ESCUELA SUPERIOR
POLITECNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS
POSTGRADO EN EDUCACION MATEMATICA

"GRUPOS DE PERMUTACIONES CON APLICACION A GRUPOS DE SIMETRIA"

MONOGRAFIA DE GRADO
Previa a la obtención del Título de:

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA

Presentada por:
NANCY HIPATIA VACA CEVALLOS

GUAYAQUIL - ECUADOR
1994

ING. MARGARITA MARTINEZ

Directora de Monografía

DECLARACION EXPRESA

La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL.

(Reglamento de Exámenes y Títulos Profesionales).

AGRADECIMIENTO

Aprovecho de esta oportunidad para expresar mi eterna gratitud al Ministerio de Educación Pública, al Personal Directivo, Docente y Administrativo de la Escuela Superior Politécnica del Litoral y, de manera especial al Ex-Ministro de Educación, Dr. Eduardo Peña Triviño, al Director del Programa de Educación Matemática, Ms. Gaudencio Zurita, a la Sra. Directora de la Monografía, Ing. Margarita Martínez, al FILANBANCO y a todos mis compañeros; con la seguridad de que los conocimientos recibidos serán en lo posterior un invalorable instrumento de cultura matemática para el país.

DEDICATORIA

Este modestísimo trabajo dedico a mi única hija Angela, que con doloroso sacrificio y estoicismo soportó la ausencia de su madre.

INDICE

INTRODUCCION

propósito de este trabajo es dar a conocer al estu-
nte el Tema de SIMETRIA en forma fácil y sencilla,
endiéndose por Simetría de una figura a las posibili-
es de hacerla coincidir consigo mismo moviéndola sin
ormarle por medio de rotación y reflexión. Comenzare-
estudiando la operación binaria y sus característi-
, analizaremos las funciones: Identidad, Inyectiva,
reyectiva, Composición de Funciones y la Función In-
sa. Luego pasaremos a revisar Grupos y sus axiomas,
lizar el ejemplo del grupo de simetrías, nos daremos
nta que dentro de un grupo es posible encontrar un
po más pequeño, así por ejemplo el grupo de rotaciones
triángulo es parte del grupo de las simetrías del
ángulo. Con este ejemplo nos sugiere el concepto de
grupo y estaremos en capacidad de entender un grupo
os elementos son permutaciones. Avanzando con nuestro
lisis veremos el Isomorfismo con lo que entenderemos
dos grupos son Isomorfos si tienen la misma estructu-
algebraica y únicamente difieren en sus elementos.
iendo entendido el tema anterior, pasaremos a demos-
r el Teorema de Cayley que nos dice "que todo grupo es
morfo a un grupo de permutaciones".

último analizaremos Isometrías que es una aplicación
amplia de este singular movimiento de las diferentes
uras geométricas.

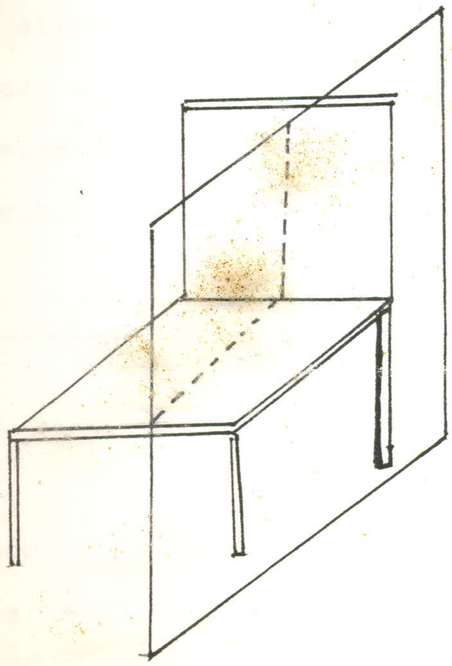
CAPITULO I

INTRODUCCION A LA SIMETRIA.-

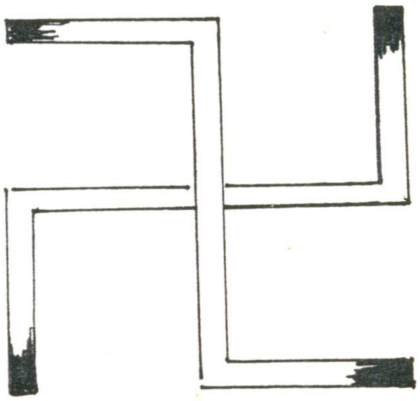
palabra simetría proviene del griego symmetros que nifica mensurado, adecuado. La simetría en esencia es manera de mover las figuras de modo que sigan eciendo las mismas. Por el momento damos esta inición y luego con las herramientas del Capítulo II aremos en capacidad de profundizar en el Capítulo IV.

1. Clases de Simetría.-

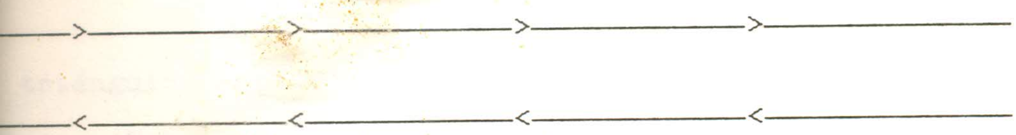
1.1. **Simetría Bilateral.-** La figura humana es roximadamente simétrica respecto de una recta vertical. silla de la figura es simétrica respecto a un plano sector que pasa por el asiento y el espaldar.



2. **Simetría Rotacional.**- La rotación es el giro del
po alrededor de un eje, el eje de rotación. Ejemplos:
ímbolo de la Isla de Mann, tres piernas corriendo, o
vástica, poseen simetría rotacional.



.3. **Simetría de traslación.**- La traslación es un
rimiento simple y en línea recta. Cómo por ejemplo, la
slación de un tramo de vía de fecrrocarril en uno o
durmientes a lo largo de un eje longitudinal
ominado eje de traslación o de deslizamiento.



traslación a la derecha una distancia igual. T´ una
slación a la izquierda igual distancia.

. **Simetría identidad.-** Es la representación
iada del objeto sobre sí mismo. Toda figura de forma
ante posee esta clase de simetría.

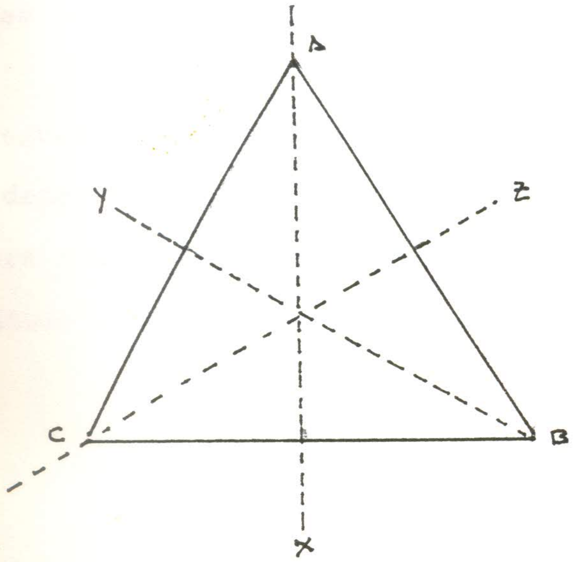
igura puede ser simétrica respecto de varias rectas
táneamente o combinar las simetrías bilateral y
ional. Por ejemplo, un cuadrado es bilateralmente
rico respecto de sus diagonales y respecto de las
s que, pasando por el centro, son paralelas a los
, también puede ser rotado 90° con respecto a un eje
asa por la intersección de sus diagonales.

onjunto de simetrías de una figura con su
plicación es un ejemplo de una estructura algebraica
que se denomina grupo, para esto necesitamos
ılar los conceptos de grupo, operación binaria, etc.

figura tiene un grupo de simetrías, por ejemplo la
a humana tiene dos simetrías: La identidad (I) y la
exión (r) respecto de una recta universal. La tabla
ıltiplicar es

*	I	r
I	I	r
r	r	I

triángulo equilátero posee seis operaciones de
tría. (Este gráfico está en la siguiente página).



a identidad (I), que dejan los puntos de la figura en mismo lugar.

