# ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

## FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

## DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS


## TEMA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE GUÍA DIDÁCTICA Y EVALUACIÓN FORMATIVA EN LA ENSEÑANZA DE SECCIONES CÓNICAS, EN LOS ESTUDIANTES DE TERCERO DE BACHILLERATO, DE UNA UNIDAD EDUCATIVA DE LA CIUDAD DE QUEVEDO

## PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:

"MAGÍSTER EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA"


## AUTORA

IRIS ARACELY CASTILLO PLAZA



GUAYAQUIL - ECUADOR

## AÑO

2017

# DEDICATORIA

Con mucho amor y cariño, dedico este trabajo a quien me otorgó la vida, ***DIOS***, a través de Walter y Aracely, mis padres; quienes han sido mi guía, el apoyo incondicional en todas mis decisiones; de igual manera a mis hermanas Tatiana, Yajaira y Fátima, a mis sobrinos Matías, Iván y Didier.

Dedico también este trabajo a mis compañeros de maestría quienes con su amistad fueron un impulso para seguir adelante en momentos difíciles.

## AGRADECIMIENTO

Agradezco infinitamente a los docentes de la Escuela Superior Politécnica del Litoral en especial a quienes con su ahínco compartieron sus conocimientos y experiencias profesionales.

Mis sinceros agradecimientos a mi tutora, Ing. Sonnia Reyes de Vera, quien siempre dispuesta a guiar con sus conocimientos sin importar barrera alguna, también extender mi gratitud a Zenaida Alcívar por su apoyo incondicional.

# DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en este Proyecto de Graduación, me corresponde exclusivamente; el patrimonio intelectual del mismo, corresponde exclusivamente a la **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Departamento de Matemáticas** de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

**Iris Aracely Castillo Plaza**

# TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

M.Sc. Jenny Venegas Gallo
**PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**

ME.d. Sonnia Reyes Ramos
**DIRECTOR DEL PROYECTO**

M.Sc. Soraya Solís García
**VOCAL DEL TRIBUNAL**

## AUTOR DEL PROYECTO DE GRADUACIÓN

Iris Aracely Castillo Plaza

# ÍNDICE

# RESUMEN

En un sistema dinámico dónde tenemos niños y niñas tecnológicos – digitales, enseñar de manera tradicional no es una fortaleza; como docentes inmersos en este sistema debemos de reinventarnos para que el proceso de enseñanza - aprendizaje se logre cumplir a cabalidad. Conociendo los estilos de aprendizaje, diseñar e implementar una guía didáctica es la propuesta del presente trabajo, para que los estudiantes puedan aprender tanto en el salón de clases de manera lúdica y participativa, como fuera de ella con la ayuda de videos tutoriales y herramientas tecnologica (geogebra). Así como elaborar instrumentos de evaluación válidos y confiables que puedan medir objetivamente el nivel académico. El grupo de jóvenes que participaron en este estudio estuvo constituido por 33 estudiantes de tercero bachillerato, grupo tratamiento, para el grupo control fueron considerados 35; con edades que fluctúan entre 16 a 18 años. Durante dos parciales correspondientes al segundo quimestre, del ciclo escolar 2016 – 2017. De acuerdo al análisis de los resultados, trabajar con guías didácticas, clases dinámicas donde la participación del estudiante sea el eje fundamental y elaborar instrumentos de evaluación que valoren al estudiante, podemos obtener un mejor nivel académico.

# ÍNDICE DE TABLAS

# ÍNDICE DE CUADROS

# CAPÍTULO I

## 1. EL PROBLEMA

### 1.1. Antecedente

En el transcurso del tiempo la educación ha sufrido grandes cambios, la era tecnológica trae consigo jóvenes tecnológicos, donde el rol del docente no solo es de impartir conocimiento, sino crear formas atractivas para captar la atención y fomentar un aprendizaje significativo. El cuánto aprende un estudiante está medido en una evaluación o examen, pero cómo se imparte ese conocimiento depende de la habilidad que tiene el docente.

Durante el proceso de enseñanza aprendizaje el docente evalúa en tres etapas: diagnóstico, formativo, Sumativa; como está normalizado en el Art. 186 de la LOEI[1]. Tanto el docente como el estudiante debe reconocer la importancia de la evaluación del aprendizaje en el ámbito educativo, los instrumentos a utilizar deben ser claros, precisos y confiables, donde se mida el avance cognitivo del estudiante.

La evaluación que se realiza durante el proceso de aprendizaje para permitirle al docente realizar ajustes en la metodología de enseñanza, y mantener informados a los actores del proceso educativo sobre los resultados parciales logrados y el avance en el desarrollo integral del estudiante, es la formativa; la misma que representa el 80% de la calificación durante un parcial.

Una buena evaluación involucra el cómo se imparte una clase, la didáctica forma un rol importante haciendo que el docente tenga las herramientas necesarias para que los estudiantes logren alcanzar las destrezas planteadas.

[1] Ley Orgánica de Educación Intercultural

## 1.2. Planteamiento del problema

Para enseñar matemática el docente debe reinventarse cada día, para lograr en los estudiantes conocimientos sólidos; en un salón de clases no todos tienen el mismo ritmo de aprendizaje; y este nivel de conocimiento se refleja en una evaluación.

En ocasiones la poca implicación de tiempo para la planificación de clases y en la elaboración de instrumentos de evaluación se refleja en el desarrollo cognitivo y académico de los estudiantes.

Ante el planteamiento realizado y argumentado, surgen las siguientes interrogantes: ¿Cómo son las estrategias didácticas en la enseñanza de secciones cónicas a los estudiantes de tercero de bachillerato de una unidad educativa de la ciudad de Quevedo?

¿De qué manera deben elaborase los instrumentos de evaluación del aprendizaje válidos y confiables, de acuerdo con los objetivos específicos del tema a evaluarse en el proceso de enseñanza – aprendizaje, en los estudiantes de tercero de bachillerato de una unidad educativa de la ciudad de Quevedo?

¿De qué manera se aplican técnicas para la elaboración y los análisis de instrumentos de evaluación?

