**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

| | |
|---|---|
| **AÑO:** 2019 - 2020 | **PERIODO:** SEGUNDO TÉRMINO |
| **MATERIA:** ECUACIONES DIFERENCIALES<br>**COORDINADOR:** Antonio Chong Escobar | **PROFESORES: P1:** Antonio Chong Escobar; **P4&6&11:** Jennifer Avilés Monroy; **P5&12:** José Castro Carrasco; **P7&17:** C. Mario Celleri Mujica; **P8&14:** Elvis Aponte Valladares; **P9&15:** Hernando Sánchez Caicedo; **P16:** Liliana Rebeca Pérez. (**P**: Paralelo) |
| **EVALUACIÓN:** SEGUNDA | **FECHA:** 27 DE ENERO DE 2020 |

| **COMPONENTE TEÓRICO** | |
|---|---|
| EXAMEN (50 Puntos) | |
| PROM. LECCIONES + PROM. PRUEBAS DE LECTURA | |
| **TOTAL (100 Puntos)** | |

**COMPROMISO DE HONOR QUE DEBE LLENAR PARA QUE SU EXAMEN SEA CALIFICADO**

Yo, ………………………………………………………………………………………………………………………..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que NO puedo usar calculadora ni equipos electrónicos, que sólo puedo usar lápiz o esferográfico, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de esta evaluación y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte frontal del aula, junto con algún otro material que haya traído conmigo. Además, reconozco que no debo consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y que los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
***Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.***
"Como estudiante de la ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

**FIRMA:** ________________________________ **NÚMERO DE MATRÍCULA:** _______________________ **PARALELO:** _____

## SOLUCIÓN Y RÚBRICA

---

**Tema 1 (5 Puntos: 1 punto cada literal)**
**Complete las siguientes frases.**

a) Se conoce que $f(x)=x$ y $g(x)=x^{-1}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=0$. Las funciones $h_1(x)$ y $h_2(x)$ de una solución particular de la forma $y_p(x)=x\,h_1(x)+x^{-1}\,h_2(x)$ para la ecuación $x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=x\,ln(x)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x\,h_1'+x^{-1}h_2' &= 0 \\ h_1'-x^{-2}h_2' &= \frac{ln(x)}{x} \end{cases}$.

b) La transformada inversa de Laplace de $F(s)=2+7e^{-s}$ es: $f(t)=2\delta_0(t)+7\delta_1(t)$; donde $\delta$ es la función delta de Dirac.

c) La transformada de Laplace de la función $f(t)=\mu_\pi(t)\mu_{2\pi}(t)$ es igual a $F(s)=\frac{e^{-2\pi s}}{s}; s>0$.

d) La transformada inversa de Laplace de la función $\frac{e^{-3S}}{S^2-\pi^2}$ es igual a $\frac{1}{\pi}u_3(t)senh(\pi(t-3))$.

e) Sea $B_{4x4}$ una matriz con 4 valores propios reales y diferentes, tal que $V_i$ es un vector propio para el valor propio $r_i$, donde $i=1,2,3,4$. Entonces, la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales $\boldsymbol{w}'(t)=B\boldsymbol{w}(t)$ es:
$\boldsymbol{w}(t)=c_1\,e^{r_1t}V_1+c_2\,e^{r_2t}V_2+\,c_3\,e^{r_3t}V_3+c_4\,e^{r_4t}V_4\,, c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

**Elaborado por:** Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

**Tema 2 (9 Puntos)**

Resuelva el siguiente sistema $\begin{cases} y''(t) - 4z(t) = 0 \\ z''(t) - 4y(t) = 0 \end{cases}$, empleando el método del operador diferencial.

Solución:

Expresando el sistema en términos del operador diferencial se tiene:

$$\begin{cases} D^2y - 4z = 0 \\ D^2z - 4y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} D^2y - 4z = 0 \\ -4y + D^2z = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por $D^2$ y la segunda ecuación por 4:

$$\begin{cases} D^4y - 4D^2z = 0 \\ -16y + 4D^2z = 0 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones resultantes se obtiene: $D^4y - 16y = 0$.

