

AÑO:	2025	PERÍODO:	I PAO	MATERIA:	Cálculo de una variable
PROFESORES:	Álvarez I., Avilés J., Baquerizo G., Cordero M., Díaz R., García E., Gualé A., Laveglia F., Mancero M., Ramos M., Solís J., Valdiviezo J.				
EVALUACIÓN:	TERCERA		FECHA:	08/septiembre/2025	

1. (15 PUNTOS) En una estación biológica se modelizan dos poblaciones, P_A y P_B , tales que:

$$P_A(t) = \left(\frac{k+1}{2}\right)e^{-0.06t} \qquad P_B(t) = 300 + 120e^{-0.03t}$$

donde el tiempo t está dado en *años*, por lo que $t \geq 0$.

Con la aplicación de límites y sus teoremas o propiedades, para cada literal:

- (a) (8 PUNTOS) Obtenga el valor de la constante k para la expresión correspondiente a P_A , si su población inicial es de 350 *individuos*.
(b) (7 PUNTOS) Determine la cantidad N de *individuos* a la que tiende la población P_B , si el tiempo transcurre en forma indefinida.

Solución:

La expresión para P_A corresponde a una función continua en todo su dominio, por lo que también es *continua por la derecha* en $t = 0$.

$$P_A(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} P_A(t)$$

Entonces:

$$350 = \lim_{t \rightarrow 0^+} P_A(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{k+1}{2}\right)e^{-0.06t} \right]$$

Aplicando la afirmación del TEOREMA PRINCIPAL DE LÍMITES relativa al múltiplo constante de una función y evaluando:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P_A(t) = \left(\frac{k+1}{2}\right) \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-0.06t} = \left(\frac{k+1}{2}\right) e^{0^-} = \left(\frac{k+1}{2}\right) (1^+) = \frac{k+1}{2}$$

Con base en la condición dada de la población inicial:

$$\frac{k+1}{2} = 350$$

$$k+1 = 700$$

$$\boxed{\therefore k = 699}$$

Para determinar la tendencia de la población P_B cuando el tiempo transcurre en forma indefinida, se calcula el siguiente límite al infinito:

$$N = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_B(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (300 + 120e^{-0.03t})$$

Aplicando las afirmaciones del TEOREMA PRINCIPAL DE LÍMITES relativas al límite de la suma de funciones, de una función constante, del múltiplo constante de una función; y, evaluando:

$$N = \lim_{t \rightarrow +\infty} (300) + \lim_{t \rightarrow +\infty} (120e^{-0.03t})$$

$$N = 300 + 120 \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0.03t} \right)$$

$$N = 300 + 120(e^{-\infty})$$

$$N = 300 + 120(0)$$

$$\boxed{\therefore N = 300}$$

2. (15 PUNTOS) Dada una curva en coordenadas paramétricas:

$$C: \begin{cases} x(t) = 3 \cos(\pi t) \\ y(t) = 2 \sen(\pi t) \end{cases} ; \quad t \in [0, 2]$$

(a) (7 PUNTOS) Obtenga la expresión correspondiente a $\frac{dy}{dx}$ y evalúela cuando $t = \frac{1}{4}$.

(b) (8 PUNTOS) Obtenga la expresión correspondiente a $\frac{d^2y}{dx^2}$ y evalúela cuando $t = \frac{1}{4}$.

Solución:

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos(\pi t) \cdot \cancel{\pi}}{-3\sen(\pi t) \cdot \cancel{\pi}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} \cot(\pi t)}$$

Evaluando en el valor indicado:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3} \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{3}(1)$$

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3}$$

Se obtiene la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d \left(-\frac{2}{3} \cot(\pi t) \right)}{dt}}{-3 \operatorname{sen}(\pi t) \cdot \pi} = \frac{-\frac{2}{3} (\cancel{+} \csc^2(\pi t)) \cdot \cancel{t}}{\cancel{+} 3 \operatorname{sen}(\pi t) \cdot \cancel{t}}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9} \csc^3(\pi t)$$

Evaluando la aceleración en el valor indicado:

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{1}{4}} = -\frac{2}{9} \csc^3 \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{2}{9} (\sqrt{2})^3$$

$$\therefore \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{1}{4}} = -\frac{4}{9} \sqrt{2}$$

3. (25 PUNTOS) Suponga que, en un canal de riego, el caudal de agua Q que fluye a través de una compuerta, se modeliza mediante la función:

$$Q(x) = \frac{50x^2}{x^2 + 25} \quad ; \quad x \geq 0$$

donde:

- Q se mide en *litros por segundo*; y,
- x representa la longitud, en *centímetros*, de la apertura que describe la compuerta conforme se desliza verticalmente.

- (a) (10 PUNTOS) Obtenga la regla de correspondencia de $Q'(x)$. Luego, analizando el signo de $Q'(x)$ concluya sobre cómo varía el caudal de agua con respecto a la longitud de la apertura.

(b) (15 PUNTOS) Determine el PUNTO CRÍTICO ESTACIONARIO de $Q'(x)$ donde $Q(x)$ aumenta más rápido; esto es, obtenga el valor $x = c$, para el cual $Q''(x) = 0$. Considere que $\sqrt{3} \approx 1.73$ y aproxime su respuesta con un decimal.

Solución:

Se deriva la expresión dada de caudal Q , utilizando la REGLA DEL COCIENTE:

$$Q'(x) = \frac{(x^2 + 25) (50x^2)' - (50x^2) (x^2 + 25)'}{(x^2 + 25)^2}$$

$$Q'(x) = \frac{(x^2 + 25)(100x) - (50x^2)(2x)}{(x^2 + 25)^2}$$

$$Q'(x) = \frac{(100x)(\cancel{x^2} + 25 - \cancel{x^2})}{(x^2 + 25)^2}$$

$$\boxed{\therefore Q'(x) = \frac{2500x}{(x^2 + 25)^2} \quad ; \quad x \geq 0}$$

Dado que $x \geq 0$, se cumple que siempre $Q'(x) \geq 0$. Por lo tanto, el caudal de agua *aumenta* conforme la longitud de la apertura se incrementa.

Se deriva la expresión obtenida para $Q'(x)$, utilizando la REGLA DEL PRODUCTO, aunque también se puede usar la REGLA DEL COCIENTE:

$$Q'(x) = 2500x (x^2 + 25)^{-2}$$

$$Q''(x) = 2500x ((x^2 + 25)^{-2})' + (x^2 + 25)^{-2} (2500x)'$$

$$Q''(x) = 2500x (-2(x^2 + 25)^{-3}(2x)) + (x^2 + 25)^{-2} (2500)$$

$$Q''(x) = 2500(x^2 + 25)^{-2} [-4x^2(x^2 + 25)^{-1} + 1]$$

$$Q''(x) = 2500(x^2 + 25)^{-2} \left(-\frac{4x^2}{(x^2 + 25)} + 1 \right)$$

$$Q''(x) = \frac{2500}{(x^2 + 25)^2} \left(\frac{-4x^2 + x^2 + 25}{x^2 + 25} \right)$$

$$\boxed{\therefore Q''(x) = \frac{2500 (25 - 3x^2)}{(x^2 + 25)^3} \quad ; \quad x \geq 0}$$

Para obtener el PUNTO CRÍTICO ESTACIONARIO en este caso:

$$Q''(x) = \frac{2500(25 - 3x^2)}{(x^2 + 25)^3} = 0$$

$$25 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{25}{3}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