Rotaciones: w rota con respecto al eje que pasa por la intersección de sus alturas en sentido de agujas del reloj 120°

v rota con respecto al eje que pasa por la intersección de sus alturas en sentido de agujas del reloj 240°

Reflexiones:	x respecto a la recta X	$\begin{matrix} & A & \\ C & & B \end{matrix}$	$\begin{matrix} & A & \\ B & & C \end{matrix}$
	y respecto a la recta Y	$\begin{matrix} & A & \\ C & & B \end{matrix}$	$\begin{matrix} & C & \\ A & & B \end{matrix}$
	z respecto a la recta Z	$\begin{matrix} & A & \\ C & & B \end{matrix}$	$\begin{matrix} & B & \\ C & & A \end{matrix}$

onjunto de simetrías de este triángulo K = I, W, V, , Z es cerrado conservando la operación (composición unciones).

se preguntará ¿qué es cerrado?. Para aclarar ésta y s las demás preguntas, procigamos con el Capítulo II nos dará los conceptos básicos que manejaremos luego el Capítulo IV.

CAPITULO II

<u>NCION</u>, <u>GRUPO</u>, <u>SUBGRUPO</u> y <u>PERMUTACION</u>

Operación binaria como función

1. **Definición.-** Una operación binaria es una función asigna a cada par ordenado de elementos de conjunto, n elemento del conjunto.

f: SxS -> S

S = {a,b}

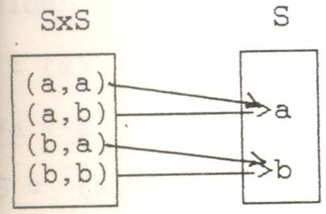


Tabla de multiplicar

f	a	b
a	a	b
b	a	b

Este ejemplo es una de las tantas operaciones binarias que podemos definir.

operación binaria de un conjunto S puede cumplir con siguientes características:

Conmutativa: Si y solo si $a*b = b*a \quad \forall a,b \in S$

Asociativa: Si y solo si $a*(b*c)=(a*b)*c \quad \forall a,b,c \in S$

Existe el Neutro: $a*e = e*a = a \quad \exists e \in S; \forall a \in S$

Existe el Inverso: $a*a' = a'*a = e \quad \forall a \in S \quad \exists a' \in S$

esitaremos también la siguiente definición

nición

; es un grupo finito, entonces el **orden** $|S|$ de S es el
ro de elementos en S.

a, para entender mejor desarrollaremos algunos
plos:

blema 1

S un conjunto con un elemento 2, 3 y n elementos.
ntas operaciones diferentes se puede definir en S?

ución:

S = {a}
a*a = a Una sola operación binaria
S = {a,b} n=2, el número de operaciones es: hay 4
mentos en SxS, $|SxS| = 2 \times 2 = 4$, y para cada elemento
b) de SxS tiene 2 posibilidades, entonces $2^4 = 16$
S = {a,b,c} n=3, el número de operaciones es: hay 9
ementos en SxS, $|SxS| = 3 \times 3 = 9$, entonces $3^9 = 19683$
S = (a,b,...,n}, $|SxS| = nxn = n^2$

$$\overbrace{nxnxn \ldots n}^{n^2} \quad \text{entonces } n^{(n^2)}$$

blema 2

a Q el conjunto de los número racionales diferentes de
ro, explicar por qué la división (denotada por ÷) es
a operación binaria en Q

$Q^* = Q - \{o\}$ donde $\neg(x=o \vee z=o)$

/x $\in Q$ y $y/z \in Q$ $\neg(W=0 \vee y=0)$ w, x, y, z son

ros

a $w/x \div y/z = wz/xy \in Q^*$ $\neg(W \cdot Z=0)$

lo tanto, la división es una aplicación de $Q \times Q \rightarrow Q$

Función.- Si a cada elemento de un conjunto A de
ida se le hace corresponder un único elemento del
junto B de llegada, se dice que el conjunto de estos
es ordenados así construidos es una función (o
icación) de A en B y se denota por

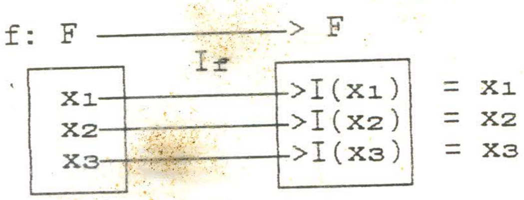
$$f: A \rightarrow B \quad \text{o} \quad A \xrightarrow{f} B$$

.1. Clases de funciones.-

.1.1. Función Identidad.-

inición: $f: F \rightarrow F$ $\forall x \in F$; $I_F(x) = x$

a aplicación de $F \rightarrow F$ que hace corresponder a todo x
F el mismo elemento x y se designa I_F



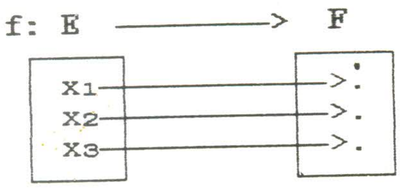
2.1.2. Función Inyectiva.-

finición: $f: E \rightarrow F$ $\forall x_1, x_2 \in Dmf$

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

$$ó \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

plicación es inyectiva si dos elementos diferentes conjunto de partida, tienen siempre imágenes ntas en el conjunto de llegada.



LO

r que f es inyectiva

-> y = 2x-1

$_1$) = f(x_2)

- 1 = $2x_2$ - 1

$2x_1$ = $2x_2$

ega x_1 = x_2

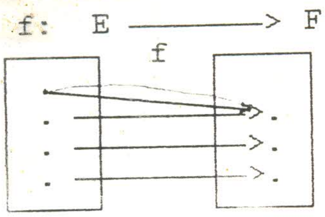
o tanto f es Inyectiva

.3. Función Sobreyectiva.-

nición: f: E -> F

na aplicación de un conjunto E sobre un conjunto F, do todo elemento de F es imagen de por lo menos un ento x de E.

ién se llama aplicación sobre ∀y∈F ∃x∈E, tal que = y es decir Rang F = E



LO:

1,-1}, f: R-{o} -> F tal que $f(x) = \frac{x}{|x|}$

positivo implica $|x| = x$ entonces $y = x/x = 1$. Si x

gativo $|x| = -x \Rightarrow y = x/-x = -1$. f es sobreyectiva

conjunto de los reales no nulos sobre F = {1,-1}

1.4. **Función Biyectiva.-**

ición: Se dice que una aplicación f:E->F es

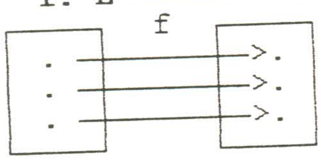
ctiva si a la vez es inyectiva y sobreyectiva.

es una biyección de E en F, cada elemento y de F es

magen de un elemento único x de E.

, $!x\in E$, tal que $y = f(x)$

f: E ——> F



MPLO:

aplicación f: N -> N*=N-{o} es una biyección

$x \rightarrow x+1$

$\forall x_1 x_2 \in N$

$f(x_1) = x_1+1 = f(x_2) = x_2+1$

$x_1 + 1 = x_2 + 1$

$x_1 = x_2$, f es inyectiva

$\forall y \in N-\{o\}$

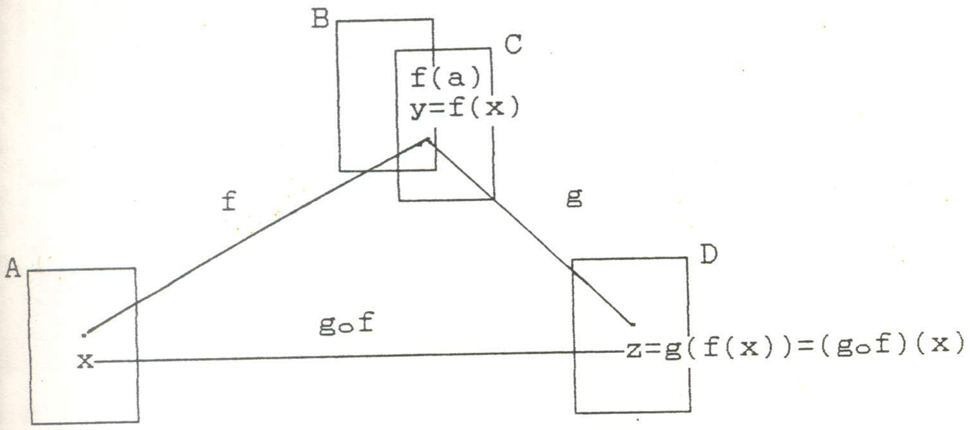
$\exists x=y-1$

$f(x)=f(y-1)$

$f(x)=(y-1)+1$

$f(x)=y$ f es sobreyectiva

1.5. Composición de funciones



nición. Dadas las aplicaciones

$$f: A \to B \quad y \quad g: C \to D$$

s que $f(A) \subseteq C$, el conjunto de parejas ordenadas

z):/$x \in A$ y $z = g(f(x))\}$

una función, llamada compuesta de g con f, y se

igna por $g \circ f: A \to D$. Una condición necesaria para que

composición de funciones $g \circ f(x)$ exista es que el

$\subseteq$Dmg

MPLO:

$A=B=C=D=R$ $f(x)=A \to B$; $g(x) = C \to D$

$) = x^2$

$)= \text{Cos } x$

$f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \text{Cos } (x^2)$

$f)(x) = f(g(x)) = f(\text{Cos } x) = (\text{Cos } x)^2$

o podemos notar la operación no es en general

mutativa, es decir que

$$f \circ g \neq g \circ f$$

6. **Función Inversa.-**

na función $f: A\to B = \{(x,y)\in AxB/y=f(x)\}$

remos $f^{-1}: B\to A = \{(y,x)\in BxA/(x,y)\in f\}$,

una relación de B->A, ya que es un Subconjunto del

to cartesiano BxA, esto es, $f^{-1}\subseteq BxA$ pero no es

riamente una función. Sin embargo, si la función es

iva, entonces f^{-1} es una función de B sobre A y

el nombre de función inversa. Con la

erística de que

$= I_A$ y $f\circ f^{-1} = I_B$

rupo.-

remos grupo como una estructura que consta de un

to G, con una operación que posee elemento neutro y

todo elemento tiene inverso.

Definición.- Un grupo $(G,*)$ es un conjunto no

de elementos G, junto con una operación binaria $*$

ue satisface los siguientes axiomas:

a operación binaria $*$ es asociativa

$\exists e\in G\ \forall x\in G$, tal que $e*x = x*e = x$

Este elemento es elemento identidad para $*$ en G).

$\forall a\in G$, $\exists a'\in G$ tal que $a'*a = a*a' = e$

el elemento a' es el inverso de a). Bajo la

operación $*$.

entender mejor la definición y los axiomas
zaremos algunos ejemplos de Grupos que serán de
dad para el estudio que estamos efectuando.

lo 1

njunto de todos los Enteros no negativos (incluyendo
con la operación +

el elemento identidad 0, pero no tiene el inverso
2, luego podemos decir que no es un grupo.

sto podemos concluir que todos conjuntos no siempre
grupos; para que sea grupo es necesario que la
ción defina y cumpla con los axiomas enunciados.

lema 2

S el conjunto de los enteros pares. Demostrar que S
la adición de enteros es un Grupo.

a = $2a_1$, b = $2b_1$ dos elementos cualesquiera de S
peración binaria
= $2(a_1+b_1)$ es un elemento único de S.
xiste el elemento neutro
= e*a = 0 ; 0∈S ∃e∈S
2*0
ya que
2*0 y
= a+0 = a ∀a∈S

$*a_1$

$*0 = 2a_1 = a$

$a_1 = 2a_1 = a$

iste el elemento inverso

$\equiv a' = -2a^1 \in S$ tal que

$-2a_1) = 2*0 = 0$

ema 3

el conjunto $\{0,1,2\}$ construir la tabla de plicar (denotaremos así a una operación binaria spondiente al grupo).

un entero positivo fijo. Cuando $m = 3$

$= 3$ la tabla de multiplicar es

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

e el elemento neutro que es el 0.

e el inverso de cada elemento, por ejemplo, el so de 1 es el 2, y del 2 es el 1, y es asociativa fique el lector).

el conjunto $\{0,1,2,3\}$ construir la tabla de plicar

= 4 la tabla de multiplicar es

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

e el elemento neutro que es el 0.

e el inverso de cada elemento, por ejemplo, el so de 1 es el 3, el inverso de 2 es 2 y de 3 es 1, s es asociativa (verifique el lector).

observará las datos de las tablas definen una ción binaria sobre un conjunto que satisface la ición de grupo.

. **Grupos Cíclicos.-**

.1. **Definición:** Los Grupos que se generan a partir n solo elemento se llaman <u>cíclicos</u>; entonces G es co si podemos encontrar un elemento $a \in G$ tal que

$$<a> = \{a^n / n \in Z\} \text{ en donde } a^n = \overbrace{a*a*\ldots*a}^{n \text{ veces}}$$

o tanto a es un generador de G; y el grupo G = <a> clico.

onvexión adoptaremos $a^0 = e$

$$a^{-1} = a'$$

. Grupo Abeliano.-

1. Definición: Un grupo G es abeliano si su

ión binaria es conmutativa.

dad elemental de los Grupos Cíclicos:

Grupo cíclico es abeliano"

ración:

un Grupo Cíclico y sea a un generador de G, tal que

$$G = \langle a \rangle = \{a^n / n \in Z\}$$

y g_2 son dos elementos cualesquiera de G, existen

os r y s tales que $g_1 = a^r$ y $g_2 = a^s$

$g_2 = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s a^r = g_2 g_1$

do que G es abeliano.

los

(z,+) es un Grupo Cíclico?. Si es así obtenga los

adores $(z,+) = \langle 1 \rangle = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\langle -1 \rangle = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

a = generador de los Enteros

n = números enteros

a = 1

$a^n = 1^0 = 0$

$1^1 = 1$

$1^2 = 1+1 = 2$

$(1)^{-1} = -1$

$(1)^{-2} = ((1)^{-1})^2 = -1 + -1 = -2$

ces $(Z,+)$ es un Grupo Cíclico con dos generadores, 1

Subgrupos.-

contramos que un subconjunto de G forma un grupo más
ío dentro de otro G, esto es un ejemplo de subgrupo.
s es importante anotar que todo subconjunto de un
no es un subgrupo.

. **Definición:** Si H es un subconjunto de un grupo G
do bajo la operación de grupo de G y si H es él
un grupo bajo esta operación inducida, entonces H
subgrupo de G. Denotaremos por $H \leq G$ o $G \geq H$ el hecho
e H es un subgrupo de G, y $H<G$ o $G>H$ significará que
pero $H \neq G$.

rio de subgrupo que debemos tomar encuenta para
icar que es un subgrupo:
njunto H de un grupo G es subgrupo de G si y sólo si
es cerrado bajo la operación binaria de G.
identidad e de G está en H;
ra todos los $a \in H$ es cierto que $a^{-1} \in H$ también.
delante daremos un criterio más compacto.

los:
minar si el subconjunto de números reales es
upo bajo la suma del Grupo C de los números
ejos bajo la suma

Cerrada bajo la operación binaria de R

$\forall a,b \in R \quad a+b = c \quad c\in R$

$z_1 = a+i0$

$z_2 = b+i0$

$z_1+z_2 = (a+b)+i(0)$ por lo que $Z_1+Z_2\in R$

La identidad e de G está en R

$e\in R \quad \forall a\in R$ tal que $\exists e\in R$

$e = 0+i0$ tal que $\forall z=a+i0$

$e+a = a+e = a$

$\forall z\in R \quad \exists z'\in R$

$z = a+i0 \quad \exists z'=-a+i0$

$z+z' = z'+z = e = 0+i0$

ema 1

rese que si H y K son subgrupos de un grupo abeliano
tonces $J = \{h\cdot k \ /h\in H$ y $k\in K\}$ es subgrupo de G

$J = \{h\cdot k \ /h\in H$ y $k\in K\}$, entonces se sabe que $h*k = k*h$
e es abeliano y como G es un Grupo, la operación es
ativa, esto es

ativa: $h_1*(h_2*k_1*k_2) = (h_1*h_2*k_1)*k_2$

$\forall \ h_1, h_2, k_1, k_2 \in G$

utro está en J, esto es $e\in\{(h\cdot k) \ /h*k\in J\}$ ya que e es
emento neutro del Grupo G

=> $e\in H$ porque H es subgrupo de G

=> $e\in K$ porque K es subgrupo de G

por lo que

$e*e = e\in J$

, el inverso está en J porque

$a \in J$

$a = h*k$

$h \in H$ y $k \in K$

$\exists h^{-1} \in H$ porque H es subgrupo

$\exists k^{-1} \in K$ porque K es subgrupo

esto es $h^{-1}*k^{-1} \in J$

$(h*k) * (h^{-1}*k^{-1}) = e$

$h * [k*(h^{-1}*k^{-1})] = e$

$h * (h^{-1}*k^{-1}) * k = e$

$(h*h^{-1}) * (k^{-1}*k) = e$

$e * e = e$

$e = e$

lo tanto J es subgrupo de G.