La solución de este tipo de ecuación se plantea de la forma: $y(x) = e^{rx}$, con lo cual:

$$y'(x) = re^{rx} \quad \rightarrow \quad y''(x) = r^2e^{rx} \quad \rightarrow \quad y'''(x) = r^3e^{rx} \quad \rightarrow \quad y^{(4)}(x) = r^4e^{rx}.$$

Al sustituir la solución planteada y sus derivadas en la ecuación se obtiene:

$$r^4e^{rx} - 16e^{rx} = 0 \quad \rightarrow \quad e^{rx}(r^4 - 16) = 0 \quad \rightarrow \quad (r-2)(r+2)(r-2i)(r+2i) = 0$$

Así, los valores de $r$ son: $r_1 = 2$ ; $r_2 = -2$ ; $r_{3,4} = \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{2}_{\lambda} i$ .

Entonces, la solución general de la ecuación es igual a:

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + c_3e^{\alpha t}cos(2t) + c_4e^{\alpha t}\,sen(2t)\,;\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3cos(2t) + c_4\,sen(2t)\,;\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Con respecto a la incógnita $z(t)$, ésta puede ser obtenida de la primera ecuación del sistema como se indica a continuación:

$$y''(t) - 4z(t) = 0 \quad \rightarrow \quad z(t) = \frac{1}{4}y''(t)$$

La primera derivada de $y(t)$ es igual a:

$$y'(t) = 2c_1e^{2t} - 2c_2e^{-2t} - 2c_3sen(2t) + 2c_4\,cos(2t)\,;\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

La segunda derivada de $y(t)$ es igual a:

$$y''(t) = 4c_1e^{2t} + 4c_2e^{-2t} - 4c_3cos(2t) - 4c_4\,sen(2t)\,;\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$z(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3\,cos(2t) - c_4sen(2t);\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

La solución del sistema está dada por:

$$\begin{cases} y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3cos(2t) + c_4\,sen(2t) \\ z(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3\,cos(2t) - c_4sen(2t) \end{cases};\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

**Elaborado por:** Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

**Tema 3 (9 Puntos)**
Usando el método de los coeficientes indeterminados, halle la solución general de la ecuación diferencial:

$$\theta''(t) - 2\theta'(t) = cos(t) - sen(2t).$$

Solución:
Para hallar la solución complementaria $\theta_c(t)$ se resuelve la ecuación homogénea $\theta''(t) - 2\theta'(t) = 0$, planteando la solución de la forma $\theta(t) = e^{rt}$, con lo cual:

$$\theta'(x) = re^{rt} \quad \rightarrow \quad \theta''(x) = r^2e^{rt}$$

Sustituyendo la solución planteada y sus derivadas en la ecuación se tiene:

$$r^2e^{rt} - 2re^{rt} = 0 \quad \rightarrow \quad e^{rt}(r^2 - 2r) = 0 \quad \rightarrow \quad r(r-2) = 0$$

Así, los valores de $r$ son: $r_1 = 0$ y $r_2 = 2$.

Entonces, la solución complementaria es igual a:

$$\theta_c(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t};\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\theta_c(t) = c_1 + c_2e^{2t};\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Para hallar una solución particular $\theta_p(t)$, usando el método de los coeficientes indeterminados, se halla por separado las soluciones particulares $\theta_{p1}(t)$ y $\theta_{p2}(t)$ correspondientes respectivamente a las siguientes ecuaciones:

$$\theta''(t) - 2\theta'(t) = cos(t)$$
$$\theta''(t) - 2\theta'(t) = -sen(2t),$$

y luego se aplica el principio de superposición: $\theta_p(t) = \theta_{p1}(t) + \theta_{p2}(t)$.

De acuerdo con el método de los coeficientes indeterminados, la solución particular $\theta_{p1}(t)$ se plantea de la forma: $\theta_{p1}(t) = (Asen(t) + Bcos(t))t^s$, donde $s = 0$ es suficiente para que cada término de $\theta_{p1}$ sea linealmente independiente a cada término de $\theta_c$. Entonces:

$$\theta_{p1}(t) = Asen(t) + Bcos(t) \quad \rightarrow \quad \theta'_{p1}(t) = Acos(t) - Bsen(t) \quad \rightarrow \quad \theta''_{p1}(t) = -Asen(t) - Bcos(t)$$

Sustituyendo $\theta_{p1}$ y sus derivadas en la ecuación se tiene:

$$-Asen(t) - Bcos(t) - 2(Acos(t) - Bsen(t)) = cos(t)$$
$$(2B - A)\,sen(t) + (-2A - B)cos(t) = cos(t)$$
$$2B - A = 0 \quad ; -2A - B = 1$$
$$A = 2B \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad A = -\frac{2}{5}$$

Entonces, $\theta_{p1}(t) = -\frac{2}{5}\ sen(t) - \frac{1}{5}cos(t)$.