¿De qué manera se aplica el análisis de validación y confiabilidad a los instrumentos de evaluación del aprendizaje?

¿Cómo deben ser la guía didáctica e instrumentos de evaluación del aprendizaje en los estudiantes de tercero de bachillerato de una unidad educativa de la ciudad de Quevedo?

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. General

Desarrollar una guía didáctica e instrumentos de evaluación formativa en los estudiantes de Tercero de Bachillerato de una unidad educativa de la ciudad de Quevedo; a través de estrategias y técnicas en la enseñanza aprendizaje de secciones cónicas.

### 1.3.2. Específicos

- Utilizar técnicas para la elaboración y los análisis de instrumentos de evaluación, basados en resultados de aprendizaje y criterios de acreditación.
- Analizar la validación y confiabilidad de los instrumentos de evaluación.
- Diseñar instrumentos de evaluación del aprendizaje, válidos y confiables, de acuerdo con los objetivos específicos del tema a evaluarse.
- Manejar una guía didáctica e instrumentos de evaluación formativa en el proceso de enseñanza, para así lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes de tercero de bachillerato de una unidad educativa de la ciudad de Quevedo.
- Aplicar una estrategia didáctica, mediante la enseñanza de secciones cónicas.

## 1.4. Justificación

La importancia que reviste la realización de esta investigación recae en la necesidad de crear una herramienta pedagógica con estrategias didácticas como parte de la planificación educativa para la enseñanza de los contenidos programáticos de la geometría analítica, específicamente, de las secciones cónicas, recordando, que en el estudio de la matemática, la geometría se convierte en una herramienta que le permite al ser humano entender el contexto en que vive, pues a través de ella puede describir e interactuar con el espacio habitado, lo que la convierte en una disciplina intuitiva, concreta y ligada a la realidad del hombre.

Asociado a ello se consolidará una interacción más productiva en el proceso de enseñanza - aprendizaje y evaluación del mencionado contenido programático, estableciéndose un conjunto de conocimientos de valor teórico que aportan información a las teorías que sustentan al aprendizaje significativo. A nivel pedagógico se cumplirá con lo planteado en los propósitos de la evaluación tipificado en la LOEI[2], Art. 185 donde se manifiesta que: "La evaluación debe tener como propósito principal que el docente oriente al estudiante de manera oportuna, pertinente, precisa y detallada, para ayudarlo a lograr los objetivos de aprendizaje; como propósito subsidiario, la evaluación debe inducir al docente a un proceso de análisis y reflexión valorativa de su gestión como facilitador de los procesos de aprendizaje, con el objeto de mejorar la efectividad de su gestión"

## 1.5. Hipótesis y variables

### 1.5.1. Hipótesis

¿Podrá la implementación de una guía didáctica contribuir a aprendizajes significativos e instrumentos de evaluación válidos y confiables que permitan mejorar el rendimiento académico en los estudiantes de tercero de bachillerato, de una unidad educativa de la ciudad de Quevedo?

### 1.5.2. Variables

**Independiente:** Interés por parte de los docentes en impartir una clase utilizando elementos didácticos y en la elaboración de instrumentos de evaluación de acuerdo a los estilos de aprendizaje de los estudiantes.

**Dependiente:** Nivel académico e interés en el aprendizaje de secciones cónicas debido a clases tradicionales.

[2] Ley Orgánica de Educación Intercultural

# CAPÍTULO II

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Teoría del aprendizaje: Aprendizaje significativo

Este es el aspecto más importante de la teoría planteada por David Ausubel, éste plantea que el aprendizaje del estudiante depende del conjunto de conceptos e ideas previos (pre- requisito) en un campo del conocimiento y que se relaciona con una nueva información. No se trata solo de saber cuánta información tiene, sino las definiciones, conceptos y proposiciones que maneja, así como su grado de estabilidad. De acuerdo a esta información se debe orientar la enseñanza aprovechando esa experiencia previa.

Esos conocimientos previos o elementos presentes en la estructura cognitiva del estudiante reciben el nombre de “subsumidores” o ideas de anclaje (Ausubel, 1976, 2002; (Moreira, 1997). Estos subsumidores son los que dan significado al nuevo contenido interactuando con este, de forma tal que los subsumidores se van enriqueciendo y modificando, dando como resultado, lugar a nuevos subsumidores más potentes y explicativos que pueden servir de base para otros aprendizajes.

El aprendizaje significativo es una teoría que ha perdurado por cerca de 40 años, esto se debe en parte a que muchos investigadores han ido enriqueciendo la teoría al querer profundizar en su significado o al formular otras teorías y han conseguido ampliar los horizontes de la misma.

A continuación, se presentan algunos autores y los aportes que han hecho a la teoría:

**Novak (1988**), 1998) en su Teoría de Educación también considera que la predisposición por parte del aprendiz para construir significados juega un papel fundamental, pero además Novak le da un carácter humanista ya que considera la influencia de la experiencia emocional en el proceso de aprendizaje. Se da un intercambio de significados y de sentimientos entre el aprendiz y el profesor. Novak también contribuye fuertemente a la teoría con los mapas conceptuales.

**Gowin**, a través de su Teoría de Educación (1981) establece que los elementos de un evento educativo son el profesor, el estudiante y los materiales educativos del currículo. Y que estos últimos son definidos de forma intencional para llegar a acuerdos sobre los significados atribuidos. Gowin también hace un gran aporte con el instrumento de la V heurística.

**Moreira (2000)** plantea que el aprendizaje significativo debe ser crítico, ya que quien aprende debe manifestar su disposición para analizar el material que le presentan, abordar las situaciones desde diferentes puntos de vista, trabajar activamente para atribuir significados.

La teoría del aprendizaje significativo, es compatible con distintas ideas constructivistas, por ello es posible comparar la teoría del aprendizaje significativo con la asimilación, acomodación y equilibración de Piaget, se pueden relacionar los constructos personales de Kelly con los subsumidores; con Vygotsky se refuerza la importancia de la mediación social en la construcción de conocimiento y la importancia de generar modelos mentales cada vez más explicativos y predictivos.

