



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Examen:	
Lecciones:	
Talleres:	
Deberes:	

AÑO:	2016	PERÍODO:	SEGUNDO TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	PROFESOR:	
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	FECHA:	13/febrero/2017

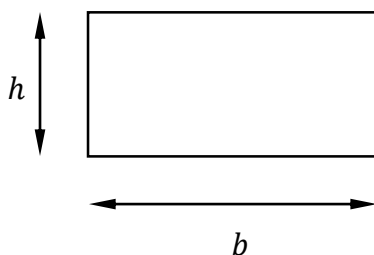
Total:	
--------	--

SOLUCIÓN y RÚBRICA

- 1) (10 PUNTOS) Un jardín rectangular debe tener un área de 3000 pies cuadrados. Tres de los cuatro lados del jardín serán cubiertos con una malla (cerca) con un costo de \$ 3 por pie y el cuarto lado será cubierto con otra malla que cuesta \$ 2 por pie. Realizando un análisis de cálculo diferencial, determine las longitudes, en pies, de cada lado del jardín que minimicen el costo total de la malla rectangular.

Solución:

Se realizará una representación geométrica de la situación planteada.



Las dimensiones del rectángulo son:

$b$ : longitud de la base.

$h$ : longitud de la altura.

Se proporciona el dato del área de la superficie del jardín, con lo cual se puede despejar una variable en términos de la otra:

$$A = b * h = 3000 \quad \rightarrow \quad h = \frac{3000}{b}$$

El costo total  $C$  a minimizar, para cercar el jardín, tiene que ver con su perímetro y es:

$$C = (2b + h) \left( \frac{\$3}{\text{pie}} \right) + h \left( \frac{\$2}{\text{pie}} \right) = 6b + 5h \quad [\$]$$

Reemplazando:

$$C = 6b + 5 \left( \frac{3000}{b} \right) = 6b + \frac{15000}{b}$$

Se obtiene la primera derivada de la función de costo y se iguala a 0:

$$C' = 6 - \frac{15000}{b^2} = 0$$

$$\frac{15000}{b^2} = 6 \quad \rightarrow \quad b^2 = \frac{15000}{6} \quad \rightarrow \quad b^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad b = 50 \text{ pies}$$

Se obtiene la segunda derivada de la función de costo y se verifica el signo:

$$C'' = \frac{30000}{b^3} > 0 \rightarrow \text{Se trata de un valor mínimo.}$$

Se reemplaza y se obtiene el otro valor,  $h = 60$  pies.

Las dimensiones que debe tener el jardín rectangular para que se incurra en un costo mínimo son 50 pies y 60 pies.

**Rúbrica:**

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante plantea un problema de optimización con expresiones de geometría plana, realiza el análisis de cálculo diferencial e interpreta los resultados encontrados.	No logra asociar los datos proporcionados o se limita al planteo del área de la superficie de un rectángulo.	Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo y determina bien la función de costo a minimizar, pero se equivoca el derivar.	Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo, determina bien la función de costo a minimizar, aplica el criterio de la primera derivada, pero no aplica el criterio de la segunda derivada.	Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo, determina bien la función de costo a minimizar, aplica el criterio de la primera y de la segunda derivada; y, determina las dimensiones solicitadas.
	0 – 1	2 – 5	6 – 8	9 – 10

**2) Resuelva:**

a) (5 PUNTOS)  $\int (2x+5)e^{-x} dx$

**Solución:**

Se aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas:

$$\int (2x+5)e^{-x} dx = 2\int xe^{-x} dx + 5\int e^{-x} dx$$

Al término  $\int xe^{-x} dx$ , se le aplica la técnica de integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^{-x} dx \\ du &= dx & v &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Por lo tanto:

$$\int (2x+5)e^{-x} dx = 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + 5\int e^{-x} dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} - 5e^{-x} + C$$

$$\int (2x+5)e^{-x} dx = -2xe^{-x} - 7e^{-x} + C$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas, identifica que debe aplicar la técnica de integración por partes y conoce la antiderivada de la función exponencial.	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar, ni tampoco sabe la antiderivada de la función exponencial.	Aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas, pero no identifica la técnica de integración que debe usar o se equivoca al integrar la función exponencial.	Aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas, identifica la técnica de integración que debe usar, pero no integra correctamente alguno de los términos.	Aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas, identifica que debe aplicar la técnica de integración por partes, integra correctamente y realiza la simplificación de términos semejantes.
	0	1	2 - 3	4 - 5

b) (5 PUNTOS)  $\int \frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)} dx$

