Facultad de
Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO:	PERIODO:
MATERIA:	PROFESORES:
EVALUACIÓN:	
TIEMPO DE DURACIÓN:	FECHA:

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora ordinaria para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

***FIRMA:* __________________ *NÚMERO DE MATRÍCULA:* __________________ *PARALELO:* ________________**

1. Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ un polinomio con coeficientes enteros.

   a) Si un número racional $\frac{p}{q}$ (con p y q primos entre sí) es tal que $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, pruebe que p divide a a_0 y que q divide a a_n.

   b) En particular, examinando $x^n - a = 0$, concluya que, si $a > 0$ no posee raíz n-ésima entera, entonces no existe número racional tal $x^n = a$.

2. Un número r se llama *algebráico* cuando existe un polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, no identicamente nulo, con coeficientes enteros, tal que $f(r) = 0$.

   a) Demuestre que el conjunto de polinomios con coeficientes enteros es numerable. [1]

   b) Dada una numeración $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ de esos polinomios no identicamente nulos, sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n el conjunto de las raíces reales de f_n. Cada A_n es un conjunto finito (pudiendo ser vacío). El conjunto A de los número algebráicos se escribe como $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Concluya que el conjunto de los números algebráicos es numerable.

[1]Sugerencia: El conjunto de los polinomios de grado n con coeficientes enteros pueden ponerse en biyección con el productado cartesiano $\mathbb{Z} \underbrace{\times \cdots \times}_{n \text{ veces}} \mathbb{Z}$. Luego use los resultados de numerabilidad vistos en clase.

3. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Pruebe que si una sucesión periódica es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constante.

4. Una sucesión (x_n) es una *sucesión de Cauchy* cuando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \implies |x_m - x_n| < \varepsilon$.

   a) Demuestre que si (x_n) converge, entonces es una suceción de Cauchy.

   b) Demuestre que toda sucesión de Cauchy es acotada.[2]

[2]Use la definición de sucesión de Cauchy con $\epsilon = 1$

5. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy.

   a) Demuestre que si (x_n) tiene una subsucesión convergente, entonces (x_n) converge.

   b) Demuestre que toda sucesión (x_n) de Cauchy de converge.[3].

[3]Sugerencia: Use el Teorema de Bolzano-Weierstrass