Desde la perspectiva de la psicología cognitiva han surgido teorías que hacen puente con la teoría del aprendizaje significativo, entre ellas la Teoría de los Modelos Mentales (Johnson-Laird) y la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud). En Johnson-Laird (1983, 1996) se plantea que la mente construye representaciones internas que actúan como intermediarias entre el individuo y su mundo, posibilitando su comprensión y su actuación en él.

El razonamiento se lleva a cabo con modelos mentales, la mente humana opera con modelos mentales como piezas cognitivas que se combinan de diversas maneras y que "re-presentan" los objetos y/o las situaciones, captando sus elementos y atributos más característicos. La Teoría de los Campos

Conceptuales de Vergnaud es una teoría psicológica que atiende a la complejidad cognitiva; se ocupa de los mecanismos que conducen a la conceptualización de lo real. El objeto que persigue Vergnaud (1996) es entender cuáles son los problemas de desarrollo específicos de un campo de conocimiento.

El aprendizaje significativo se construye en base a qué ha aprendido el estudiante, para esto es de vital importancia que el estudiante tenga experiencia previas sólidas, el compromiso de un docente es dejar huella en los jóvenes, para que estos conocimientos ya adquiridos puedan convertirse en un aprendizaje que perdure.

Los actores docente – estudiante, la relación entre ellos depende del aprendizaje, del cómo el docente presente cada día la clase; para así tener jóvenes animados con una estructura cognitiva ordenada.

#### 2.1.2. Requisitos para el Aprendizaje Significativo

Para crear un aprendizaje significativo, los requisitos por experiencia de la autora son:

- Experiencias previas sólidas.
- Motivación para la adquisición de conocimiento.
- Material concreto, en su mayoría las personas aprenden manipulando objetos.
- Ambiente armónico.

## 2.2. Guía didáctica y evaluación formativa

### 2.2.1. Guía didáctica

**¿Qué es didáctica?**

(Nérice tomado de Michelle Zapata Arango, 17 de marzo de 2015 )“Es el estudio del conjunto de recursos técnicos que tienen por finalidad dirigir el aprendizaje del estudiante, con el objeto de llevarlo a alcanzar un estado de madurez que le permita encarar la realidad de manera consciente, eficiente y responsable, para actuar en ella como ciudadano participante y responsable".

De acuerdo al autor la didáctica como arte de enseñar, proporciona al docente las herramientas necesarias para elevar el nivel cognitivo a un grupo heterogéneos de personas (estudiantes).
La propuesta de enseñar a los estudiantes con guía es para que con instrucciones los estudiantes logren un conocimiento duradero, es decir aprender con sus propios medios; el docente se convierte en un orientador que con actividades lúdicas puede fomentar el aprendizaje significativo.

Cuando los jóvenes logran aprender con sus propios medios, la motivación se eleva, esto ayuda a que las clases sean dinámicas y no se aburran con facilidad.

### 2.2.2. Evaluación del aprendizaje

Es un proceso para comprobar, de manera rigurosa y objetiva, el grado de adquisición de los aprendizajes declarados en los objetivos planificados. (Contreras, 1990).

El Ministerio de Educación Ecuatoriano plantea tres clases de evaluación:

- Evaluación diagnóstica
- Evaluación formativa
- Evaluación sumativa

#### 2.2.2.1. Incidencia de la Evaluación formativa

La evaluación formativa según Gagne (1977), incide en:

a) Reactivar o consolidar habilidades o experiencias previas necesarias antes de introducir a un nuevo tema.

b) Centrar la atención en los aspectos más importantes de la clase.

c) Estimular las estrategias de aprendizaje activo.

d) Ofrecer oportunidades a los estudiantes para practicar sus habilidades y consolidar el aprendizaje.

e) Dar a conocer los resultados y ayudar a los estudiantes a controlar su propio progreso y desarrollar las capacidades de autoevaluación.

f) Orientar en la toma de decisiones sobre las siguientes actividades de instrucción o aprendizaje para aumentar su dominio.

g) Ayudar a los estudiantes a sentir que han alcanzado un objetivo.

Estos efectos de la evaluación formativa dan la claridad necesaria para que ambos actores visualicen sus progresos a nivel de aprendizaje actitudinal significativo por parte del actor estudiante, y los resultados obtenidos por los estudiantes desde las estrategias evaluativas adecuadas, y los procesos de aprendizajes visualizados por el actor docente.

#### 2.2.2.2. Condiciones de la evaluación

**Establecer objetivos claros**

Es importante establecer objetivos claros y alcanzables, lo que implica algo más que anunciar una finalidad de la enseñanza; conocer que se va a aprender.

**Establecer criterios de evaluación**

Los criterios de evaluación deben ser medibles, los que determinen lo que el estudiante ha asimilado durante la adquisición de conocimientos.

**Comprobar los conocimientos previos (Pre-requisito)**

En una clase existe el antes (pre-requisito), durante (proceso de enseñanza - aprendizaje) y el después (proceso evaluativo); pero como en toda construcción es de vital importancia las bases, es decir el inicio de un todo. Es importante seguir los patrones para impartir una clase donde los actores docente/estudiante tengan la motivación para incursionar en el conocimiento.

**Revisar contenidos.**

La importancia del contenido consiste en la selección de las tareas de enseñanza y de evaluación que encarnan objetivos de aprendizaje. La evaluación no puede impulsar el aprendizaje si se basa en tareas o preguntas que distraen la atención de los verdaderos objetivos de la enseñanza.

La enseñanza en clase debe ocupar a los estudiantes en actividades de aprendizaje, que sean ejemplos de los objetivos reales del aprendizaje. La evaluación, debe realizarse como parte de las actividades de aprendizaje significativo.

**Realizar la retroalimentación a partir de resultados**

Para que la evaluación formativa sea de verdadera ayuda para el aprendizaje, debe favorecer la retroalimentación, debe tener un poco de intención que persiga esto, ya que la misma proporciona elementos acerca de cómo solventar una carencia. La retroalimentación nos hace plantear preguntas como las siguientes:

¿Existen métodos diferentes de solución de un mismo problema?

