dx\,dy,$$

donde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2,\;\; x\leq y\leq 4-x\}$. Entonces,

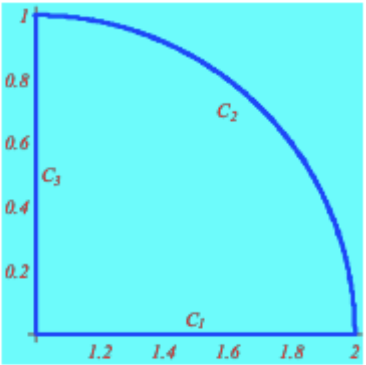
$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_x^{4-x} (2x-2y)\, dy\, dx = \int_1^2 \left[2xy - y^2\right]_x^{4-x} dx \\
&= \int_1^2 \left[2x(4-x) - (4-x)^2 - 2x^2 + x^2\right] dx \\
&= \int_1^2 \left(-4x^2 + 16x - 16\right) dx = (-4) \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx \\
&= (-4) \int_1^2 (x-2)^2\, dx = (-4) \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2 \\
&= (-4) \left[-\frac{(-1)^3}{3}\right] = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

TEMA 2-b:

Sean la región plana $R = \{(x,y) \in R^2;\ 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2},\ x \ge 1\}$ y la curva C frontera de R con orientación positiva. Evalúe la integral $\oint_C -y^2\, dx + x\, dy$

a) **Directamente**
b) **Utilizando el Teorema de Green**

Solución.



La curva frontera de R con orientación positiva verifica $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 se parametriza con $r_1(t) = (t, 0)$, $1 \le t \le 2$. Observemos que C_2 es el trozo de la circunferencia

$$y^2 = 2x - x^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

tal que $x \ge 1$, $y \ge 0$. Entonces $r_2(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le \pi/2$, es una parametrización de C_2. Finalmente, parametrizamos C_3 mediante $r_3(t) = (1, 1-t)$, $0 \le t \le 1$. Calculamos las integrales de línea

$$\int_{C_1} -y^2\, dx + x\, dy = \int_1^2 0\, dt = 0,$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} -y^2\, dx + x\, dy &= \int_0^{\pi/2} \left[-\operatorname{sen}^2 t\,(-\operatorname{sen} t) + (1+\cos t)\cos t\right] dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^3 t + \cos^2 t + \cos t\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\left(1 - \cos^2 t\right)\operatorname{sen} t + \frac{1+\cos 2t}{2} + \cos t\right] dt \\ &= \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

$$\int_{C_3} -y^2\, dx + x\, dy = \int_0^1 -dt = -1.$$

En consecuencia, el valor de la integral es

$$\oint_C -y^2\, dx + x\, dy = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

La región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\;\; 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\right\}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\oint_C -y^2\,dx + x\,dy &= \iint_R (1 + 2y)\,dx\,dy \\
&= \iint_R dx\,dy + \iint_R 2y\,dx\,dy \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} 2y\,dy \right) dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left[y^2\right]_0^{\sqrt{2x-x^2}} dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{4} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Rúbrica general:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo interpretar y aplicar el teorema de Green para el cálculo de integrales de línea	No puede calcular correctamente la integral de línea parametrizando todas las curvas o en forma diferencial	Calcula correctamente la integral de línea de manera directa llegando al resultado correcto o comete errores en el proceso	Calcula correctamente La integral de línea anterior e Identifica la curva cerrada y la región plana limita por dicha curva, pero comete errores al aplicar el teorema de Green.	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva, verifica hipótesis y aplica correctamente el teorema de Green resolviendo la integral y comprueba el resultado o comete algún error no significativo
	0-4	5-10	11-17	18-20

TEMA 3-a:

Dada la región R limitada por las curvas:

$$y = \sqrt{x}\,,\ \ y = \sqrt{2x}\,,\ \ y = \frac{x^2}{3}\ ,\ \ y = \frac{x^2}{4}$$

Determine el área de la región R, utilizando el siguiente cambio de variables:

$$x = u^{1/3}\, v^{2/3}\ \ ,\ \ y = u^{2/3}\, v^{1/3}$$

La región R está dada por:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3y} \le x \le \sqrt{4y},\ \ \sqrt{x} \le y \le \sqrt{2x}\right\}$$

El cambio de variables asignado implica que:

$$\frac{x^2}{y} = \frac{u^{2/3}v^{4/3}}{u^{2/3}v^{1/3}} = v, \quad \frac{y^2}{x} = \frac{u^{4/3}v^{2/3}}{u^{1/3}v^{2/3}} = u.$$

Entonces la región S en el plano uv está dada por:

$$S = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 2,\ \ 3 \le v \le 4\right\}$$