Solución:

Se aplica la técnica de integración por fracciones parciales:

$$\frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3}$$

$$\frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)} = \frac{A(x-1)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-1)}{(x^2-1)(x-3)}$$

$$5x-7 = A(x-1)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-1)$$

$$x = -1 \rightarrow 5(-1) - 7 = A(-1-1)(-1-3) + 0 + 0 \rightarrow 8A = -12 \rightarrow A = -3/2$$

$$x = 1 \rightarrow 5(1) - 7 = 0 + B(1+1)(1-3) + 0 \rightarrow -4B = -2 \rightarrow B = 1/2$$

$$x = 3 \rightarrow 5(3) - 7 = 0 + 0 + C(3+1)(3-1) \rightarrow 8C = 8 \rightarrow C = 1$$

$$\int \frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)} dx = \int \left( \frac{-3/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{x-3} \right) dx$$

$$\int \frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-3}$$

$$\int \frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)} dx = -\frac{3}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \ln|x-3| + C$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante identifica que debe aplicar la técnica de integración por fracciones parciales, determina los valores de un sistema de ecuaciones lineales, aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas y conoce la antiderivada de una función racional propia.	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar, ni resuelve correctamente un sistema de ecuaciones lineales, ni tampoco sabe la antiderivada de una función racional.	Identifica la técnica de integración que debe aplicar, pero no resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales.	Identifica la técnica de integración que debe aplicar, resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales, no aplica bien la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas o no integra correctamente alguno de los términos.	Identifica que debe aplicar la técnica de integración por fracciones parciales, resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales, aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas e integra correctamente cada término.
	0	1	2 - 4	5

3) Calcule:

a) (5 PUNTOS)  $\int_{-1}^1 \left( x|x| + \frac{10}{x^2+1} \right) dx$

Solución:

Se aplica la propiedad de linealidad de las integrales definidas:

$$\int_{-1}^1 \left( x|x| + \frac{10}{x^2+1} \right) dx = \int_{-1}^1 x|x| dx + 10 \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

Observe los integrandos de cada término:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1} = g(-x)$$

La función  $f$  es impar y la función  $g$  es par. Se aplica la propiedad de simetría:

$$\int_{-1}^1 x|x| dx + 10 \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1} = 0 + 10(2) \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int_{-1}^1 \left( x|x| + \frac{10}{x^2+1} \right) dx = 20(\arctan(x)) \Big|_0^1 = 20(\arctan(1) - \arctan(0)) = 20\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 \left( x|x| + \frac{10}{x^2+1} \right) dx = 5\pi}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante identifica que debe aplicar la propiedad de simetría y de linealidad de las integrales definidas; y, conoce la antiderivada de una función racional propia.	No logra identificar las propiedades que debe aplicar de las integrales definidas, ni tampoco sabe la antiderivada de una función racional.	Identifica las propiedades de las integrales definidas que debe aplicar, pero no las aplica correctamente.	Identifica las propiedades de las integrales definidas que debe aplicar, integra correctamente, pero no evalúa bien alguno de los términos.	Identifica que debe aplicar la propiedad de simetría y la propiedad de linealidad de las integrales definidas, integra correctamente; y, evalúa bien cada término.
	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2 – 4</b>	<b>5</b>

b) (5 PUNTOS)  $\int_{-1}^2 (x + \operatorname{sgn}(x)) dx$

Solución:

Se establece la regla de correspondencia de la función que se tiene como integrando:

$$x + \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1-1, & -1 \leq x < 0 \\ 0+0, & x = 0 \\ 0+1, & 0 < x < 1 \\ 1+1, & 1 \leq x < 2 \end{cases} = \begin{cases} -2, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Se aplica la propiedad de linealidad de las integrales definidas:

$$\int_{-1}^2 (x + \operatorname{sgn}(x)) dx = \int_{-1}^0 -2 dx + \int_0^1 dx + \int_1^2 2 dx = -2x \Big|_{-1}^0 + x \Big|_0^1 + 2x \Big|_1^2$$

$$\int_{-1}^2 (x + \operatorname{sgn}(x)) dx = -2(0 - (-1)) + (1 - 0) + 2(2 - 1) = -2 + 1 + 2$$

$$\int_{-1}^2 (x + \operatorname{sgn}(x)) dx = 1$$

Rúbrica:

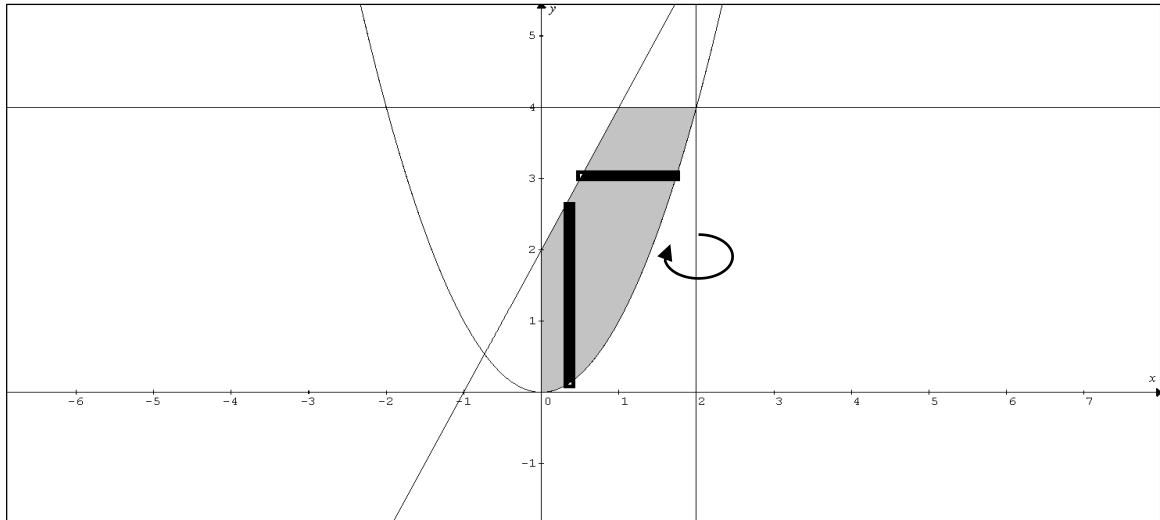
Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante identifica que debe sumar las funciones especiales dadas, aplicar la propiedad de linealidad de las integrales definidas; y, conocer la antiderivada de una función constante.	No logra identificar que debe sumar las funciones dadas, ni aplicar las propiedades de las integrales definidas, ni tampoco sabe la antiderivada de una función constante.	Identifica que debe sumar las funciones dadas aplicando las definiciones de las funciones especiales, pero no lo hace correctamente.	Identifica que debe sumar las funciones dadas aplicando las definiciones de las funciones especiales, integra correctamente, pero no evalúa bien algún término.	Identifica que debe sumar las funciones dadas aplicando las definiciones de las funciones especiales, integra correctamente; y, evalúa bien cada término.
	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2 – 4</b>	<b>5</b>

- 4) (10 PUNTOS) Dada la región  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 \wedge y \leq 2x + 2 \wedge y \leq 4 \wedge x \geq 0\}$ .

Dibuje la región  $R$  en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, en unidades cúbicas, que se genera al rotar  $R$  alrededor del eje  $x = 2$ .

**Solución:**

En el plano cartesiano se define la siguiente región:



Se puede considerar una integración con capas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^1 (2-x)(2x+2-x^2)dx + 2\pi \int_1^2 (2-x)(4-x^2)dx \\
 V &= 2\pi \int_0^1 (4x+4-2x^2-2x^2-2x+x^3)dx + 2\pi \int_1^2 (8-2x^2-4x+x^3)dx \\
 V &= 2\pi \int_0^1 (4+2x-4x^2+x^3)dx + 2\pi \int_1^2 (8-4x-2x^2+x^3)dx \\
 V &= 2\pi \left(4x+x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 + 2\pi \left(8x-2x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2 \\
 V &= 2\pi \left(4+1-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right) + 2\pi \left(16-8-\frac{16}{3}+4-8+2+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right) \\
 V &= 2\pi \left(5-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right) + 2\pi \left(6-\frac{14}{3}-\frac{1}{4}\right) \\
 V &= 2\pi \left(5-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right) + 2\pi \left(6-\frac{14}{3}-\frac{1}{4}\right) \\
 V &= 2\pi \left(\frac{47}{12}\right) + 2\pi \left(\frac{13}{12}\right)
 \end{aligned}$$