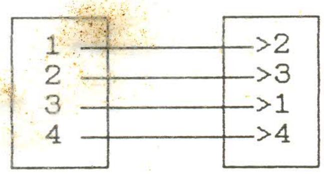
dedicaremos al estudio de grupos cuyos elementos son utaciones.

Permutación

una permutación de A <=> f: A -> A, f es biyectiva.

plo $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\sigma: A \longrightarrow A$



que observamos en el gráfico podemos denotar de la iente manera:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ otro ejemplo } \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ema.- La composición de permutaciones es otra tación, ésto es, probaremos que la composición de taciones es una operación binaria en el conjunto de taciones, y la denominamos como la multiplicación de taciones.

stración

$bεG$ => $a*b \in G$

son permutaciones de Ω => $W*V$ es una permutación

-> A   V: A->A   =>   W*V: A->A

biyectiva   V es biyectiva   W*V es biyectiva

es inyectiva

emos demostrar que $(a_1)WV = a_2WV$ => $a_1 = a_2$

iendo de $(a_1W)V = (a_2W)V$ V es inyectiva

=> $a_1W = a_2W$ W es inyectiva

nalmente

=> $a_1 = a_2$

es sobreyectiva

A, ya que V sobre, $\exists a' \in A$ tal que $(a')V = a$

W es sobre A, $a'' \in A$ tal que $a' = a''W$

$a = a'v = (a''W)V = (a'')WV$ ahora $\forall a \in A \; \exists a'' \in A$

$a(a'')WV = a$

*V es una permutación

ema

$A \neq \Phi$

$\{ \bigcup_{i=1}^{n} G/G_i$ es una permutación $A\} \Rightarrow (S_a, \cdot)$ es un Grupo

stración

σ, τ, U permutaciones, por lo tanto son funciones a uno y sobre de A en A.

emostraremos que la multiplicación (composición) es sociativa $\forall a \in A$

$[(\sigma\tau)u] = [a(\sigma\tau)]u = [(a\sigma)\tau]u = (a\sigma)(\tau u) = a[\sigma(\tau u)]$

> $(\sigma\tau)u$ y $\sigma(\tau u)$ llevan toda $a \in A$ al mismo elemento $(a\sigma)\tau]u$.

or tanto son la misma permutación y la composición es sociativa

on esto probamos que la composición de funciones es SOCIATIVA.

emostraremos que existe en neutro para la operación. a permutación I tal que $aI=a$ $\forall a \in a$; I es una ermutación y actúa como elemento neutro ya que $\forall$ ermutación $\sigma I = I\sigma = \sigma$

emostraremos que existe el elemento inverso. Para una ermutación σ existe σ^{-1}; ya que si σ esta última es na permutación, entonces es un función biyectiva, y or lo tanto existe su inversa σ^{-1} tal que $\sigma^{-1} \cdot \sigma = \sigma \cdot \sigma^{-1} = I$

n esto hemos demostrado que es un Grupo de
ermutaciones.

A = {1,2,3,...,n} denominaremos S_n = {σ/σ es una
utación de A en A.

te un tipo particular de las permutaciones que es
ada ciclo.

1. Ciclo.-
nición: Una permutación σ de un conjunto A es un
o de longitud n si existen $a_1, a_2, \ldots a_n \in A$ tales que

$= a_2 \quad a_2\sigma = a_3, \ \ldots \ a_{n-1}\sigma = a_n \quad a_n\sigma = a_1$

$= x \quad \forall x \in A \quad$ tal que $\quad \neg(x \in \{a_1, a_2, \ \ldots \ a_n\})$

ibimos $\sigma = (a_1, a_2, \ \ldots \ a_n)$

plos

A = {1, 2, 3, 4, 5}

iclo es $(1, 3, 5, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

o mismo denotar como

3, 5, 4) = (3, 5, 4, 1) ó (5, 4, 1, 3) ó (4, 1, 3, 5)

ciclos son tipos particulares de permutaciones.

blema 1

esar $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

producto de ciclos disjuntos.

ción:

, $2\alpha=4$, $4\alpha=8$, $8\alpha=1$. $3\alpha=6$, $6\alpha=12$, $12\alpha=9$, $9\alpha=3$, $5\alpha=10$,

5, $7\alpha=14$, $14\alpha=13$, $13\alpha=11$, $11\alpha=7$. Luego

$$\alpha = (1,2,4,8)(3,6,12,9)(7,14,13,11)$$

2. Transposición

nición: Un Ciclo de longitud 2 es una transposición

$a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2)\ (a_1, a_3)\ \ldots\ (a_1, a_n)$

ese que:

Las transposiciones tiene la particularidad son ciclos de longitud 2. Dado un elemento de un grupo A,

Los ciclos se pueden descomponer en transposiciones.

La composición de un ciclo consigo mismo da la identidad.

Si $a^r = e$ r es el número que me indica las veces que se debe operar el elemento consigo mismo hasta lograr la identidad.

Las permutaciones de un conjunto finito es par, si puedo expresar como el producto de un número par de transposiciones y de lo contrario es impar.

.3. Permutaciones Pares e Impares

finición: Una permutación de un conjunto finito es par impar si se pueda expresar como el producto de un mero par de transposiciones o como el producto de un mero impar de transposiciones respectivamente.

4. Grupos Alternantes

n≥2 el número de permutaciones pares en Sn es igual
úmero de permutaciones impares: es decir, Sn se
ompone en el conjunto de permutaciones pares e
res constituye tener un orden de (n!)/2. Para
rar, sea An el conjunto de permutaciones pares en Sn
a Bn el conjunto de permutaciones impares para n≥2.

demostrar que An y Bn tienen el mismo número de
entos es necesario definir una función uno a uno de
obre Bn.

τ cualquier transposición fija en Sn que existe
ue n≥2, podemos suponer que $\tau=(1,2)$ definiremos la
ión h_τ

$$h_\tau : An \to Bn$$

$$\sigma h_\tau = \tau\sigma = (1,2)\sigma$$

es, $\sigma \in An$ va a dar a $(1,2)\sigma$ bajo h_τ. σ es par, la
utación $(1,2)\sigma$ aparece como el producto de (1 +
ero par) es decir un número impar de transposiciones,
que, $(1,2)\sigma$ está en Bn. Si para σ y $u \in An$ sucede que
= uh_τ orden $(1,2)\sigma = (1,2)u$, y como Sn es grupo,
emos cancelar, tenemos $\sigma = u$. Así h_τ es una función
a uno.

