Superficies de Respuesta

Segunda Evaluación

6 de febrero de 2018

1. Cuando se analiza una supeficie de repuesta con solo dos predictores, el modelo de regresión se puede expresar en función del ángulo de rotación definido por la matriz ortogonal de vectores propios de **B**. Considere el modelo:

$$\mu = f(x_1, x_2) = \beta_0 + cx_1 \cos(\theta) + cx_2 \sin(\theta) + \lambda x_1^2 \cos^2(\theta) + 2\lambda x_1 x_2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \lambda x_2^2 \sin(\theta)$$

a. Escriba la superficie en función de variables canónicas w_1 y z_2.

b. ¿Qué tipo de superficie define este modelo: punto de silla, parabolide con punto estacional único, región estacional con borde? Justifique su respuesta basado únicamente en los valores propios de **B**.

c. ¿Para qué valores de λ la superficie tiene máximo? ¿Es ese máximo único o es una región?

d. Para λ que maximiza la superficie, ¿qué valores de x_1 y x_2 maximizan la superficie? Si el valor es único, escriba cuál es, y si es una región, escriba la ecuación que define dicha región.

e. En el caso de una región estacionaria, es posible que el borde de la superficie sea horizontal u oblicuo. ¿Para qué valores de c la región estacionaria es horizontal (y por ende, no habría dirección de ascenso ni descenso)?

f. Las curvas de nivel de una superficie se obtienen igualando la superficie a una constante $f(x_1, x_2) = d$, dando relación entre x_1 y x_2 que se puede dibujar. Demuestre que las curvas de nivel de la superficie definida por el modelo de este problema son lineas rectas entre x_1 y x_2. Escriba la ecuación de dicha recta.

g. Dibuje las curvas de nivel de esta superficie para $\beta_0 = 1$, $\theta = \pi/6$, $\lambda = -1$, $c = 1$ y para valores de $d = 0.5, 0.75, 1, 1.25$.

2. El modelo de este problema tiene el mismo **B** que el problema anterior, pero se ha cambiado **b**. Considere el modelo:

$$\mu = f(x_1, x_2) = \beta_0 - cx_1 \sin(\theta) + cx_2 \cos(\theta) + \lambda x_1^2 \cos^2(\theta) + 2\lambda x_1 x_2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \lambda x_2^2 \sin(\theta)$$

   a. ¿Es la región estacionaria de este modelo la misma que la del modelo anterior? Justifique su respuesta.

   b. Demuestre que las curvas de nivel de este modelo no son líneas rectas, sino parábolas.

c. Los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$ constituyen una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, por lo que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de estos dos vectores. Considere el modelo más general

$$\mu = f(x_1, x_2) = \beta_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \lambda x_1^2 \cos^2(\theta) + 2\lambda x_1 x_2 \cos(\theta)\sin(\theta) + \lambda x_2^2 \sin(\theta)$$

Suponga que $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. ¿Para qué valores de c_1 y c_2 las curvas de nivel son líneas rectas, y para que valores son parábolas?