¿Cómo puede abordar esa deficiencia el alumno y hacer las correcciones en conjunto con el docente/facilitador?

Es necesario analizar el trabajo del estudiante e identificar los patrones de errores y las lagunas que más atención requieren, no cualquier error posible. La eficacia de la retroalimentación aumenta cuando se plantean las siguientes preguntas:

¿Cuál es el error principal?

¿Cuál es la razón probable de que el estudiante cometa este error?

¿Cómo puedo guiar al estudiante para que evite el error en un futuro?

Estas y muchos cuestionamientos hay que llevarlos por escrito, e irlos fundamentando y aglomerando, aunque sean cada año cursos diferentes se tiene una base de datos de mucho interés para el docente/facilitador.

**Enseñar y evaluar para que haya transferencia (Aprendizaje cooperativo).**

Es importante que los estudiantes aprendan a pensar reflexiva, analítica y críticamente y más específicamente sobre cómo pueden utilizar lo que ya saben. La utilidad del conocimiento es importante afianzarla en el estudiante. Enseñar para manejar estrategias de transferencia, especialmente de transferencia lejana, también tiene correspondencia con las técnicas de conocimiento previo. Conminar en ellos que además de servir para ellos ese conocimiento que han adquirido, también pueden serlo para aquellos que no están tan cerca, que como para sí mismos es importante, también puede serlo para el otro.

**Propiciar la auto-evaluación del estudiante**

La autoevaluación es la facultad de criticar su propio trabajo, es útil tanto desde el punto de vista cognitivo como el motivacional para el alumno. En esencia, el hábito de auto-evaluarse lleva a la auto-supervisión del desempeño, que es la finalidad del andamiaje de la enseñanza enfocada desde el aspecto constructivista, así como el objetivo principal del modelo de evaluación formativa.

### 2.2.5. Rúbrica, escala y criterios de evaluación

Las rúbricas son guías precisas que valoran los aprendizajes. Son tablas que desglosan los niveles de desempeño de los estudiantes en un aspecto determinado, con criterios específicos sobre rendimiento. Indican el logro de los objetivos curriculares y las expectativas de los docentes. Permiten que los estudiantes identifiquen con claridad la relevancia de los contenidos y los objetivos de los trabajos académicos establecidos.

En el nuevo modelo de la educación, las rúbricas o matrices de valoración brindan otro horizonte con relación a las calificaciones tradicionales que valoran el grado de aprendizaje del estudiante, expresadas en números o letras.

Una rúbrica debe considerar los siguientes aspectos:

- Relación con los objetivos educativos que se persiguen.
- Adecuada ante el nivel de desarrollo de los estudiantes.
- Niveles con términos claros.

## 2.4. Contenido de la unidad

## Secciones Cónicas

Las secciones cónicas son las curvas de intersección de un plano con un cono circular recto. Existen tres tipos de curvas que se forman de esta manera: la parábola, la elipse (incluyendo la circunferencia como caso especial) y la hipérbola. La curva obtenida depende de la inclinación del eje del cono con respecto al plano de corte. El matemático griego Apolonio estudió las secciones cónicas en el año 225 a.C.

### La circunferencia

Conjunto de puntos en el plano cartesiano que se encuentran a una distancia fija r, de un punto fijo $O(h,k)$. La distancia fija r es denominada longitud del radio y el punto fijo $O(h,k)$ es el centro de la circunferencia.

$$Circunferencia\ =\{P(x,y)\in\mathbb{R}^2/d(O,P)=r\}$$

***Ecuación General y reducida de la Circunferencia***

- Si el centro está en el origen la expresión de la ecuación es: $r^2=x^2+y^2$
- Si el centro está en un punto P, podemos expresar el centro de la siguiente manera C: $(h,k)$, quedando la expresión: $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$.Esta forma la denominaremos forma canónica de la circunferencia.

- A partir de la ecuación canónica se obtiene la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$

**Aplicaciones de la circunferencia.**

*Deportes*. No solo se aplica en los balones, al observar con detenimiento nos daremos cuenta que muchas de las canchas o lugares en donde se practican deportes tienen marcas geométricas y Circunferencias que determinan situaciones reglamentarias, etc.

**La parábola**

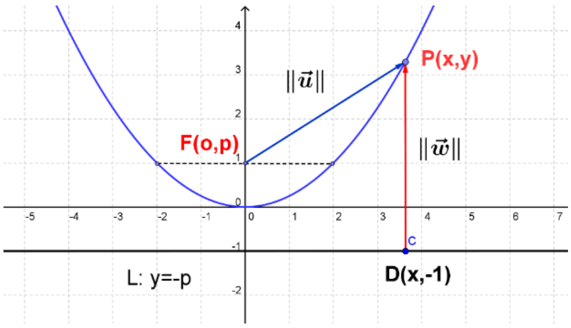
El conjunto de todos los puntos P(x,y) en el plano que equidistan de un punto fijo $\mathrm{F_o}$ y de una recta fija L. El punto $\mathrm{F_o}$ es denominado foco de la parábola; la recta L es la directriz de la parábola.

$$Parábola = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d(P,F_o) = d(P,L)\}$$

**Elementos de la parábola**

Elementos de la parábola:

- Vértice
- Recta directriz
- Parámetro p
- Lado recto =4p




**Ecuación reducida de la parábola**

La ecuación de esta parábola, con vértice en el origen de coordenadas V(0,0) y foco en el punto $F_0(0,p)$, es: $x^2 = 4py$

Basándose en la deducción realizada, existe otros tres casos elementales de parábolas:

- Si el eje de simetría es vertical y el foco está en el semieje negativo de las ordenadas $F_0(0,-p)$, la ecuación es: $x^2 = -4py$

- Si el eje de simetría es horizontal y el foco está en el semieje positivo de las abcisas $F_0(p, 0)$, la ecuación es: $y^2 = 4px$
- Si el eje de simetría es horizontal y el foco está en el semieje negativo de las abcisas $F_0(-p, 0)$,la escuación es: $y^2 = -4px$

**Ecuación general**

Se tiene la ecuación general de la parábola que se obtiene desarrollando productos notables e igualando a cero, quedando generalizada de la siguiente manera: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Pero con la condición necesaria de que $A = 0$ ó $B = 0$,

$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$ ó $By^2 + Cx + Dy + E = 0$

**Aplicación de la Parábola**

*Propiedades Reflectoras*. Las aplicaciones principales de las parábolas incluyen reflectores de luz y ondas de radio, y las antenas parabólicas. Los rayos originados en el foco de la parábola se reflejan hacia afuera de la parábola, en líneas paralelas al eje de la parábola. En tal sentido la concentración de la radiación solar en un punto, a través de un reflector parabólico es utilizada en pequeñas cocinas solares y grandes centrales captadoras de energía solar.