último $\tau = (1,2) = \tau^{-1}$

δ es una permutación impar $\tau^{-1}\delta$ es par que si $\delta \in Bn$ entonces

$$\tau^{-1}\delta \in An$$

$$(\tau^{-1}\delta)h\tau = \tau(\tau^{-1}\delta) = \delta$$

$$\forall \delta \in Bn \ \exists \tau^{-1}\delta \in An - \tau^{-1}\delta \ h_{\tau} = \delta$$

consiguiente, $h\tau$ es sobre Bn, y se concluye que el
ro de elementos en An es el mismo que el número de
entos de Bn puesto que existe una correspondencia
ívoca entre los elementos de ambos conjuntos.

ema.- Si $n \geq 2$, la colección de todas las permutaciones
es de {1, 2, 3, ..., n} forman un subgrupo de orden
2 del grupo simétrico Sn.

inición.- El subgrupo de Sn que consta de las
nutaciones pares de n letras es el grupo alternante An
n letras.
to Sn como An son grupos muy importantes.

nplos:

blema 1

ostrar que An = Sn implica que n=1, la demostración es
contradicción ya que $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$, es decir vamos a
oner que $n \neq 1$ y llegar a que $A_n \neq S_n$, como $n \neq 1$ tenemos
$n > 1$, A tiene al menos otro número que llamaremos 2,
debe contener una permutación que intercambie el 1 con

y deje intactos los otros elementos $\tau=(1,2)$ $\tau \notin An$,
sto que τ es una permutación impar y, por consiguiente
=> $An \neq Sn$.

blema 2

cular $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^{-1}, si

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ución:

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

a encontrar α^{-1} nótese que $x(\alpha\alpha^{-1}) = x$, que por
nsiguiente α^{-1} debe mandar $x\alpha$ a x. Ahora determinaremos
il es el elemento x que es enviado a 1. $6\alpha = 1$, y por
nto tenemos que $1\alpha^{-1}=6$, después $1\alpha=2$, $2\alpha^{-1}=1$.

ocediendo de esta manera obtenemos:

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

CAPITULO III

SOMORFISMO y TEOREMA DE CAYLEY

Isomorfismo.-

1. Definición.- Un isomorfismo entre un grupo G y un
o G´ es una función f uno a uno, que lleva G sobre G´
l que para todas las x y y en G

$$(xy)f = (x)f \cdot (y)f$$

grupos G y G´ son isomorfos. La notación usual es
.

ema.- Si F: G->G´ es un isomorfismo entre G y G´ y e
a identidad de G, entonces ef es la identidad en G´.
ás

$$a^{-1}f = (af)^{-1} \qquad \forall a \in G$$

abreviar, un isomorfismo lleva la identidad a la
tidad y los inversos a los inversos.

ostración:

x´∈G´. Como f es sobre, existe x∈G tal que xf=x´ =>

$$x' = xf = (ex)f = (ef)(xf) = (ef)x'$$

manera análoga

$$x' = xf = (xe)f = (xf)(ef) = x'(ef)$$

, para cada x´∈G´ tenemos

$$(ef)x' = x' = x'(ef)$$

es la identidad de G´

más que para a∈G

$$ef = (a^{-1}a)f = (a^{-1}f)(af)$$

$$ef = (a \cdot a^{-1})f = (af)(a^{-1}f)$$

$$a^{-1}f = (af)^{-1}$$

no mostrar que dos grupos son isomorfos?

demostración se ha dividido en los siguientes pasos:

o 1 Definir la función f que da el isomorfismo de G y G´. Esto es indicar cual sería xf en G´ $\forall x \in G$

o 2 Mostrar que f es sobre G´

o 3 Mostrar que f es una función uno a uno

o 4 Mostrar que $(xy)f = (xf)(yf)$ para todas las $x,y \in G$

calculan ambos lados de la ecuación y se observa si iguales.

mplos:

oblema 1

a F: G->G´ un isomorfismo entre el grupo G y un grupo . Muéstrese que la transformación f^{-1}: G´->G definida ra $x'f^{-1}=x$ por $xf=x'$ donde $x' \in G'$, es una función bien finida y es un isomorfismo entre G y G´.

G es isomorfo a G´; f:G´->G

función f^{-1}: G´->G está definida por $x'f^{-1}=x$ si $xf=x'$

Si f: G->G es una isometría sabemos que f es biyectiva por lo tanto f^{-1} también es biyectiva.

Probaremos que f^{-1} conservan las operaciones, esto es

$y')f^{-1} = x'f^{-1} \cdot y'f^{-1}$ sabemos

$^{-1} = x$ ya que $xf = x'$

$^{-1} = y$ ya que $yf = y'$

lo tanto $x'f^{-1} \cdot y'f^{-1} = xy$ (1)

más $(xy)f = xf \cdot yf$

$)f = x'y'$

$)f \cdot f^{-1} = (x'y')f^{-1}$

$= (x'y')f^{-1}$ (2)

(1) y (2) tenemos

$y')f^{-1} = xy = x'f^{-1}y'f^{-1}$

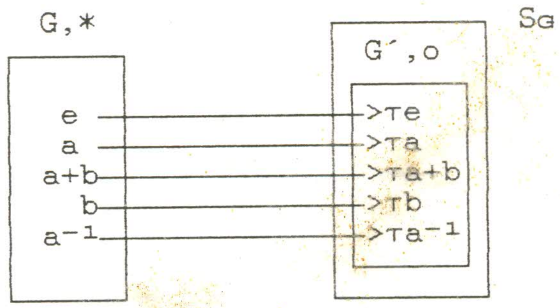
es lo que queriamos demostrar.

iendo ya conocimientos sobre ISOMORFISMO, estamos en acidad de hacer la demostración del Teorema de Cayley.

. **<u>Teorema de Cayley</u>**.-

lo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones

{de permutaciones de G en G}



mostración:

ra la demostración hemos dividido en tres pasos:

<u>imer Paso</u>

estra primera tarea es encontrar un conjunto G´ de rmutaciones que sea candidato a formar un grupo orfo a G. Piénsese en G simplemente como conjunto y S_G el grupo de todas las permutaciones de G. (Nótese en el caso finito si G tiene n elementos, S_G tiene n! entos. Así, en general, es claro que S_G es demasiado de para ser isomorfo a G.) Definamos cierto onjunto de S_G. Para $a \in G$ sea f_a la transformación de G dada por

$$xf_a = xa$$

$x \in G$. (Podemos pensar en f_a como multiplicación cha por a.) Si $xf_a = yf_a$ entonces $xa = ya$ y por ser ración binaria y con las leyes de cancelación enemos $x=y$. Así f_a es una función uno a uno. Además, $y \in G$, entonces

$$(ya^{-1})f_a = (ya^{-1})a = y,$$

, f_a lleva a G sobre G. Entonces como f_a: G->G es uno no y sobre G, f_a es una permutación de G, esto es, S_G. Sea

$$G' = \{f_a | a \in G\}.$$

undo Paso

rmamos que G' es un subgrupo de S_G. Debemos mostrar G' es cerrado bajo la multiplicación de mutaciones, que contiene la permutación identidad y contiene el inverso de cada uno de sus elementos. En mer lugar afirmamos que

$$f_a f_b = f_{ab}.$$

a mostrar que estas funciones son iguales, debemos trar que actúan igual sobre toda $x \in G$. Ahora

$x(f_a f_b) = (xf_a)f_b = (xa)f_b = (xa)b = x(ab) = xf_{ab}.$

$f_a f_b = f_{ab}$ y por tanto, G´ es cerrado bajo la
iplicación. Es claro que para toda $x \in G$,

$$xf_e = xe = x,$$

e e es el elemento identidad de G, de modo que f_e es
permutación identidad I de S_G y está en G´. Como
$=f_{ab}$ tenemos

$$f_a f_{a^{-1}} = f_{aa^{-1}} = f_e.$$

quí que

$$(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}},$$

odo que $(f_a)^{-1} \in G'$. Entonces, G´ es un subgrupo de S_G.

er paso

a probar que G es isomorfo al grupo G´ descrito.
inase $\phi : G \to G'$ por

$$a\phi = f_a$$

a $a \in G$. Si $a\phi = b\phi$ entonces f_a y f_b deben ser la misma
mutación de G. En particular,

$$ef_a = ef_b,$$

que ea = eb y a = b. Por tanto, ϕ es uno a uno. Es
ediato que ϕ es sobre G´ por la definición de G´.
almente, $(ab)\phi = f_{ab}$ mientras que

$$(a\phi)(b\phi) = f_a f_b.$$

o ya se dijo que f_{ab} y $f_a f_b$ son la misma permutación
G. Así,

$$(ab)\phi = (a\phi)(b\phi).$$

CAPITULO IV

RUPOS DE ISOMETRIA

Isometría de la recta.-

S_R: {Es el conjunto de todas las biyecciones de R en R}.