Prodedemos a calcular el Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Finalmente, utilizando el cambio de variables, se calcula el área solicitada:

$$a(R) = \iint\limits_R dx\,dy = \iint\limits_S \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{3}\,du\,dv$$

$$a(R) = \frac{1}{3}\ u^2$$

Rúbrica:

<table>
<tr><th>Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño</th></tr>
<tr><td rowspan="3">El estudiante sabe calcular una integral doble mediante un cambio de variables adecuado.</td><td>Insuficiente</td><td>En Desarrollo</td><td>Desarrollado</td><td>Excelente</td></tr>
<tr><td>No puede establecer bien la región de integración original ni escoger un cambio de variables adecuado.</td><td>Establece bien la región de integración original, escoge bien el cambio de variables, pero comete errores al calcular el Jacobiano o plantear la nueva región de integración.</td><td>Desarrolla bien el ejercicio hasta calcular el Jacobiano, pero plantea mal la integral final o comete errores al calcularla.</td><td>Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor de la integral doble solicitada o comete algún error no significativo.</td></tr>
<tr><td>0-2</td><td>3-8</td><td>9-12</td><td>13-15</td></tr>
</table>

TEMA 3-b:

a) **Utilizando integrales dobles y coordenadas polares, calcule el área de la región plana encerrada por la lemniscata de ecuación $(x^2+y^2)^2 = 9(x^2-y^2)$**

b) **Utilizando integrales dobles y coordenadas cilíndricas, determine el volumen del sólido interior al cilindro $(x^2+y^2)^2 = 9(x^2-y^2)$ y al hemisferio de ecuación $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$**

Solución: (a) La ecuación de la lemniscata en coordenadas polares es $r^4 = 9r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)$. Usando una identidad trigonométrica y simplificando obtenemos $r^2 = 9\cos(2\theta)$. El área puede calcularse utilizando la fórmula para curvas en coordenadas polares $A(R) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$, o mediante la integral doble $A(R) = \iint\limits_R dx\,dy$. Utilizando la simetría de la curva, el área es

$$A(R) = 4\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\theta)\,d\theta = \frac{36}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)d\theta = 18\left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9.$$

Usando integración doble, teniendo en cuenta la simetría de la curva y con el cambio a coordenadas polares, obtenemos

$$A(R) = \iint\limits_R dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[r^2\right]_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} d\theta$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,d\theta = 18\left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9.$$

$$A(R) = 9\,u^2$$

(b) Para calcular el volumen usaremos coordendas cilíndricas. Haciendo uso de la simetría del sólido y teniendo en cuenta que la ecuación del hemisferio en coordenadas cilíndricas es $z = \sqrt{9-r^2}$, obtenemos

$$V = \iint\limits_R \sqrt{9-x^2-y^2}\,dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} \sqrt{9-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(9-r^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} d\theta = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((9-9\cos(2\theta))^{3/2} - 27\right) d\theta$$

$$= 36\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-(1-\cos(2\theta))^{3/2}\right) d\theta = 36\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\left(2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}\right) d\theta$$

$$= 36\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-2\sqrt{2}\operatorname{sen}^3\theta\right) d\theta = 9\pi - 72\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$= 9\pi - 72\sqrt{2}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(3\pi - 16\sqrt{2} + 20\right).$$

$$V = 3\left(3\pi - 16\sqrt{2} + 20\right)u^3$$

Rúbrica:

<table>
<tr><th>Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño</th></tr>
<tr><td rowspan="3">El estudiante sabe calcular el área de una región plana y el volumen de una región tridimensional utilizando coordenadas polares.</td><td>Insuficiente</td><td>En Desarrollo</td><td>Desarrollado</td><td>Excelente</td></tr>
<tr><td>Establece bien la región de integración y aplica el cambio a coordenadas polares, pero no concreta el valor del área.</td><td>Establece bien la región de integración original, escoge bien el cambio de variables y aplicando integrales dobles calcule correctamente el valor del área o comete errores en el proceso.</td><td>Interpreta bien la región considerándola en coordenadas polares o interpretando en coordenadas cilíndricas, intenta calcular la integral, pero comete errores en el proceso.</td><td>Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor de la integral doble solicitada llegando al resultado correcto del volumen o comete algún error no significativo.</td></tr>
<tr><td>0-4</td><td>5-7</td><td>8-12</td><td>13-15</td></tr>
</table>

TEMA 4-a:

Determine la ecuación en que se transforma la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, donde $u = u(x, y)$ es de clase C^2, con el cambio a coordenadas polares $x = r\, cos\, t$, $y = r\, sen\, t$

Utilizando la regla de la cadena, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos t + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen} t,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} (-r \operatorname{sen} t) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \cos t)$$

A continuación, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos t + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen} t \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 t + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 t.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) r \operatorname{sen} t - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos t + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) r \cos t - \frac{\partial u}{\partial y} r \operatorname{sen} t \\
&= -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (-r \operatorname{sen} t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} (r \cos t) \right) r \operatorname{sen} t - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos t \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (-r \operatorname{sen} t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (r \cos t) \right) r \cos t - \frac{\partial u}{\partial y} r \operatorname{sen} t \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \operatorname{sen}^2 t - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \operatorname{sen} t \cos t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 t - r \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos t + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen} t \right)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

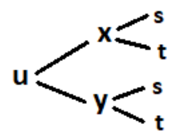
Por lo tanto, la ecucaion de Laplace en coordenadas polares, es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

TEMA 4-b:

Sea $u = f(x,y)$ de clase C^2, con $x = e^s\cos(t)$ y $y = e^s\sin(t)$.