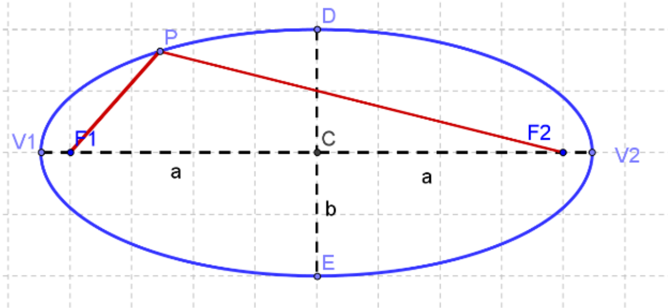
**La elipse**

Conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos $F_1$ y $F_2$, es una constante.

$$Elipse = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d(P, F_1) + d(P, F_2) = constante\}$$

**Elementos de la Elipse**

- Vértices V1 y V2
- Focos F1 y F2
- Centro de la elipse $O(h, k)$
- Eje menor: 2b
- Eje mayor: 2a



- Distancia focal: 2c
- Semieje menor: b
- Semieje mayor: a
- Semidistancia focal: c

**Ecuación reducida de una elipse**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

**Ecuación de una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados**

*Ecuación de una elipse con eje paralelo al Horizontal*

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{b}^2}=\mathbf{1}$$

*Ecuación de una elipse con eje paralelo al Vertical*

$$\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{a}^2}=\mathbf{1}$$

**Ecuación general de la elipse**

Dado una ecuación del tipo $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$, donde A y B tienen el mismo signo, además $\mathrm{A,B,C,D,E,F}\in\mathbb{R}$, siendo $A\neq 0, B\neq 0$, éste puede transformarse en otro del tipo:

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{b}^2}=\pm\mathbf{1}$$

**Aplicación de la Elipse**

Las elipses visualizadas en la actualidad en la astronomía ya que el movimiento más frecuente de estrellas, planetas, satélites, etc. es el descrito mediante trayectorias elípticas (la circunferencia es un caso particular de elipse).

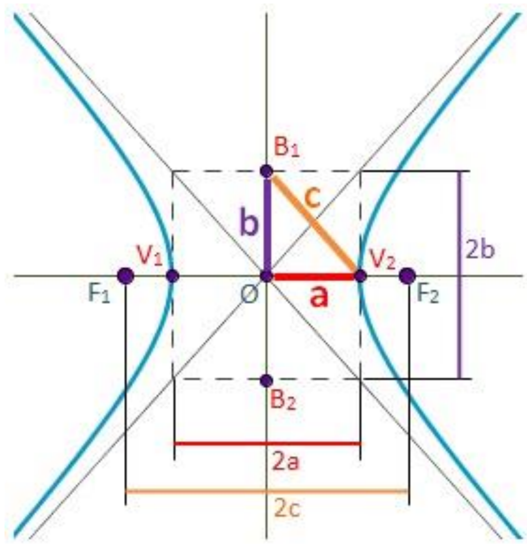
**La hipérbola**

Conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos $F_1$ y $F_2$, es constante.

$$Hpérbola = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = constante\,\}$$

**Elementos de la Hipérbola**

- Centro: C(0, 0)
- Coordenadas de sus vértices: V(0, a) y V´(0, -a)
- Coordenadas de los extremos del eje conjugado: B(b, 0) y B´(-b, 0)
- Coordenadas de sus focos: F(0, c) y F´(0, -c)
- Longitud del eje transverso: VV´= 2a
- Longitud del eje conjugado: BB´=2b
- Longitud de cada lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x$




**Ecuación reducida de la hipérbola**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Ecuación de la Hipérbola con ejes paralelos a los ejes coordenados**

Ecuación de una hipérbola con eje paralelo al horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de una hipérbola con eje paralelo al vertical

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

**Ecuación general**

La ecuación general de la hipérbola es de la siguiente forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Pero con la condición necesaria de A y B de distinto signos.

**Aplicación de la hipérbola**

La hipérbola es utilizada en la actualidad por sus propiedades de Reflexión. Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos (de luz y sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde el foco se refleja en la dirección de la recta que une el otro foco con el punto.

# CAPÍTULO III

# 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El planteamiento de la metodología es la guía fundamental para el desarrollo de la investigación y para el trabajo de campo. Constituye también un apoyo para sistematizar y documentar observaciones que aportarán resultados a la indagación. El trabajo del diseño de metodología pretendió aportar argumentos para la pregunta de investigación.

## 3.1. Tipos de Investigación

### 3.1.1. Enfoques

**Cualitativo**

Los métodos cuantitativos, fueron los más usados por las ciencias exactas, se fundamentan en un proceso deductivo, se tiende a generalizar y normar resultados (Bernal, 2006).

**Cuantitativo**

Los métodos cualitativos profundizan casos particulares y no generalizan, su función fue cualificar no medir, y a través de rasgos determinados describir el aspecto social de este trabajo (Bernal, 2006).

