EXAMEN TERCERA EVALUACION 2020-II

1(5 puntos). - Explique que es una sucesión de sumas parciales, ilustrando su explicación con una serie p.

A partir de una sucesión $\{a_n\}$ construimos una nueva sucesión $\{S_n\}$ donde cada elemento es la suma de elementos de la primera sucesión de la siguiente manera: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$,$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ de manera que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Ejemplo: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p} \quad para\ p = 3 \quad \to S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**	
Explicar conceptos asociados a sucesiones y series.	**En desarrollo**	**Excelencia**
	Explica qué es una sucesión de sumas parciales, **pero no** ilustra su explicación con una serie p.	Explica qué es una sucesión de sumas parciales, e ilustra su explicación con una serie p.
Puntaje	(0 , 2]	(2 , 5]

2(5 puntos). - Justificando su respuesta, proporcione una serie de potencias geométrica, cuyo intervalo de convergencia este centrado en 3 y tenga un radio 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n \quad donde \quad R = \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = 2 \quad Por\ ejemplo{:}\ a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^n} = \frac{1}{2} \quad \to R = 2 \quad La\ serie\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$ converge $|x-3| < 2$

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**	
Explicar conceptos asociados a sucesiones y series.	**En desarrollo**	**Excelencia**
	Proporciona una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia está centrado en 3 (justificando este valor), **pero** con radio diferente de 2.	Proporciona una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia está centrado en 3 y tiene radio 2 (justificando estos valores).
Puntaje	(0 , 2]	(2 , 5]

3(5 puntos). - Justificando su respuesta, proporcione una serie numérica alternada convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} \qquad converge\ por\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad Cpdicion\ suficiente\ de\ convergencia.$$

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**	
Explicar conceptos asociados a sucesiones y series.	**En desarrollo**	**Excelencia**
	Proporciona una serie alternada convergente, **pero solo** muestra que esta serie cumple con una de las condiciones del criterio de convergencia de series alternadas.	Proporciona una serie alternada convergente, mostrando que esta serie cumple con el criterio de convergencia de series alternadas.
Puntaje	(0 , 2]	(2 , 5]

4(5 puntos).- Sea B una matriz simétrica de dimensión 4x4 con valores propios r_1 de multiplicidad 2 y r_2 de multiplicidad 2 tal que los vectores propios de r_1 $son\ \varphi_1 \ \ y\ \ \varphi_2$ y los vectores propios de r_2 $son\ \varphi_3 \ \ y\ \ \varphi_4$. Proporcione la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales $X'(t) = BX(t)$, donde $X(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T$.

Solución general:

$$X(t) = C_1\varphi_1 e^{r_1 t} + C_2\varphi_2 e^{r_1 t} + C_3\varphi_3 e^{r_2 t} + C_4\varphi_4 e^{r_2 t}$$

Capacidades por evaluar	Nivel de aprendizaje	
	En desarrollo	**Excelencia**
Explicar conceptos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.	Proporciona algunas soluciones vectoriales del sistema de ecuaciones diferenciales, **pero no** proporciona la solución general.	Proporciona la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales.
Puntaje	(0 , 2]	(2 , 5]

5(20 puntos).- Cierto problema de ingeniería esta descrito por la ecuación diferencial $(1-t^2)y''(t)-ty'(t)+y(t)=0$. Obtenga la solución de esta ecuación, planteando la solución como una serie de potencias alrededor de t=0. Para las soluciones linealmente independientes que tengan infinitos términos, determine al menos sus 5 primeros términos.

Capacidades por evaluar	Nivel de aprendizaje			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
Obtener la solución general de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal usando series de potencias.	Justifica por qué $t_0 = 0$ es un punto ordinario de la EDO e indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias, **pero no** sustituye dicha solución planteada en la EDO.	Justifica por qué $t_0 = 0$ es un punto ordinario de la EDO, indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias, sustituye dicha solución planteada en la EDO y obtiene la ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie, **pero no** obtiene los coeficientes necesarios para presentar la solucion con la cantidad de términos pedidos.	Justifica por qué $x_0 = 0$ es un punto ordinario de la EDO, indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias, sustituye dicha solución planteada en la EDO, obtiene la ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie y obtiene los coeficientes necesarios para presentar la solución con la cantidad de términos pedidos, **pero no** muestra la solución general de la EDO.	Justifica por qué $x_0 = 0$ es un punto ordinario de la EDO, indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias, sustituye dicha solución planteada en la EDO, obtiene la ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie, obtiene los coeficientes necesarios para presentar la solución con la cantidad de términos pedidos y muestra la solución general de la EDO.
Puntaje	[0 , 4]	(4 , 14]	(14 , 18]	(18 , 20]