$$V = 10\pi u^3$$

O se puede considerar una integración con el método del disco:

$$y = 2x + 2 \rightarrow x = \frac{y-2}{2}$$

$$y = x^2 \rightarrow |x| = \sqrt{y}$$

$$V = \pi \left[ \int_0^2 \left( (2)^2 - (2 - \sqrt{y})^2 \right) dy + \int_2^4 \left( \left( 2 - \frac{y-2}{2} \right)^2 - (2 - \sqrt{y})^2 \right) dy \right]$$

El resultado que se obtiene es el mismo.

**Rúbrica:**

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante identifica una región en el plano como la solución a un sistema de ecuaciones no lineales, observa el sólido de revolución que se forma y con un análisis de cálculo integral obtiene su volumen.	No logra identificar la región o no plantea correctamente la integral definida asociada al volumen.	Identifica la región a integrar pero tiene problemas para plantear la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución.	Identifica la región a integrar, plantea correctamente la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución, pero se equivoca al integrar algún término.	Identifica la región a integrar, plantea correctamente la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución, integra correctamente cada término y expresa el resultado.
	0 – 2	3 – 4	5 – 9	10



5) (10 PUNTOS) De los dos siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

a) Calcule el área, en unidades cuadradas, de la región interior a  $r = 3\text{sen}(\theta)$  y exterior a  $r = 2 - \text{sen}(\theta)$  en el primer cuadrante. Bosqueje la gráfica de ambas curvas polares y la región especificada.

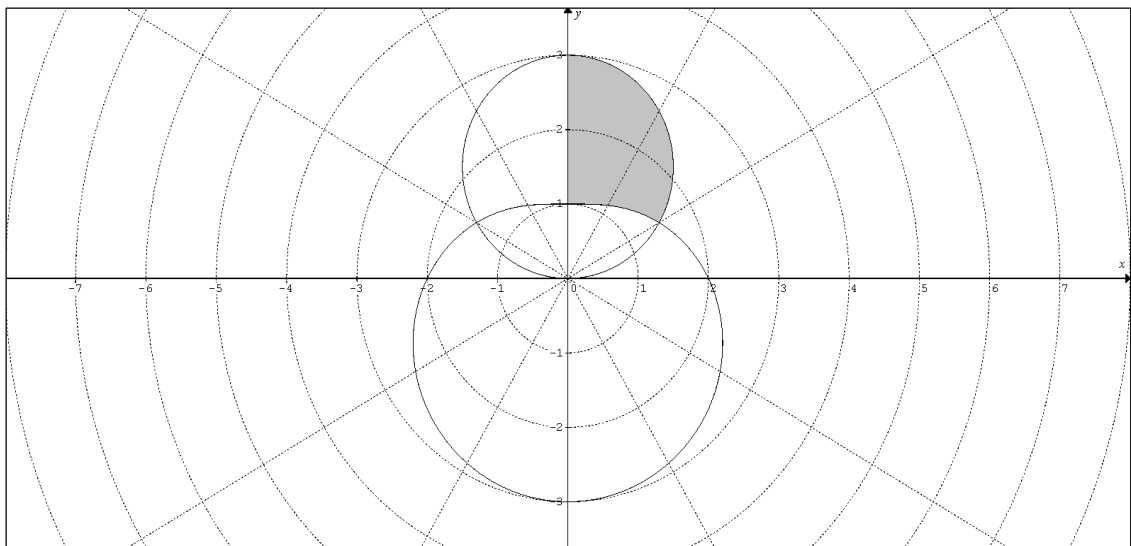
**Solución:**

Se igualan las expresiones polares, para determinar el punto de intersección de ambas curvas:

$$3\text{sen}(\theta) = 2 - \text{sen}(\theta) \rightarrow 4\text{sen}(\theta) = 2 \rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\theta = \frac{\pi}{6}\right) \vee \left(\theta = \frac{5\pi}{6}\right)$$