El presente trabajo de investigación relacionó dos enfoques, cualitativo y cuantitativo; es decir el enfoque es mixto. El estudio cualitativo consistió en la aplicación de test de estilo de aprendizaje de “Felder y Silverman”, el mismo que se aplicó para determinar estilos de aprendizajes parecidos en los grupos de análisis; para validar los instrumentos de evaluación, se aplicó niveles de confiabilidad de: CRONBACH (pruebas de desarrollo), KUDER y RICHARDSON (pruebas objetivas), también la medición de los niveles de dificultad en las preguntas de opción múltiple e índice de discriminación para preguntas de opción múltiple.

En la presente investigación el componente cuantitativo constituye un análisis comparativo del registro de calificaciones en las evaluaciones formativo/ sumativo de los estudiantes de tercero de bachillerato.

### 3.1.2. Alcance

**Explorativo**

En este sentido, la Investigación Exploratoria será **la primera fase que cumpla un investigador,** sobre un objeto de estudio que resulte desconocido para él, o incluso también para el resto de la comunidad profesional del campo en el que se realice la investigación, careciendo entonces de antecedentes que puedan orientar la investigación emprendida.

Para empezar con el trabajo de investigación se aplicó a los estudiantes un cuestionario de estilos de aprendizaje, para determinar cuáles son las formas de aprender; así orientar al docente del cómo enseñar; de qué forma impartir clases didácticas y que puedan mejorar nivel académico con instrumentos de evaluación válidos y confiables.

**Descriptivo**

La investigación descriptiva cosiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento. Los resultados de este tipo de investigación se ubican en un nivel intermedio en cuanto a la profundidad de los conocimientos se refiere (Arias, 2012). A través de la descripción se desarrollará las relaciones entre las variables, del proyecto educativo.

**Explicativa**

La investigación explicativa se encarga de buscar el por qué de los hechos mediante el establecimiento de relaciones causa-efecto. En este sentido, los estudios explicativos pueden ocuparse tanto de la determinación de las causas, como los efectos (investigación experimental), mediante la prueba de hipótesis. Sus resultados y conclusiones constituyen el nivel más profundo de conocimientos (Arias, 2012). Con el aporte de la investigación explicativa se dará a conocer los aspectos que causan el bajo rendimiento académico, el desinterés de los estudiantes que muestran por las clases de matemática.

**Acción – Participación**

Es una forma de desarrollar la investigación y a la vez una metodología de intervención social. En ella la población participa activamente con el investigador en el análisis de la realidad y en las acciones concretas para modificarla. Cada hora de clases permite al docente brindar un aprendizaje significativo y elevar el nivel académico, por medio de esta propuesta se espera dar solución a un problema real que tienen muchos estudiantes: no obtener buenas calificaciones.

## 3.2. Técnicas e instrumentos para la recolección de datos.

La técnica es la forma particular de obtener datos o información (Arias, 2006). En esta investigación se convino en utilizar la prueba como técnica por cuanto la información a obtener será por medio de una tarea definida en un tiempo determinado, a los fines de estimar el resultado de un aprendizaje, logro de competencias o labor didáctica (Palella y Martins, 2006).

Para la recolección de datos se utilizará instrumentos los cuales según, (Hernández, Fernández y Baptista, (2010) ) “indican que son los medios que utiliza el investigador, para medir el comportamiento o atributos de las variables” (p.346).

En la presente investigación, se utilizaron las siguientes herramientas:

**Aplicación de Test de estilo de aprendizaje.-** Para lograr obtener grupos homogéneos con respeto a estilos de aprendizajes se aplicó el test de “Felder y Silverman” (Ver Anexo I), a 6 salones de clases diferentes tercero CC. “A”-“B”-“C”-“D”-“E”-“F”, de los cuales se escogieron 2 salones tercero CC. “A”-“C” donde tenían similares formas de aprender según el cuestionario.

**Guía didáctica. -** Una vez realizado el test de estilos de aprendizaje se elaboró una guía didáctica en base a cómo aprenden los estudiantes, la misma que tiene las siguientes fases:

- Definición
- Ecuaciones
- Ejercicios resueltos
- Ejercicios propuestos
- Talleres

**Instrumentos de Evaluación. -** Se elaboraron 6 instrumentos de evaluación distribuido de la siguiente forma:

Cuatro evaluaciones formativas.

Una evaluación sumativa (cierre de unidad).

**Encuesta**

1. ¿Había hecho un test de aprendizaje anteriormente?

   Si ( )

   No ( )

2. ¿La guía didáctica le permitió reforzar sus conocimientos en casa?

   Si ( )

   No ( )

   En ocasiones ( )

3. ¿Recomendaría a su docente implementar folleto-guía como apoyo pedagógico?

   Si ( )

   No ( )

4. ¿Una vez recibidas las clases, logró hacer los ejercicios propuesto en la guía?

   Si ( )

   No ( )

   En ocasiones ( )

5. ¿Mejoró su rendimiento académico durante la aplicación del folleto de secciones cónicas?
   Mucho ( )
   Poco ( )
   Nada ( )

6. De los siguientes aspectos, cuál o cuáles le llamaron la atención de la guía.
   Ejercicios explicados secuencialmente ( )
   Deducción de ecuaciones ( )
   Síntesis ( )
   Momento tecnológico ( )

7. ¿El tiempo asignado para cada lección le pareció el adecuado?
   Si ( )
   No ( )
   En ocasiones ( )

8. Las órdenes e instrucciones de las lecciones propuestas le pareció:
   Clara ( )
   Poco claras ( )
   Confusas ( )

9. ¿La docente cumplió con todos objetivos propuestos en cada clase?
   Siempre ( )
   Casi siempre ( )
   Nunca ( )

10. En los dos últimos parciales las clases le pareció:
    Dinámica ( )
    Poco dinámica ( )
    Tradicionales ( )

**Registro de calificaciones:** Aplicada la guía didáctica y las evaluaciones se comparó las calificaciones de cada salón de clases; determinaremos el cumplimiento de los objetivos planteados.

## 3.3. Población

El presente proyecto tiene como población a 68 estudiantes distribuido de la siguiente manera:

33 estudiantes donde se aplicó la guía didáctica e instrumento de evaluación.

35 estudiantes donde no se aplicó la guía didáctica, pero sí el instrumentos de evaluación, dando un total de 68.