Determine una expresión para: $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$



<u>Solución:</u> Tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos(t) + \frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin(t)$$

así, aplicando regla de la cadena a la función $\frac{\partial u}{\partial s}(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s}\right]\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial s}\right]\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,e^s\cos(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,e^s\sin(t)\right]\cdot e^s\cos(t) + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^s\cos(t)$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,e^s\cos(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,e^s\sin(t)\right]\cdot e^s\sin(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot e^s\sin(t)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,e^{2s}\,cos^2(t) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,e^{2s}\cos(t)\sin(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,e^{2s}\,sin^2(t)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^s\cos(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot e^s\sin(t)$$

Rúbrica general:

<table>
<tr><th>Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño</th></tr>
<tr><td rowspan="3">El estudiante está en la capacidad de resolver ejercicios demostrativos, de ecuaciones diferenciales parciales, utilizando regla de la cadena.</td><th>Inicial</th><th>En desarrollo</th><th>Desarrollado</th><th>Excelente</th></tr>
<tr><td>No resuelve el ejercicio o utiliza los cambios de variables de forma incorrecta.</td><td>Encuentra las derivadas parciales de primer orden, utilizando regla de la cadena o comete errores en el proceso.</td><td>Encuentra correctamente las derivadas parciales de segundo orden, aplicando técnicas de derivación adecuadas, entre ellas regla de la cadena o comete errores en el proceso.</td><td>Encuentra correctamente las expresiones solicitadas o comete algún error no significativo.</td></tr>
<tr><td>0-1</td><td>2-5</td><td>6-12</td><td>13-15</td></tr>
</table>

TEMA 5:

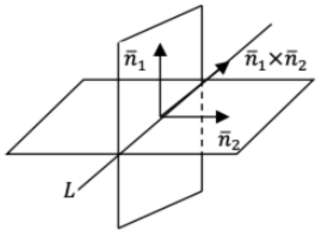
Determine la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi}$ que contiene a la recta $\boldsymbol{l}:\begin{cases} \boldsymbol{2x-y-4z+7=0} \\ \boldsymbol{3x+2y+z=0} \end{cases}$ **y que es perpendicular al plano** $\boldsymbol{\pi_1: 2x+y-2z+1=0}$

Solución:

$$l:\begin{cases} 2x-y-4z+7=0 & \rightarrow \quad \boldsymbol{n_1}=(2,-1,-4) \\ 3x+2y+z=0 & \rightarrow \quad \boldsymbol{n_2}=(3,2,1) \end{cases}$$

$\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n_2}=0 \quad \rightarrow$ los planos son ortogonales

Así, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1-8,-2-12,4+3)=(7,-14,7)$



Entonces:

$$l: P=P_0+t(1,-2,1)\,;t\in R. \qquad \text{Donde } P_0(x_0,y_0,z_0)\in l$$

Si $x_0=0$:

$$P_0(0,y_0,z_0)\in l:\begin{cases} -y_0-4z_0+7=0 \\ 2y_0+z_0=0 \end{cases}$$

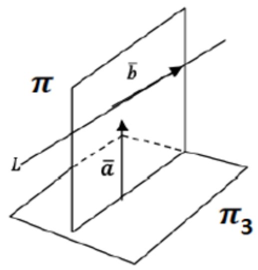
De donde: $y_0=-1,\ z_0=2 \rightarrow P_0(0,-1,2)\in l$ y

$$l: P=(0,-1,2)+t(1,-2,1)\,;t\in R \quad \text{y} \quad P=(x,y,z).$$

El plano π es generado por el vector $\boldsymbol{a}=(2,1,-2)$ normal a $\boldsymbol{\pi_1}$ y el vector $\boldsymbol{b}=(1,-2,1)$ vector director de l

$$\pi: \pi=(0,-1,2)+r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}\,;r,s\ \in R$$

$$\pi=(0,-1,2)+r(2,1,-2)+s(1,-2,1); r,s\ \in R$$



Así, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(1-4,-2-2,-4-1)=(-3,-4,-5)$