I_R el conjunto de todos los elementos de S_R que ervan las distancias. Los elementos de este conjunto lamarán isometrías de R. Más explícitamente

Se denomina isometría si y solo si

$$d(a,b) = d(a\sigma,b\sigma)$$

todo par de elementos $a,b\in R$

las demostraciones que vamos a hacer a continuación izaremos el siguiente lema:

4.1.

$(G,\cdot)$ un grupo. Entonces un subconjunto H de G es un grupo de G sii

$H\neq\Phi$ y

si $a,b\in H$, entonces $ab^{-1}\in H$

ostración: Si H verifica estas condiciones, entonces H un grupo respecto a la operación binaria. En efecto, $H\neq\Phi$, entonces existe un $a\in H$. Luego $aa^{-1} = 1\in H$. Además, $b\in H$, entonces $1b^{-1}\in H$. Por consiguiente $a,b\in H$ implica $a(b^{-1})^{-1} = ab\in H$. La asociatividd se verifica en H

ue se verifica en general para todos los elementos de
sí, pues, · es una operación binaria asociativa en H,
y el inverso de cada elemento de H es un elemento de
or tanto (H,·) es un subgrupo.

izaremos el lema para demostrar (I_R,·) es un
rupo.

$_R \neq \Phi$ porque existe I_a para I que es una isometría.

upongamos $\sigma \in I_R$ ENTONCES $\sigma^{-1} \in I(R)$ hay que partir que
$_R$ es un subgrupo.

tros podemos asegurar que el punto 3 se cumple por lo
iente I, σ^{-1} es cerrado $a\sigma^{-1} \in R$.

a,b∈R $d(a\sigma^{-1}, b\sigma^{-1}) = d((a\sigma^{-1})\sigma,(b\sigma^{-1})\sigma = d(a,b)$

ser σ isometría entonces se cumple que:

$$d(a,b) = d(a\sigma^{-1},b\sigma^{-1})$$

esto demostramos que $\sigma^{-1} \in I_R$ (grupo de Isometrías)

todo esto podemos decir que I(R) es subgrupo de S_R.

mplos de algunas Isometrías

blema 1

R->R

= x+2 y d(a,b) = |a-b|

ostrar que σ es una Isometría

$$d(\sigma x,\sigma y) = d(x,y)$$

$$d(x+2,y+2) = |x+2-(y+2)|$$
$$= |x+2-y-2|$$
$$d(\sigma x,\sigma y) = |x-y|$$
$$d(\sigma x,\sigma y) = d(x,y)$$

es una Isometría

lema 2 $\sigma: R \to R$

$x\sigma = x$

strar que σ es una Isometría

$$d(\sigma x,\sigma y) = d(x,y)$$
$$d(-x,-y) = |-x-(-y)|$$
$$= |-x+y| = |x-y|$$
$$= d(x,y)$$

σ es una Isometría

blema 3

ostrar que el siguiente conjunto de aplicación dotado la composición con operación binaria es un grupo

$\tau_a: R^2 \to R^2$ tal que

$(xy)\tau_a = (x+a,\ y+a)$ donde $(x,y) \in R^2$, $a \in R$

ostración τ_a es una permutación de R^2

es una biyección de $R^2 \to R^2$

$(x,y)\tau_a = (x_1,y_1)\tau_a$ entonces $(x,y) = (x_1,y_1)$. Si $y) \in R^2$ Existe $(x-a,y-a) \in R^2$ y $(x-a,y-a)\tau_a = (x,y)$ de τ_a es una aplicación inyectiva y sobreyectiva y tanto, τ_a es una permutación de R^2 $\tau_{-a}=\tau_a^{-1}$

conjunto de todas las τ_a no es vacío y $\tau_a\tau_b^{-1}=\tau_a\tau_{-b}=\tau$

ue $(x,y)\tau_a\tau^{-1}{}_b = (x,y)\tau_a\tau_{-b} = (x+a,y+a)\tau_{-b} =$

$-b,y+a-b) = (x,y)\tau_{a-b}$

el conjunto de todas las τ_a es un subgrupo de S_{R^2} y consiguiente es un grupo

__Isometría del Plano__.-

E el conjunto $R^2 = R*R$, si:

$$A = (x_A,y_A)$$

$$B = (x_B,y_B)$$

dos elementos de E. Se define la distancia entre A y

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A-x_B)^2 + (y_A-y_B)^2}$$

$_E$, se denomina __Isometría__

$$\text{Si } \forall a,b\in E;\ d(a,b) = d(\sigma(a),\sigma(b))$$

rema.- El conjunto I de todas las isometrías de E forman un subgrupo de S_E.

ostración

porque las aplicaciones identidad es una Isometría. amente necesitamos demostrar que $\sigma\tau^{-1}\in I$ siempre $\sigma,\tau\in I$. e en cuenta el efecto de τ^{-1} como $\tau\in S_E$, existen para a par de puntos $A,B\in E$, $A',B'\in E$ tales que $A'\tau=A$, $B'\tau=B$ onces $d(A',B') = d(A'\tau,B'\tau) = d(A,B)$ que τ es una isometría. Ahora bien $A\tau^{-1}=A'$, $B\tau^{-1}=B'$ de de: $d(A\tau^{-1},B\tau^{-1}) = d(A,B)$

$^{-1}$ es una isometría. En consecuencia

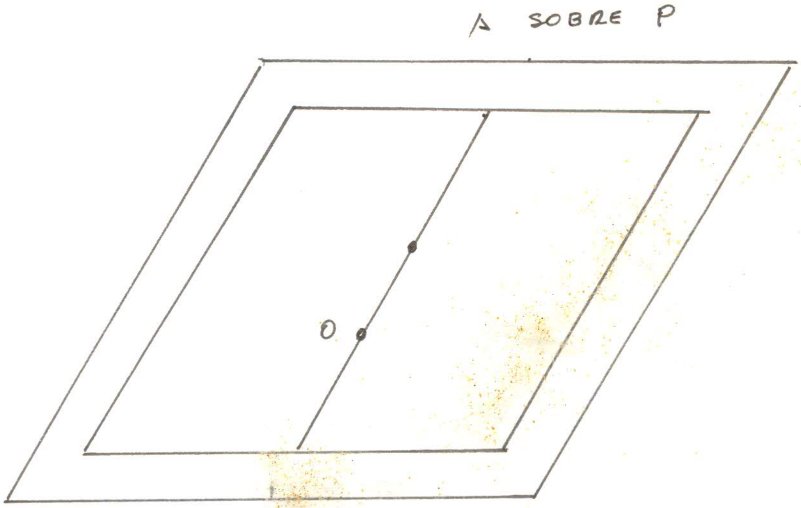
$$d(A\sigma\tau^{-1},B\sigma\tau^{-1}) = d(A\sigma,B\sigma) = d(A,B)$$

así $\sigma\tau^{-1}\in I$.

tanto I es un subgrupo de S_E.

firiéndonos a las Isometrías del Plano, encontramos es isometrías del Plano.

2.1. **Rotación alrededor de un punto.**- Sea O un punto alquiera de S. Rótese S un ángulo α alrededor de O. tonces la isometría inducida por este movimiento de S denomina rotación de un ángulo α alrededor de O.

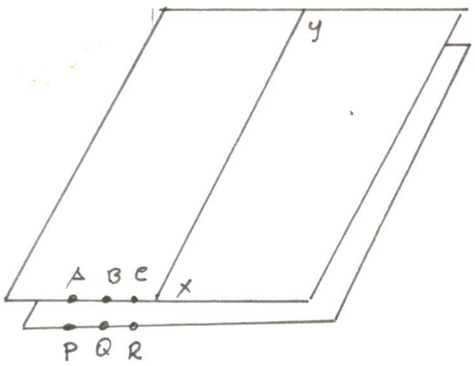


na rotación de un ángulo α alrededor del origen en entido contrario al del movimiento de las agujas del eloj es la aplicación δ_α definida por

$$(x,y)\delta_\alpha = (x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\alpha,\ x\,\mathrm{sen}\alpha + y\cos\alpha)$$

ara cada α, δ_α es una isometría y $(\delta_\alpha)^{-1} = \delta_{-\alpha}$.

