espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: **2025**

MATERIA: **Álgebra lineal**

EVALUACIÓN: Primera

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

PERIODO: **PRIMER TERMINO**

PROFESORES: Bracamonte Mireya, Cabezas José, Córdova Nelson, Laveglia Franca, Marchan Elimar, Martin Carlos, Pastuizaca María Nela, Ramírez John, Valdiviezo Janet.

FECHA: 03 de julio de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ………..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora alguna o cualquier instrumento de comunicación ajena al desarrollo del examen. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ________________________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ___________________ ***PARALELO:*** _______

1. ***(15 Puntos)***
   A continuación, encontrará 3 afirmaciones, donde debe determinar si estas son verdaderas o falsas. En cada caso debe justificar su elección, bien sea presentando alguna demostración, contraejemplo o cálculo.

   a. Si un sistema lineal $AX = b$ tiene más variables que ecuaciones, entonces necesariamente tiene infinitas soluciones.

   b. Si $AX = b$ es un sistema de ecuaciones lineales y A es una matriz cuadrada cuyo determinante es diferente de cero, entonces el sistema tiene solución única.

   c. Si V es un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial y es generado por dos conjuntos diferentes $V = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y $V = gen\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, entonces V tiene dimensión n.

2. ***(25 Puntos)***
Una compañía de análisis de datos urbanos está diseñando un modelo para optimizar la selección de bloques habitacionales de construcción residencial. Existen tres tipos de bloques habitacionales, cada uno con una combinación distinta de tipos de viviendas:
Bloque habitacional A: 18 viviendas tipo estudio, 15 familiares y 3 de lujo.
Bloque habitacional B: 12 viviendas tipo estudio, 24 familiares y 2 de lujo.
Bloque habitacional C: 12 viviendas tipo estudio, 31 familiares y 2 de lujo.
Se requiere determinar cuántos bloques habitacionales de cada tipo deben seleccionarse para satisfacer exactamente la siguiente demanda: 84 viviendas tipo estudio, 210 viviendas familiares y 14 viviendas de lujo.
Modele el problema con un sistema de ecuaciones.
Analice el sistema para determinar si tiene solución. Si es así, describa el conjunto solución.

¿Es posible seleccionar una combinación de bloques habitacionales que satisfagan la demanda? Si la respuesta es afirmativa, ¿de cuántas maneras se puede seleccionar?

3. (20 Puntos)

Considere el espacio vectorial real $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, con las siguientes operaciones:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + 2a_1a_2),$$

$$\lambda \otimes (a, b) = (\lambda a, \lambda b + (\lambda^2 - \lambda)a^2).$$

a. Determine el elemento neutro de V.

b. Determine el inverso aditivo de (a, b).

c. Pruebe la propiedad: $(\lambda\mu) \otimes (a, b) = \lambda \otimes (\mu \otimes (a, b))$.

4. (20 Puntos)

Considere los siguientes subconjuntos de $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$H = gen\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right\},$$

$$W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) / a + d = 0 \ \wedge b = c\right\}.$$

Determine:

a. Una base para el subespacio H.

b. Si W es un subespacio de V, en caso afirmativo, halle una base para el subespacio $H + W$.

5. *(20 Puntos)*

Sean $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\beta_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases del espacio vectorial V tales que:

$$v_1 = w_1 + 2w_2 + w_3$$

$$v_2 = 2w_1 + 3w_2 + w_3$$

$$v_3 = w_1 + w_2 + w_3$$

a. Hallar la matriz que transforma las coordenadas con respecto a la base β_2 en las coordenadas con respecto a la base β_1.

b. Si $[x]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $[u]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ encuentre las coordenadas de $[3x + u]_{\beta_1}$.