6(20 puntos).- La altura z (en metros) que alcanza cierto liquido en un tanque cilíndrico, en términos de la variable de control w se describe matemáticamente con el problema de valor inicial $(z-e^w)dw+dz=0\ ;\ z(0)=1$. Usando la técnica de las ecuaciones diferenciales exactas (de ser necesario determine un factor integrante previamente), determine la altura z en términos de la variable de control w. Además, determine el intervalo de valores de la variable de control para que la altura que alcance el líquido este entre 2 y 3 metros.

Capacidades para evaluar	Nivel de aprendizaje			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
Interpretar las soluciones obtenidas al resolver problemas de aplicación modelados con problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.	Muestra que la EDO no es exacta y obtiene un factor integrante, **pero no** resuelve la ecuación con la técnica de las EDO exactas.	Muestra que la EDO no es exacta, obtiene un factor integrante y resuelve la ecuación con la técnica de las EDO exactas, **pero no** halla la constante de integración.	Muestra que la EDO no es exacta, obtiene un factor integrante, resuelve la ecuación con la técnica de las EDO exactas y halla la constante de integración, **pero no** determina el intervalo de valores solicitados para la variable de control.	Muestra que la EDO no es exacta, obtiene un factor integrante, resuelve la ecuación con la técnica de las EDO exactas, halla la constante de integración, y determina el intervalo de valores solicitados para la variable de control.
Puntaje	[0 , 4]	(4 , 13]	(13 , 15]	(15 , 20]

7(20 puntos). - Usando el método del operador diferencial, determine la solución general del sistema (no utilice transformada de Laplace en el procedimiento).

$$\begin{cases} 2y'(t) + x'(t) + 2y(t) - sen(2t) = 0 \\ y''(t) + x'(t) - y(t) - x(t) = 0 \end{cases}$$

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**			
Determinar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, usando el método del operador diferencial.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
	Expresa el sistema en términos del operador diferencial, **pero no** deduce una ecuación con una sola incógnita.	Expresa el sistema en términos del operador diferencial, deduce una ecuación con una sola incógnita y obtiene su solución complementaria, **pero no** obtiene su solución particular.	Expresa el sistema en términos del operador diferencial, deduce una ecuación con una sola incógnita y obtiene su solución complementaria, particular y general, **pero no** determina la otra función incógnita del sistema.	Expresa el sistema en términos del operador diferencial, deduce una ecuación con una sola incógnita y obtiene su solución complementaria, particular y general. Finalmente, determina la otra función incógnita del sistema.
Puntaje	[0 , 2]	(2 , 10]	(10 , 16]	(16 , 20]

8(20 puntos).- Utilizando la transformada de Laplace, determine la solución de la ecuación: $y''(t) + f(t) = g(t)$; $y(0) = 2, y'(0) = 0,$ tal que $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 9 \\ -t & t \geq 9 \end{cases}$ y $g(t) = \delta(t-2) - \delta(t-6),$ $donde\ \delta\ es\ la\ funcion\ delta\ de\ Dirac$. Además, obtenga el valor de la función y(t) evaluada en t=1.

Capacidades para evaluar	**Nivel de aprendizaje**			
Resolver problemas de valor inicial, utilizando la transformada de Laplace.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
	Aplica la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad al problema de valor inicial, **pero no** obtiene las transformadas planteadas.	Aplica la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad al problema de valor inicial. Luego, obtiene las transformadas planteadas y una expresión en términos de S para la transformada de $y(t)$, **pero no** determina la solución del problema aplicando la transformada inversa.	Aplica la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad al problema de valor inicial. Luego, obtiene las transformadas planteadas, obtiene una expresión en términos de S para la transformada de $y(t)$ y determina la solución del problema aplicando la transformada inversa, **pero no** determina el valor de la función "y" en $t = 1$.	Aplica la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad al problema de valor inicial. Luego, obtiene las transformadas planteadas, obtiene una expresión en términos de S para la transformada de $y(t)$, determina la solución del problema aplicando la transformada inversa y determina el valor de la función "y" en $t = 1$.
Puntaje	[0 , 2]	(2 , 10]	(10 , 18]	(18 , 20]