De forma similar, la solución particular $\theta_{p2}(t)$ se plantea de la forma: $\theta_{p2}(t) = (Asen(2t) + Bcos(2t))t^s$, donde $s = 0$ es suficiente para que cada término de $\theta_{p2}$ sea linealmente independiente a cada término de $\theta_c$. Así:

$$\theta'_{p2}(t) = 2Acos(2t) - 2Bsen(2t) \quad \rightarrow \quad \theta''_{p2}(t) = -4Asen(2t) - 4Bcos(2t)$$

Sustituyendo $\theta_{p2}$ y sus derivadas en la ecuación se tiene:

$$-4Asen(2t) - 4Bcos(2t) - 2\big(2Acos(2t) - 2Bsen(2t)\big) = -sen(2t)$$
$$(4B - 4A)\,sen(2t) + (-4A - 4B)cos(2t) = -sen(2t)$$
$$4B - 4A = -1 \quad ; -4A - 4B = 0$$
$$B = \frac{1}{8} \quad \leftarrow \quad A = -\frac{1}{8} \quad \leftarrow \quad B = -A$$

Entonces, $\theta_{p2}(t) = -\frac{1}{8}\ sen(2t) + \frac{1}{8}cos(2t)$.

Por lo tanto, $\theta_p(t) = -\frac{2}{5}\ sen(t) - \frac{1}{5}cos(t) - \frac{1}{8}\ sen(2t) + \frac{1}{8}cos(2t)$.
Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$\theta(t) = \theta_c(t) + \theta_p(t)$$
$$\theta(t) = c_1 + c_2e^{2t} - \frac{2}{5}\ sen(t) - \frac{1}{5}cos(t) - \frac{1}{8}\ sen(2t) + \frac{1}{8}cos(2t)\ ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Tema 4 (9 Puntos)**

Sea $F(s) = L[f(t)]$ la transformada de Laplace de $f(t)$. Determine $f(t)$ si $F(s) = \frac{1}{(s-4)^7} + \frac{1}{2} ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)$.

Solución:

$f(t) = L^{-1}[F(s)]$
$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^7} + \frac{1}{2} ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right]$

Aplicando la propiedad de linealidad se tiene:
$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^7}\right] + \frac{1}{2} L^{-1}\left[ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right]$

Aplicando uno de los teoremas de traslación de la transformada de Laplace:
$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^7}\right] = e^{4t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^7}\right] = e^{4t}\frac{1}{6!} L^{-1}\left[\frac{6!}{s^7}\right] = e^{4t}\frac{1}{6!} t^6\ ;\ t \geq 0.$

Aplicando propiedades de los logaritmos:
$L^{-1}\left[ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = L^{-1}[2\, ln(s) - ln(s^2+1)]$
Usando la propiedad de linealidad de la transformada inversa de Laplace:
$L^{-1}\left[ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = 2L^{-1}[\, ln(s)] - L^{-1}[ln(s^2+1)]$
Utilizando el corolario que establece que $L^{-1}[F(S)] = \frac{1}{t^n}\ (-1)^n L^{-1}\left[\frac{d^n}{dS^n}\big(F(S)\big)\right]$ con $n = 1$:
$L^{-1}\left[ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = -\frac{2}{t}\ L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\big(ln(s)\big)\right] + \frac{1}{t}\ L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\big(ln(s^2+1)\big)\right]$
$L^{-1}\left[ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = -\frac{2}{t}\ L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{t}\ L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+1}\right]$
$L^{-1}\left[ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = -\frac{2}{t}\ + \frac{1}{t}\ 2cos(t)\ ;\ t > 0$