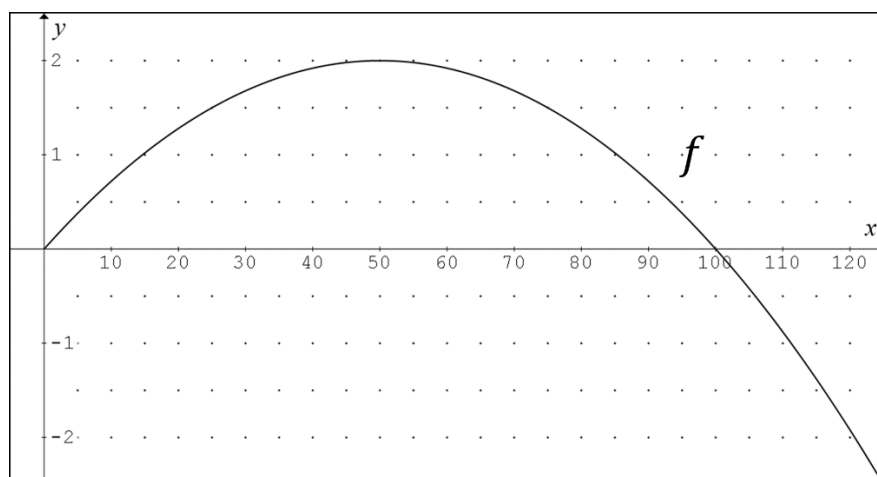
Se descarta el valor negativo, por el dominio dado de la función:

$$x = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$x \approx \frac{5(1.73)}{3} \approx \frac{8.65}{3} \approx 2.88$$

$$\boxed{\therefore x \approx 2.9 \text{ cm}}$$

4. (20 PUNTOS) La gráfica mostrada a continuación corresponde a una función de variable real $f: [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$.



Si F es una antiderivada de f , tal que $F(0) = 0$, califique las siguientes proposiciones como VERDADERAS o FALSAS, justificando sus respuestas.

(a) F presenta un punto crítico en $x = 50$.

Solución:

F presenta su único punto crítico de frontera en $x = 0$; su único punto crítico estacionario en $x = 100$, ya que $F'(100) = f(100) = 0$; y, no presenta puntos críticos singulares. Luego, la proposición es FALSA.

(b) F es creciente $\forall x \in (0, 50)$ y decreciente $\forall x \in (50, 100)$.

Solución:

Se observa, en la gráfica de f , que $F'(x) = f(x)$ toma valores positivos en todo el intervalo $(0, 100)$; por lo tanto, F sí es creciente en el intervalo $(0, 50)$ pero no es decreciente en el intervalo $(50, 100)$. Luego, la proposición compuesta es FALSA.

(c) F es cóncava hacia abajo $\forall x \in (60, 120)$.

Solución:

Para que esto se cumpla, $F'(x) = f(x)$ debería ser decreciente en el intervalo $(60, 120)$. Ya que, en la gráfica dada, se observa ese comportamiento, se concluye que la proposición es VERDADERA.

(d) F presenta un punto de inflexión en $x = 100$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = F'(x)$ en $x = 100$ es negativa, esto implica que $f'(100) = F''(100)$ también es negativa y F es cóncava hacia abajo en dicha abscisa. En consecuencia, F no puede presentar un punto de inflexión en $x = 100$ y la proposición dada es FALSA.

5. (25 PUNTOS) Dada la región R definida como:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (\sqrt{x} \leq y \leq 2) \wedge (0 \leq x \leq 4)\}$$

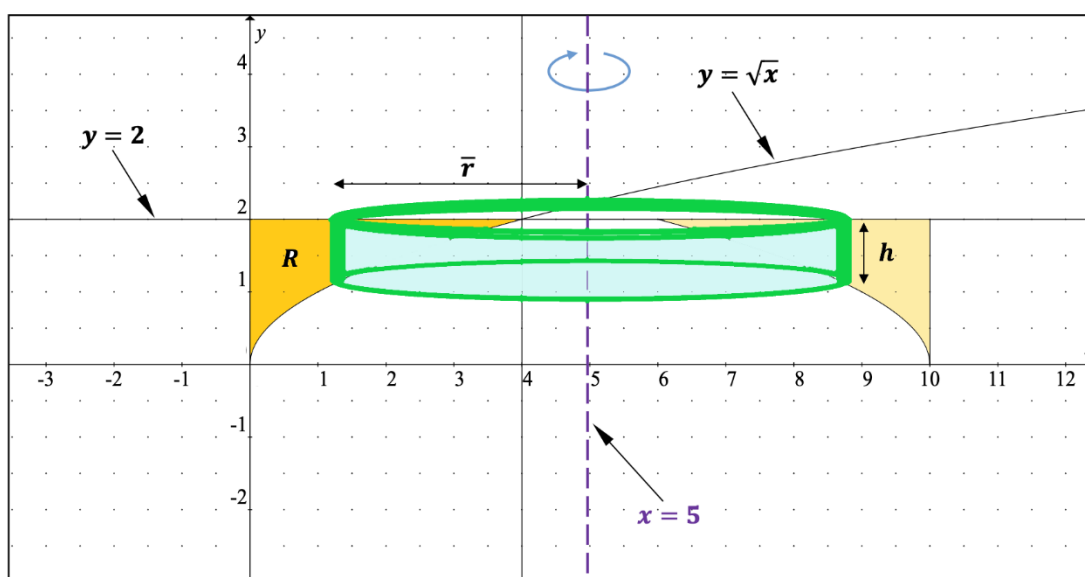
Calcule el volumen V del sólido de revolución que se genera al rotar R alrededor de la recta $x = 5$. Para el efecto, realice lo siguiente:

(a) (5 PUNTOS) Ubique, en el plano cartesiano, puntos relevantes de la región R , grafique los elementos que la limitan, identifíquela claramente; y, bosqueje su reflexión con respecto al eje de rotación.

- (b) (10 PUNTOS) Dibuje la franja representativa y su rotación; luego, establezca la respectiva expresión para el volumen del elemento tridimensional generado.
- (c) (10 PUNTOS) Plantee y evalúe la integral definida correspondiente al cálculo del volumen V .

Solución:

Se ubican puntos relevantes de la región R , se grafican los elementos que la limitan, identificándola claramente y se bosqueja su reflexión. Luego, se dibuja una franja representativa dispuesta verticalmente y se realiza su respectiva rotación, en torno a la recta $x = 5$, generándose un cascarón cilíndrico (o capa cilíndrica):



Las longitudes $\bar{r}$ y h del cascarón cilíndrico son:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= 5 - x \\ h &= y_{sup} - y_{inf} = 2 - \sqrt{x}\end{aligned}$$

El volumen dV del cascarón es:

$$\begin{aligned}dV &= 2\pi\bar{r}hdx \\ dV &= 2\pi(5 - x)(2 - \sqrt{x})dx \\ dV &= 2\pi(10 - 5\sqrt{x} - 2x + x\sqrt{x})dx \\ dV &= 2\pi(10 - 5x^{1/2} - 2x + x^{3/2})dx \quad ; \quad x \in [0, 4]\end{aligned}$$

Se plantea el cálculo del volumen V del sólido, como la integral definida:

$$V = 2\pi \int_0^4 (10 - 5x^{1/2} - 2x + x^{3/2})dx$$

Se evalúa la integral planteada, aplicando la PROPIEDAD DE LINEALIDAD, la REGLA DE LA POTENCIA y el TEOREMA FUNDAMENTAL:

$$V = 2\pi \left(10 \int_0^4 dx - 5 \int_0^4 x^{1/2} dx - 2 \int_0^4 x dx + \int_0^4 x^{3/2} dx \right)$$

$$V = 2\pi \left(10(x)|_0^4 - 5 \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 - \cancel{2} \left(\frac{x^2}{\cancel{2}} \right) \Big|_0^4 + \left(\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^4 \right)$$

$$V = 2\pi \left(10(4 - 0) - \frac{10}{3}(4^{3/2} - 0) - (4^2 - 0) + \frac{2}{5}(4^{5/2} - 0) \right)$$

$$V = 2\pi \left(10(4) - \frac{10}{3}((\sqrt{4})^3) - (4^2) + \frac{2}{5}((\sqrt{4})^5 - 0) \right)$$

$$V = 2\pi \left(40 - \frac{10}{3}(8) - 16 + \frac{2}{5}(32) \right)$$

$$V = 2\pi \left(24 - \frac{80}{3} + \frac{64}{5} \right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{360 - 400 + 192}{15} \right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{152}{15} \right)$$

$$\boxed{\therefore V = \frac{304}{15} \pi u^3}$$