.2. **Reflexión en una recta.**- Escójase una recta de E y
ase girar S sobre esta recta hasta que caiga
vamente sobre E. La isometría que se obtiene se
omina reflexión en XY.



define una reflexión en OX como la aplicación σ_y donde

$$(x,y)\sigma_y = (x,-y)$$

ve de inmediato que esto es una isometría y es fácil
ostrar que $(\sigma_y)^{-1} = \sigma_y$.

esto que I es el producto de dos reflexiones, la
amaremos reflexión.

.3. **Traslación.**- Escójase una recta XY, sea α una
ometría correspondiente a un movimiento de S tal que
$Y\alpha$, la recta que pasa por $X\alpha$ y $Y\alpha$, sea paralela a XY.
tonces, α es una traslación.

a traslación $\tau_{a,b}$ es la aplicación definida por

$$(x,y)\tau_{a,b} = (x+a,y+b)$$

puede demostrar que para cada a, b, $\tau_{a,b}$ es una
ometría y que $(\tau_{a,b})^{-1} = \tau_{-a,-b}$.

blema 1

remos el lema 4.1.

ostrar que $T_{a,b}$ es una isometría y que $(T_{a,b})^{-1}$ =

$_{,-b}$.

ución:

mero debemos demostrar que $T_{a,b} \in S_E$, de modo que emos que demostrar que es una aplicación inyectiva y reyectiva. $(x,y)T_{a,b} = (x',y')T_{a,b}$ claramente implica $(x,y) = (x',y')$. Si $(x,y) \in E$, entonces $(x-a,y-b)T_{a,b}$ (x,y) y, por tanto, $T_{a,b}$ es sobreyectiva. Luego $_{b} \in S_E$. ¿Es $T_{a,b}$ una isometría? Si $A=(x_A,y_A)$ y $B=(x_B,y_B)$ onces

$$d(A,B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = d(AT_{a,b},BT_{a,b})$$

$_{a,b}$ es una isometría. $(x,y)T_{a,b}T_{-a,-b}=(x+a,y+b)T_{-a,-b}$ $x,y)$. De donde, $T_{a,b}T_{-a,-b}=i$. Análogamente, $T_{-a,-b}T_{a,b}$. y, por tanto, $(T_{a,b})^{-1} = T_{-a,-b}$.

emplo 1

nostrar que $T_{a,b}$ es una isometría y que $(T_{a,b})^{-1}=T_{-a,-b}$

lución:

imero debemos demostrar que $T_{a,b} \in S_E$, de modo que nemos que demostrar que es una aplicación inyectiva y oreyectiva. $(x,y)T_{a,b} = (x',y')T_{a,b}$ claramente implica e $(x,y) = (x',y')$. Si $(x,y) \in E$, entonces $(x-a, y-b)T_{a,b}$ (x,y) y, por tanto, $T_{a,b}$ es sobreyectiva. Luego $_{,b} \in S_E$. ¿Es $T_{a,b}$ una isometría? Si $A=(x_A,y_A)$ y $B=(x_B,y_B)$ tonces

$d(A,B) = \sqrt{(x_A-x_B)^2 + (y_A-y_B)^2} = d(A\tau_{a,b},B\tau_{a,b})$

$_{,b}$ es una isometría. $(x,y)\tau_{a,b}\tau_{-a,-b}=(x+a,y+b)\tau_{-a,-b}=$ $y)$. De donde, $\tau_{a,b}\tau_{-a,-b}=i$. Análogamente, $\tau_{-a,-b}\tau_{a,b}=i$ por tanto, $(\tau_{a,b})^{-1} = \tau_{-a,-b}$.

mplo 2

ostrar que σ_y es un isometría y que $\sigma_y^2=i$.

ución:

Si $A=(x_A,y_A)$ y $B = (x_B,y_B)$,

$d(A\sigma_y,B\sigma_y) = \sqrt{(x_A-x_B)^2 + (-y_A-(-y_B))_2} = d(A,B)$

por tanto, σ_y preserva las distancias. Es obvio que $y)\sigma_y = (x',y')\sigma_y$ implica que $(x,y)=(x',y')$. Además, es ro que σ_y es sobreyectiva porque $(x,-y)\sigma_y=(x,y)$. Por to σ_y es una isometría. $(x,y)\sigma_y\sigma_y = (x,-y)\sigma_y = (x,y)$. , pues, $\sigma_y^2=i$.

. <u>Grupos de simetría</u>

etría de una figura geométrica S es una función ectiva de uno a uno de sus puntos tal que S es conjunto de R^2 entonces es:

$\forall S \subset R^2$

f es simetría <=> $f: R^2 \to R^2$

f es biyección

$\forall x \in S \; ; \; f(x) \in S$

es decir la imagen de S mediante f es S

$\approx f(S) = S$

rema:

S un subconjunto cualquiera del plano euclidiano. El junto, denominado por Is, de todas las $\sigma \in I$ tales que, $s \in S$ implica que $s\sigma \in S$, y (ii) $t\sigma \in S$ implica que $t \in S$, ma un subgrupo de I, llamado grupo de simetrías de S. elemento de Is, por consiguiente, se caracteriza por icar elementos de S, y solamente elementos de S, en

ostración:

remos el lema 4.1.

Φ, ya que la aplicación idéntica del plano euclidiano sí mismo pertenece a Is. Si σ, τ $\in$Is, ¿es $\sigma\tau^{-1}\in$Is? mero demostraremos que $\tau^{-1}\in$Is. Si $s \in S$, $(s\tau^{-1})\tau = s \in S$. sto que $\tau \in$Is, (ii) implica que $s\tau^{-1} \in S$. Así, τ^{-1} ifica (i), i.e. $s \in S$ implica que $s\tau^{-1} \in S$.

a demostrar que τ^{-1} también verifica (ii), sea $t\tau^{-1} \in S$. tonces $(t\tau^{-1})\tau = t \in S$, puesto que τ verifica (i). Por nto τ^{-1} verifica (ii), y $\tau^{-1}\in$Is.

ora demostraremos que $\sigma\tau^{-1}\in$Is. Sea $s \in S$. Entonces $s\sigma \in S$ y $\tau^{-1} \in S$, ya que σ y τ^{-1} son elementos de Is. Por nsiguiente $\sigma\tau^{-1}$ verifica (i). Si $t\sigma\tau^{-1} \in S$, puesto que ^{1} verifica (ii), tenemos que $t\sigma \in S$. Más aún, como $\sigma \in$Is, i) implica que $t \in S$ y, consecuentemente, $\sigma\tau^{-1}$ también rifica (ii). Por tanto $\sigma\tau^{-1}\in$Is y Is forma un subgrupo I.

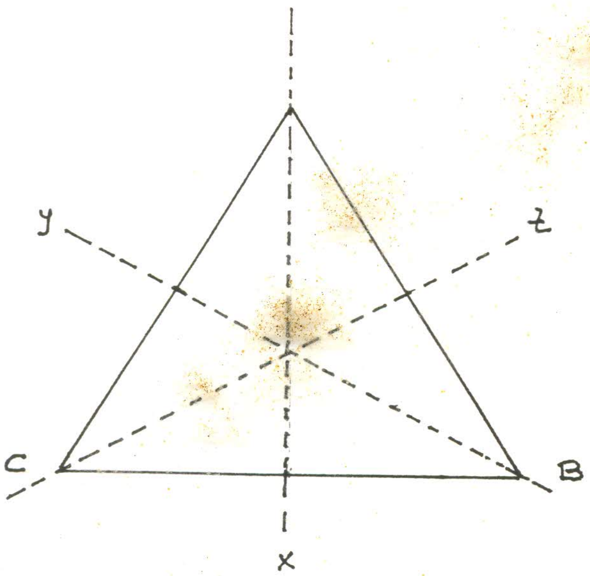
emplo 1

contrar todos los elementos de S_1 y S_2 y preparar la bla de multiplicar de estos grupos.