Finalmente, se tiene que:
$f(t) = e^{4t}\frac{1}{6!} t^6 + \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{t}\ + \frac{1}{t}\ 2cos(t)\right]\ ;\ t > 0$
$f(t) = e^{4t}\frac{1}{6!} t^6 + \frac{cos(t)-1}{t}\ ;\ t > 0$

**Elaborado por:** Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

**Tema 5 (9 Puntos)**
Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, utilizando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x' + 4\int_0^t y(x)dx = t - sen(t) \\ x' = y' - sen(t) \end{cases}, \text{ tal que } x(0) = y(0) = 0.$$

Solución:
Remplazando $x'(t)$ de la segunda ecuación en la primera ecuación:

$$y'(t) - sen(t) + 4\int_0^t y(x)dx = t - sen(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada lado de la ecuación y luego aplicando propiedad de linealidad se tiene:

$$L[y'(t)] + 4\,L\left[\int_0^t y(x)dx\right] = L[t]$$

- $L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s)$
- $L\left[\int_0^t y(x)dx\right] = \frac{1}{s}\,Y(s)$
- $L[t] = \frac{1}{s^2}$

Sustituyendo los resultados de las transformadas obtenidas:

$$sY(s) + \frac{4}{s}\,Y(s) = \frac{1}{s^2} \quad \rightarrow \quad Y(s)\left[s + \frac{4}{s}\right] = \frac{1}{s^2} \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = L^{-1}\left[\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s^2+4}\right)\right]$$
$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] * L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]$$
$$y(t) = 1 * \frac{1}{2}sen(2t)$$
$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{2}sen(2x)dx$$
$$y(t) = \frac{1}{4}[-cos(2x)]_0^t$$
$$y(t) = \frac{1}{4}[-cos(2t) + 1]$$
$$y(t) = \frac{1 - cos(2t)}{4}$$

De la segunda ecuación del sistema se tiene:

$$x'(t) = y'(t) - sen(t)$$
$$x'(t) = \frac{1}{2}sen(2t) - sen(t)$$
$$x(t) = \int\left[\frac{1}{2}sen(2t) - sen(t)\right]dt$$
$$x(t) = -\frac{1}{4}cos(2t) + \cos(t) + c\,;\, c \in \mathbb{R}$$

Evaluando la condición inicial $x(0) = 0$:

$$-\frac{1}{4} + 1 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -\frac{3}{4}$$

Entonces:

$$x(t) = -\frac{1}{4}\,cos(2t) + cos(t) - \frac{3}{4}$$

La solución del problema está dada por:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{4}\,cos(2t) + cos(t) - \frac{3}{4} \\ y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos(2t) \end{cases}$$

**Elaborado por:** Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

**Tema 6 (9 Puntos)**

Para la ecuación $xy''(x) + y(x) = 0$ determine los puntos ordinarios y los puntos singulares. Luego, realice el cambio de variable $z = x - 1$ para determinar la solución $y(x)$ alrededor de $x_0 = 1$.

Solución:

Sean $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ y $R(x) = 1$, los coeficientes de $y''(x)$, $y'(x)$ y $y(x)$. Puesto que estas funciones son polinomiales y no hay factores que las tres funciones tengan en común, entonces los valores $x_0$ para los cuales $P(x_0) \neq 0$ se denominan puntos ordinarios y los demás puntos se denominan singulares. Entonces, $x_0 = 0$ es un punto singular y los demás números reales son puntos ordinarios para la ecuación analizada.

A partir del cambio de variable $z = x - 1$ se tiene que:

$$\frac{dz}{dx} = 1 \ \ ; \ \ x = z + 1 \ \ ; \ \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \ \ ; \ \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2} \ \ ; \ \ x_0 = 1 \equiv z_0 = 0$$

Sustituyendo en la ecuación las expresiones obtenidas se tiene:

$$(z+1)\frac{d^2y}{dz^2} + y(z) = 0 \ \ ; \ \ z_0 = 0$$

Se plantea la solución de la forma $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , con lo cual:

$$y'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \ \ ; \ \ y''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$(z+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

Para que $z$ tenga el mismo exponente en todas las series, se realiza el cambio de variable $m = n - 1$ en la primera serie y $m = n - 2$ en la segunda serie, y luego se realiza un cambio de variable adicional $m = n$ en ambos resultados, como se muestra a continuación:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n a_{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