De π : $\overline{P_0P}\cdot(\boldsymbol{a}\ \mathrm{X}\ \boldsymbol{b})=0$ se obtiene la ecuación solicitada:

$$(x,y+1,z-2)\cdot(-3,-4,-5)=0$$

$$\boldsymbol{\pi}: 3x+4y+5z-6=0.$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe resolver problemas de geometría analítica tridimensional, empleando la teoría de rectas y planos.	No sabe cómo aplicar la teoría de rectas y planos para resolver el problema.	El estudiante calcula el vector y el punto usando las ecuaciones dadas para deducir correctamente la ecuación de la recta. Pero no sabe cómo deducir el vector normal del plano pedido con el vector director de la recta y el vector normal del plano perpendicular dado.	Deduce la ecuación de la recta indicada correctamente. Calcula el vector normal del plano pedido usando el vector director de la recta y el vector normal del plano perpendicular dado, pero comete pequeños errores al deducir la ecuación del plano solicitado.	Deduce la ecuación de la recta indicada correctamente. Calcula el vector normal del plano usando el vector director de la recta y el vector normal del plano perpendicular dado. Finalmente, usa el punto de la recta y deduce correctamente la ecuación del plano solicitado.
	0	1-6	7-13	14-15

TEMA 6:

Dado el campo escalar:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$$
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x}^2\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}$$

a) **Determine la aproximación lineal en el punto (1,0)**
b) **Determine la aproximación cuadrática en el punto (1,0)**
c) **Con ambas aproximaciones estime $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ y compárela con su valor real**

Solución: f es diferenciable pues es la multiplicación de un polinomio con una función exponencial. Por lo tanto,
Para todo $a \in R^2$:

$$\nabla f(a) = (\, a_1(a_1+2)e^{a_1-a_2}, {a_1}^2(-e^{a_1-a_2})\,)$$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} {a_1}^2\, e^{a_1-a_2} + 4\, a_1 e^{a_1-a_2} + 2e^{a_1-a_2} & {a_1}^2(-e^{a_1-a_2}) - 2a_1 e^{a_1-a_2} \\ {a_1}^2(-e^{a_1-a_2}) - 2e^{a_1-a_2} & {a_1}^2 e^{a_1-a_2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la aproximación lineal de f en el punto $a = (1,0)$ para $(x, y) \in R^2$ cerca de a es:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(1,0) + \nabla f(a) \cdot ((x,y) - a) \\ &\approx e + (3e, -3) \cdot (x-1, y) \\ &\approx e(1 + 3x - 3 - y) \\ &\approx e(1 + 3x - y - 3) \end{aligned}$$

Y la aproximación cuadrática de f en el punto a para $(x, y) \in R^2$ cerca de a es:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(1,0) + \nabla f(a)) \cdot ((x,y) - a) + \frac{1}{2}((x,y) - a)H_f(a)((x,y) - a)^T \\ &\approx e(1 + 3x - y - 3) + \frac{1}{2}(x-1, y) \begin{pmatrix} 7e & -3e \\ -3e & e \end{pmatrix} (x-1, y)^T \\ &\approx e(1 + 3x - y - 3) + \frac{1}{2}(7x^2 - 6xy - 14x + y^2 + 6y + 7) \\ &\approx \frac{e}{2}(7x^2 - 6xy - 8x + y^2 + 4y + 3) \end{aligned}$$

Entonces, la aproximación lineal de f en (1,0) para (1,0) es:

$$e(1 + 3(1) - (0) - 3) = e$$

Y la aproximación cuadrática de f en (1,0) para (1,0) es:

$$\frac{e}{2}(7(1)^2 - 6(1)(0) - 8(1) + (0)^2 + 4(0) + 3) = e$$

Esto indica que ambas aproximaciones coinciden con $f(1,0) = e$, lo cual era esperado ya que estas aproximaciones entre más cerca al punto $a = (1,0)$ serán mejores.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo aproximar una función de dos variables tanto en forma lineal como cuadrática usando las fórmulas adecuadas.	No sabe cómo plantear las aproximaciones de primer y segundo orden para resolver el problema.	Plantea la fórmula en forma correcta de la aproximación lineal, calcula el gradiente de la función en el punto indicado, pero no llega a la respuesta correcta pues comete pequeños errores al reemplazar. Plantea la fórmula de la aproximación cuadrática correctamente pero no resuelve el resto del problema.	Resuelve la aproximación lineal correctamente. Calcula la matriz Hessiana en el punto indicado, reemplaza en la fórmula de aproximación cuadrática, pero comete pequeños errores algebraicos errores y no llega a la respuesta correcta. No logra comparar el valor real de la función con las aproximaciones.	Resuelve ambas aproximaciones, lineal y cuadrática, correctamente. Calcula el valor real de la función en el punto indicado y lo compara con los resultados obtenidos usando las aproximaciones.
	0	**1-5**	**6-10**	**13-15**