contiene un solo elemento $I = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\begin{array}{c|c} & I \\ I & \boxed{I} \end{array}$ es la tabla de ltiplicar de S_1. Hay dos elementos en S_2 ; $u = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ y $= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ la tabla de multiplicar de S_2 es

	I	β
I	I	β
β	β	I

l triángulo equilátero que enunciamos en el Capítulo I e posee 6 operaciones de simetría obtenemos las tablas e indicamos a continuación.



estos conceptos podemos multiplicar o componer las
etrías ya referidas anteriormente.

cordemos que: El conjunto de las simetrías del
iángulo son K = I, W, V, X, Y, Z, las mismas que son
rradas con respecto a la composición de funciones (G es
rrado bajo la operación $* \Leftrightarrow \forall a,b \in G \Rightarrow a*b \in G$). Con
te antecedente podemos formar la siguiente tabla:

emplo 2

*	I	w	v	x	y	z
I	I	w	v	x	y	z
w	w	v	I	z	x	y
v	v	I	w	y	z	x
x	x	y	z	I	w	v
y	y	z	x	v	I	w
z	z	x	y	w	v	I

emostración:

amos a demostrar que la siguiente tabla forma un grupo.

. $e*x = x*e = x$

$I*x = x*I = x$

. $\forall a \in G, \exists a' \in G$ tal que

$a = I$

$a' = I$

$a = W$

$a' = V$

$a = V$

$a' = W$

$a = X$

$a' = X$

deja al lector la propiedad asociativa (¿cuántas
eraciones debe hacerse?)

n esta demostración hemos probado que la tabla anterior
rma un grupo.

lviendo a las simetrías de un triángulo y escogemos la
g. I, W, V, observamos que este grupo de permutaciones
rma un grupo más pequeño dentro del otro que es un
emplo de <u>Subgrupo</u>. Detengámonos para estudiar.

emplo 3

mostrar que la tabla forma un subgrupo

*	I	w	v	x	y	z
I	I	w	v	x	y	z
w	w	v	I	z	x	y
v	v	I	w	y	z	x
x	x	y	z	I	w	v
y	y	z	x	v	I	w
z	z	x	y	w	v	I

emostración

$x = x*e = x$

$W = W*I = W$

$\in G \; \exists \, a' \in G$ tal que

$a' = a'*a = e$

$W = e$
$\Rightarrow \quad V = W^{-1}$
$V = e$

$W = I$

$(W*W^{-1}) = I*W^{-1}$

I = W^{-1}

= W^{-1}

n esta demostración hemos probado que es un Subgrupo

,W,V}.

te grupo contenido en otro mayor es un ejemplo de bgrupo.

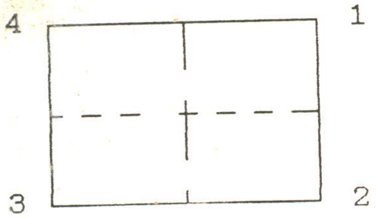
todo conjunto de esta tabla es un subgrupo, por emplo si probaramos con un conjunto M = x, y, z ; éste es un subgrupo ya que x,y=W ; y W no es elemento de M.

jemplo 4

imetrías de un cuadrado

cada una de estas formas en que el cuadrado puede de uevo colocarse en su sitio, le llamamos un movimiento ígido o una simetría del cuadrado.

s claro que cada simetría efectúa una permutación del onjunto {1,2,3,4} que representa los vértices. Usaremos a rotación de las permutaciones para describir a las imetrías. Veremos, que no todas las permutaciones de este conjunto representan simetrías del cuadrado.



cluiremos entre las simetrías la permutación idéntica, decir el movimiento rígido que deja invariante el adrado.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

s claro que al girar el cuadrado en un ángulo recto en irección contraria a la de las agujas del reloj y lrededor de su centro nos da un simetría.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

emos también que las rotaciones, contrarias a la de las gujas del relos en dos o tres ángulos rectos son también imétricas.

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Observamos además que las rotaciones en dirección de las agujas del relos en uno, dos o tres ángulos rectos tiene los mismos efectos de R_3, R_2 y R_1 respectivamente.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D- = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

s ocho operaciones I, R_1, R_2, H, V, D+, D- forman el njunto de simetrías del cuadrado. La composición o oducto es una operación.

	I	R_1	R_2	R_3	H	V	D+	D-
I	I	R_1	R_2	R_3	H	V	D+	D-
R_1	R_1	R_2	R_3	I	D+	D-	V	H
R_2	R_2	R_3	I	R_1	V	H	D-	D+
R_3	R_3	I	R_1	R_2	D-	D+	H	V
H	H	D-	V	D+	I	R_2	R_3	R_1
V	V	D+	H	D-	R_2	I	R_1	R_3
D+	D+	H	D-	V	R_1	R_3	I	R_2
D-	D-	V	D+	H	R_3	R_1	R_2	I

n esta tabla observamos la existencia del neutro I y ada elemento tiene su inverso.

El conjunto de simetrías forma un grupo llamado GRUPO DE SIMETRIAS DEL CUADRADO.

CONCLUSIONES

lix Klein dio una famosa denifición de una geometría en discurso de aceptación de una cátedra en la iversidad de Erlangen "Una Geometría es el estudio de uellas propiedades de un espacio (conjunto) que rmanecen invariantes bajo algún subgrupo fijo de todo grupo de transformaciones". Esta definición la hemos licado en la geometría euclidiana.

membrando esta famosa cita, remarquemos los puntos que nsideramos deben recordarse luego de leer este trabajo nográfico:

El objetivo principal de este trabajo es dar un inicio en el estudio de la simetría y luego continúen en estudios más avanzados de este interesante tema.

El teorema de Cayley es uno de los teoremas clásicos de la teoría de grupos que nos permite demostrar que cualquier grupo es estructuralmente el mismo con algún grupo de permutaciones.

Hemos hablado de conjuntos en donde se define el concepto de distancia entre elementos. Si consideramos d(x,y) como la distancia entre los dos elementos x, y entonces podemos hablar acerca de transformaciones que conservan la distancia.

El subconjunto de transformaciones que preserva la distancia es un subgrupo de isometrías.

Las rotaciones alrededor de un punto fijo forma un subgrupo de las isometrías.

. La reflexión en el plano es una función que transforma cada punto de una determinada recta en sí mismo y a todo punto fuera de la recta.

. La simetría, en esencia, es la manera de mover las figuras, de modo que sigan pareciendo las mismas.

APENDICE

f,g	Función
T	Traslación a la derecha
T´	Traslación a la izquierda
r	Reflexión
I,W,δ,τ,U,B	Permutación
I,W,V,X,Y,Z	Simetrías
A,B,S	Conjuntos
Q	Números racionales
R	Números reales
Z	Números enteros
a	Elemento de G
G	Grupo
<a>	Generador
C	Números complejos
δ	Isometría
S_R	Conjunto de todas las biyecciones de un subconjunto R en R
G´	$\{\tau_a/a\in G\}$
∈	Pertenencia
Φ	Conjunto vacío
Z+	Enteros positivos
Q+	Racionales positivos
R+	Reales positivos
*, a*b	Operación binaria
(G,*)	Grupo
e	Elemento Identidad

a'	Elemento Inverso
$\|S\|$	Orden de S
$\subseteq$	Inclusión
$B\subseteq A$	B subconjunto de A
$H\leq G$	Inclusión de subgrupos
$f:E\to F$	Transformación de E en F
$f:A\to A$	Permutación
I	Transformación Identidad
A_n	Grupo Alternante
$G\approx G'$	Grupos Isomorfos
S_R	Conjunto de permutaciones de R en R.

BIBLIOGRAFIA

APOSTOL, Tom M., Calculus, Reverté S.A., España (1979)

BAUHSLAG B., CHANDLER B., Teoría de Grupos, Mc Graw-Hill, Colombia (1972)

FRALEIGH, John., Algebra Abstracta, Addiso-Wesley, Iberoamericana S.A., EE.UU. (1988)

STEWART, Lan, Conceptos de Matemáticas Modernas, Alianza Editorial S.A., Madrid (1977)