Se grafica la región en base a las ecuaciones de las curvas polares:



Como es en el primer cuadrante:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[ (3\text{sen}(\theta))^2 - (2 - \text{sen}(\theta))^2 \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[ 9\text{sen}^2(\theta) - (4 - 4\text{sen}(\theta) + \text{sen}^2(\theta)) \right] d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8\text{sen}^2(\theta) + 4\text{sen}(\theta) - 4) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (4(1 - \cos(2\theta)) + 4\text{sen}(\theta) - 4) d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (4\text{sen}(\theta) - 4\cos(2\theta)) d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (2\text{sen}(\theta) - 2\cos(2\theta)) d\theta$$

$$A = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \text{sen}(\theta) d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\cos(2\theta) d\theta = -2\cos(\theta) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - \text{sen}(2\theta) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$A = -2 \left( 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left( 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} u^2$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante identifica la región común entre dos curvas polares en forma analítica y en forma gráfica; y, con el uso de integrales sabe cómo se calcula el área en coordenadas polares.	No logra identificar bien cómo se grafican las curvas dadas o no sabe cómo plantear el área como una integral.	Grafica ambas curvas e identifica sus puntos de intersección, pero no grafica correctamente la región común entre las ecuaciones polares o no plantea correctamente la integral.	Grafica correctamente la región en base a los puntos de intersección, no conoce cómo integrar todas las expresiones trigonométricas que se presentan o no evalúa bien todos los términos.	Grafica correctamente la región en base a los puntos de intersección, integra correctamente todas las expresiones trigonométricas que se presentan y evalúa bien cada término.
	0 – 1	2 – 4	5 – 9	10

b) La fabricación de las  $q$  unidades de cierto producto tiene las siguientes funciones:

$$\text{Oferta: } O(q) = 42q \qquad \text{Demanda: } D(q) = 1000 - 0.4q^2$$

- i) Calcule el punto de equilibrio para la fabricación de este producto.
- ii) Calcule el excedente del consumidor, en dólares americanos, en el intervalo del punto de equilibrio, como el área de la función oferta y la demanda en dicho punto de equilibrio.

**Solución:**

- i) Para determinar el punto de equilibrio, se igualan las ecuaciones de la oferta y la demanda.

$$\begin{aligned} 1000 - 0.4q^2 &= 42q \\ 0.4q^2 + 42q - 1000 &= 0 \\ q &= \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4(0.4)(-1000)}}{2(0.4)} \\ q &= \frac{-42 \pm \sqrt{1764 + 1600}}{0.8} \\ q &= \frac{-42 \pm \sqrt{3364}}{0.8} \\ q &= \frac{-42 \pm 58}{0.8} \\ \left( q = \frac{-42 + 58}{0.8} \right) \vee \left( q = \frac{-42 - 58}{0.8} \right) \\ (q = 20) \vee (q = -125) \end{aligned}$$

Se descarta el valor negativo y se concluye que el punto de equilibrio se da cuando se demandan y se ofrecen 20 unidades de producto.

- ii) El excedente del consumidor se lo calcula así:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{20} (D(q) - D(20))dq \\ A &= \int_0^{20} (1000 - 0.4q^2 - 840)dq \\ A &= \left( 1000q - \frac{0.4q^3}{3} - 840q \right) \Big|_0^{20} \\ A &= (20000 - 1066.67 - 16800) \\ A &= 2133.33 \end{aligned}$$

El excedente del consumidor es de \$ 2 133.33.

**Rúbrica:**

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante identifica la región común entre las funciones de oferta y demanda en forma analítica y en forma gráfica; y, con el uso de integrales sabe cómo se calcula el área en coordenadas cartesianas.	No logra identificar bien cómo se grafican las funciones dadas o no sabe cómo plantear el área como una integral.	Grafica ambas funciones e identifica el punto de equilibrio, pero no grafica correctamente la región común entre las funciones o no plantea correctamente la integral.	Grafica correctamente la región en base al punto de equilibrio, no conoce cómo establecer el integrando que se presenta o no evalúa bien todos los términos.	Grafica correctamente la región en base al punto de equilibrio, integra correctamente y evalúa bien cada término.
	0 – 1	2 – 4	5 – 9	10