Desarrollando términos iniciales para que los índices de todas las series inicien en el mismo valor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n a_{n+1} z^n + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2} z^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)n a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] z^n = 0$$

Igualando coeficientes se tiene:

$a_0 + 2a_2 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = -\frac{a_0}{2}$

$(n+1)n a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \, ; n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{n}{n+2} a_{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n \, ; n \in \mathbb{N}$

Generando algunos coeficientes iniciales adicionales:

$n = 1$: $a_3 = -\frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3(2)}a_1 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3!}a_0 - \frac{1}{3!}a_1$

$n = 2$: $a_4 = -\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4(3)}a_2 \quad \rightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{4(3)}a_0 + \frac{1}{3(4)}a_1 + \frac{1}{4!}a_0 \quad \rightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{4!}a_0 + \frac{2}{4!}a_1$

$n = 3$: $a_5 = -\frac{3}{5}a_4 - \frac{1}{5(4)}a_3 \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{3}{5!}a_0 - \frac{3(2)}{5!}a_1 - \frac{1}{5!}a_0 + \frac{1}{5!}a_1 \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{2}{5!}a_0 - \frac{5}{5!}a_1$

$n = 4$: $a_6 = -\frac{4}{6}a_5 - \frac{1}{6(5)}a_4 \quad \rightarrow \quad a_6 = -\frac{8}{6!}a_0 + \frac{20}{6!}a_1 + \frac{1}{6!}a_0 - \frac{2}{6!}a_1 \rightarrow \quad a_6 = -\frac{7}{6!}a_0 + \frac{18}{6!}a_1$

Entonces la solución para $y(z)$ está dada por:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \cdots$$

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z - \frac{a_0}{2}z^2 + \left(\frac{1}{3!}a_0 - \frac{1}{3!}a_1\right)z^3 + \left(-\frac{1}{4!}a_0 + \frac{2}{4!}a_1\right)z^4 + \left(\frac{2}{5!}a_0 - \frac{5}{5!}a_1\right)z^5 + \cdots$$

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0\left(1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 - \frac{1}{4!}z^4 + \frac{2}{5!}z^5 - \cdots\right) + a_1\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{2}{4!}z^4 - \frac{5}{5!}z^5 + \cdots\right)$$

Entonces la solución para $y(x)$, de acuerdo con el cambio de variable utilizado, está dada por:

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \frac{2}{5!}(x-1)^5 - \cdots\right) +$$

$$a_1\left((x-1) - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{2}{4!}(x-1)^4 - \frac{5}{5!}(x-1)^5 + \cdots\right)$$

**Tema 1 (5 Puntos)**

| Capacidades por evaluar | Nivel de aprendizaje (PARA CADA LITERAL) | |
|---|---|---|
| | **Inicial** | **Excelencia** |
| Completar frases conceptuales relacionadas a los capítulos del segundo parcial. | Deja el espacio en blanco o completa de forma incorrecta. | Completa la frase conceptual de forma correcta (se debe presentar una justificación de la respuesta donde el profesor considere necesario). |
| **Puntaje** | 0 | 1 |

**Tema 2 (9 Puntos)**

| Capacidades por evaluar | Nivel de aprendizaje | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelencia** |
| Determinar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, usando el método del operador diferencial. | Expresa el sistema en términos del operador diferencial, **pero no** obtiene una ecuación en términos de una sola función incógnita. | Expresa el sistema en términos del operador diferencial y obtiene una ecuación en términos de una sola función incógnita, **pero no** resuelve dicha ecuación. | Expresa el sistema en términos del operador diferencial, obtiene una ecuación en términos de una sola función incógnita y la resuelve, **pero no** obtiene la segunda función incógnita. | Expresa el sistema en términos del operador diferencial, obtiene una ecuación en términos de una sola función incógnita y la resuelve. Finalmente, obtiene la segunda función incógnita. |
| **Puntaje** | [0 , 2] | (2 , 3] | (3 , 7] | (7, 9] |