## 3.4. Validez y confiabilidad de instrumentos de evaluación.

Para determinar la validez y confiabilidad de los instrumentos de evaluación se aplicó el coeficiente de **CRONBACH** para preguntas de desarrollo y **KUDER y RICHARDSON** para preguntas objetivas.

**Coeficiente de confiablidad para pruebas de desarrollo: CRONBACH.**

Mide la consistencia interna del instrumento o resultados. Las preguntas deben calificarse sobre la misma escala y la nota final de la prueba es la suma de las puntuaciones de las preguntas. Se acepta como confiable un valor no menor que 0.5.

Se calcula con una de las dos expresiones:

$$C_{Cronbach} = \frac{n}{n-1} \times \frac{S^2 - \sum_{i=1}^{n} {S_i}^2}{S^2}$$

$n$ =número de preguntas de la prueba

$S$ = desviación estándar la prueba

$S_i$ = desviación estándar de la i-ésimo ítem.

**Coeficiente de confiablidad para pruebas objetivas: KR20 (Kuder y Richardson)**

Mide la consistencia interna del instrumento o resultados. Las preguntas deben calificarse como acierto (1) o desacierto (0) y la nota final de la prueba es la suma de las puntuaciones de las preguntas. Una buena prueba debe tener al menos 0.7 de KR20.

Se calcula con la expresión:

$$KR_{20} = \frac{n}{n-1} \times \frac{s^2 - \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i}{s^2}$$

*n* = Número de preguntas de la prueba

$S^2$=Varianza

*Pi* =Proporción de estudiantes que respondieron correctamente la pregunta *i*

*Qi* =1-*Pi*

**El índice de discriminación (PBCC)**

Hace referencia a la sensibilidad que tiene la pregunta para discriminar a los individuos que tienen las características deseadas ("buenos estudiantes") de los que no la tienen.

El PBCC (POINT BISERIAL CORRELATION COEFFICIENT) mide la correlación entre la respuesta correcta de una pregunta y el puntaje obtenido por el estudiante en la prueba.

El PBCC identifica las preguntas que correctamente discriminaron entre los grupos altos y los grupos bajos.

Se calcula con la expresión

$$PBCC = \frac{(M_p - M_q)\sqrt{N_p \times N_q}}{N \times s}$$

Donde:

$M_p$= Promedio de las notas del grupo de estudiantes que contestó correctamente la pregunta.

$M_q$= Promedio de las notas del grupo de estudiantes que contestó incorrectamente la pregunta.

$N$ =Número total de estudiantes que rindieron la prueba

$N_p$= Número de estudiantes que contestaron correctamente la pregunta

$N_q$= Número de estudiantes que contestaron incorrectamente la pregunta

$s$ = Desviación estándar de las notas de toda la prueba

**Interpretación del PBCC**

| PBCC | INTERPRETACIÓN |
|---|---|
| 0.30 o mayor | Pregunta muy buena |
| 0.20 – 0.29 | Pregunta buena |
| 0.09 – 0.19 | Necesita mejorarse |
| Menor que 0.09 | Mal discriminante |

Una pregunta puede ser mal discriminante por las siguientes razones: Es muy fácil (P de 90% o más) o es muy difícil (P de 30% o menos) o mal diseño de los distractores.

# CAPITULO IV

## 4. DESTALLE DEL ANÁLISIS

En el presente capítulo se muestra los resultados de confiablidad de los instrumentos de evaluación de los grupos observados.

La población del presente estudio se describe a continuación:

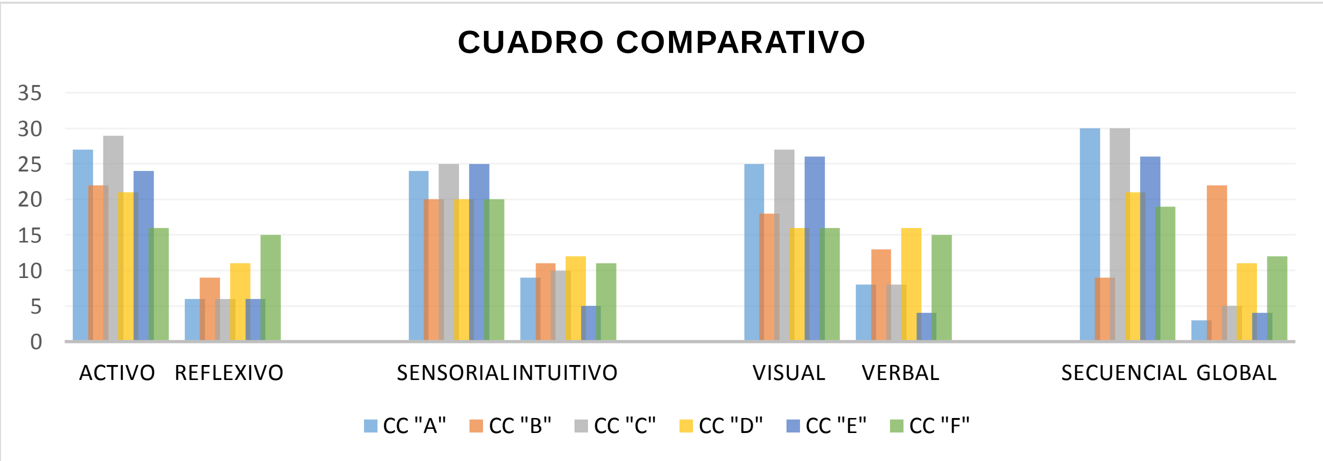
Se aplicó un test de estilos de aprendizaje de "Felder y Silverman", a seis salones de clases de los cuales se escogió dos.