**Tema 3 (9 Puntos)**

| Capacidades por evaluar | Nivel de aprendizaje | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelencia** |
| Determinar la solución general de una EDO lineal de segundo orden no homogénea, usando el método de los coeficientes indeterminados para hallar una solución particular. | Halla la solución complementaria, **pero no** plantea la forma de la solución particular. | Halla la solución complementaria y plantea la forma de la solución particular, **pero no** halla dicha solución particular. | Halla la solución complementaria, plantea la forma de la solución particular y halla dicha solución particular, **pero no** presenta la solución general. | Halla la solución complementaria, plantea la forma de la solución particular, halla dicha solución particular y presenta la solución general. |
| **Puntaje** | [0 , 2] | (2 , 4] | (4 , 8] | (8 , 9] |

**Elaborado por:** Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

**Tema 4 (9 Puntos)**

| Capacidades por evaluar | Nivel de aprendizaje | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelencia** |
| Determinar la transformada inversa de Laplace de una función, utilizando teoremas, corolarios y transformadas de funciones básicas. | Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa, **pero no** obtiene las transformadas inversas planteadas. | Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa y halla la transformada inversa de $\frac{1}{(s-4)^7}$, **pero no** halla la transformada inversa de $ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)$. | Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa, halla la transformada inversa de $\frac{1}{(s-4)^7}$ y plantea una manera de hallar la transformada inversa de $ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)$, **pero no** halla esta última transformada inversa. | Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa, halla la transformada inversa de $\frac{1}{(s-4)^7}$, halla la transformada inversa de $ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)$ y presenta la transformada inversa de $F(s)$. |
| **Puntaje** | [0 , 1] | (1 , 4] | (4 , 6] | (6 , 9] |

**Tema 5 (9 Puntos)**

| Capacidades por evaluar | Nivel de aprendizaje | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelencia** |
| Determinar la solución de un sistema integro-diferencial, usando la transformada de Laplace. | Aplica la transformada a cada una de las ecuaciones del sistema, o sustituye una ecuación en la otra y aplica la transformada a la ecuación obtenida, **pero no** halla las transformadas planteadas. | Aplica la transformada a cada una de las ecuaciones del sistema, o sustituye una ecuación en la otra y aplica la transformada a la ecuación obtenida. Halla las transformadas planteadas y obtiene una expresión para la transformada de una de las funciones incógnitas, **pero no** determina su transformada inversa. | Aplica la transformada a cada una de las ecuaciones del sistema, o sustituye una ecuación en la otra y aplica la transformada a la ecuación obtenida. Halla las transformadas planteadas, obtiene una expresión para la transformada de una de las funciones incógnitas y determina su transformada inversa, **pero no** determina la otra incógnita del sistema. | Aplica la transformada a cada una de las ecuaciones del sistema, o sustituye una ecuación en la otra y aplica la transformada a la ecuación obtenida. Halla las transformadas planteadas, obtiene una expresión para la transformada de una de las funciones incógnitas, determina su transformada inversa y determina la otra incógnita del sistema. |
| **Puntaje** | [0 , 2] | (2 , 4] | (4 , 7] | (7 , 9] |

**Elaborado por:** Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

**Tema 6 (9 Puntos)**

| **Capacidades por evaluar** | **Nivel de aprendizaje** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelencia** |
| Obtener la solución general de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal usando series de potencias. | Determina los puntos ordinarios y singulares de la EDO, **pero no** realiza el cambio de variable ni plantea la solución usando serie de potencias alrededor de $z_0 = 0$. | Determina los puntos ordinarios y singulares de la EDO, realiza el cambio de variable y plantea la solución usando serie de potencias alrededor de $z_0 = 0$, **pero no** obtiene una ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie. | Determina los puntos ordinarios y singulares de la EDO, realiza el cambio de variable, plantea la solución usando serie de potencias alrededor de $z_0 = 0$ y obtiene una ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie, **pero no** genera coeficientes iniciales de la serie $y(z)$ ni presenta la solución $y(x)$. | Determina los puntos ordinarios y singulares de la EDO, realiza el cambio de variable, plantea la solución usando serie de potencias alrededor de $z_0 = 0$, obtiene una ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie, genera coeficientes iniciales de la serie $y(z)$ y presenta la solución $y(x)$. |
| **Puntaje** | [0 , 2] | (2 , 4] | (4 , 6] | (6 , 9] |

**Elaborado por:** Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)