**Tabla # 1:** Cuestionario de estilos de aprendizaje

| | CC "A" | CC "B" | CC "C" | CC "D" | CC "E" | CC "F" |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **ACTIVO** | 27 | 22 | 29 | 21 | 24 | 16 |
| **REFLEXIVO** | 6 | 9 | 6 | 11 | 6 | 15 |
| **SENSORIAL** | 24 | 20 | 25 | 20 | 25 | 20 |
| **INTUITIVO** | 9 | 11 | 10 | 12 | 5 | 11 |
| **VISUAL** | 25 | 18 | 27 | 16 | 26 | 16 |
| **VERBAL** | 8 | 13 | 8 | 16 | 4 | 15 |
| **SECUENCIAL** | 30 | 9 | 30 | 21 | 26 | 19 |
| **GLOBAL** | 3 | 22 | 5 | 11 | 4 | 12 |

**Fuente:** Cuestionario a estudiantes de tercero de bachillerato.
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 1:** Comparativo de estilos de aprendizaje




**Fuente:** Cuestionario a estudiantes de tercero de bachillerato.
**Elaborado por:** Autora

Como se observa en las gráficas, los salones de clases tercero cc. “A” y “C” tienden a tener similitud en los estilos de aprendizajes.

Para objeto de la investigación se escogió dos grupos. En el tercero cc “A”, **grupo tratamiento,** se aplicó la guía didáctica obedeciendo a los estilos de aprendizaje y los instrumentos de evaluación propuestos como válidos y confiables.

Los estudiantes considerados como grupo control son del tercero cc. “C” donde no se aplicó guía didáctica, impartiendo las llamadas clases tradicionales donde el aprendizaje representa un 5% según “National Training Laboratories, Bethel, Maine, USA”, sin obedecer a los estilos de aprendizaje y aplicando los instrumentos de evaluación propuestos como válidos y confiables. Para efectos de calificación se considerará la tabla proporcionada por el Mineduc.

**Tabla # 2:** Escala de calificación por el Mineduc

| Abreviatura | Cualitativa | Cuantitativa |
|---|---|---|
| **SAR** | Supera los aprendizaje requeridos | 10 |
| **DAR** | Domina los aprendizaje requeridos | 9 |
| **AAR** | Alcanza los aprendizaje requeridos | 7-8 |
| **PAAR** | Está próximo a alcanzar los aprendizaje requeridos | 5-6 |
| **NAAR** | No alcanza los aprendizaje requeridos | $\leq 4$ |

**Fuente:** Ministerio de educación del Ecuador.

## 4.1. Coeficientes de confiabilidad y validez para los instrumentos de evaluación grupo tratamiento vs grupo tratamiento.

### 4.1.1. Comparación de validez y confiabilidad

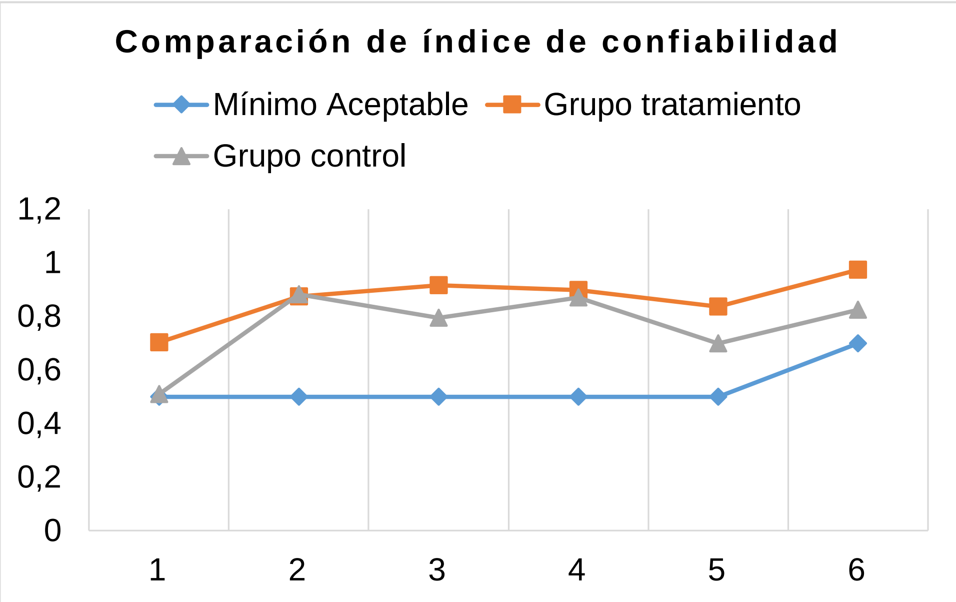
A continuación se muestra los índices de confiablidad de las evaluaciones y las tendencias que tienen las calificaciones del grupo control vs tratamiento.

**Tabla # 3:** Comparación de índice de confiabilidad

| Lecciones | Mínimo Aceptable | Grupo tratamiento | Grupo control |
|---|---|---|---|
| Lección I<br>Preguntas de desarrollo | 0,50 | 0,703 | 0,51 |
| Lección II<br>Preguntas de desarrollo | 0,50 | 0,87490002 | 0,88237193 |
| Lección III<br>Preguntas de desarrollo | 0,50 | 0,91525598 | 0,79445477 |
| Lección IV<br>Preguntas de desarrollo | 0,50 | 0,89862949 | 0,87071114 |
| Lección V<br>Preguntas de desarrollo | 0,50 | 0,83579038 | 0,69829444 |
| Lección cierre de unidad<br>Preguntas objetivas | 0,70 | 0,97413115 | 0,82540755 |

**Fuentes:** Comparación de índice de confiablidad
**Elaborado por:** Atora

**Cuadro# 2:** Comparación de índice de confiabilidad




**Fuentes:** Comparación de índice de confiablidad
**Elaborado por:** Atora

Se observa en el cuadro # 2 que los índices de validez y confiabilidad están sobre lo mínimo requerido; para la lección N° 1 con respecto al grupo control la evaluación se mantiene confiable aunque bordea el mínimo establecido.

Para las preguntas de II al IV, los coeficientes de confiabilidad resultan óptimos, según lo mínimo requerido para preguntas de desarrollo; por lo que se infiere que cada instrumento de evaluación es válido y confiable.

Con respecto a la lección de cierre de unidad, muestra un relevante índice de confiablidad, está sobre lo mínimo requerido para una evaluación objetiva.

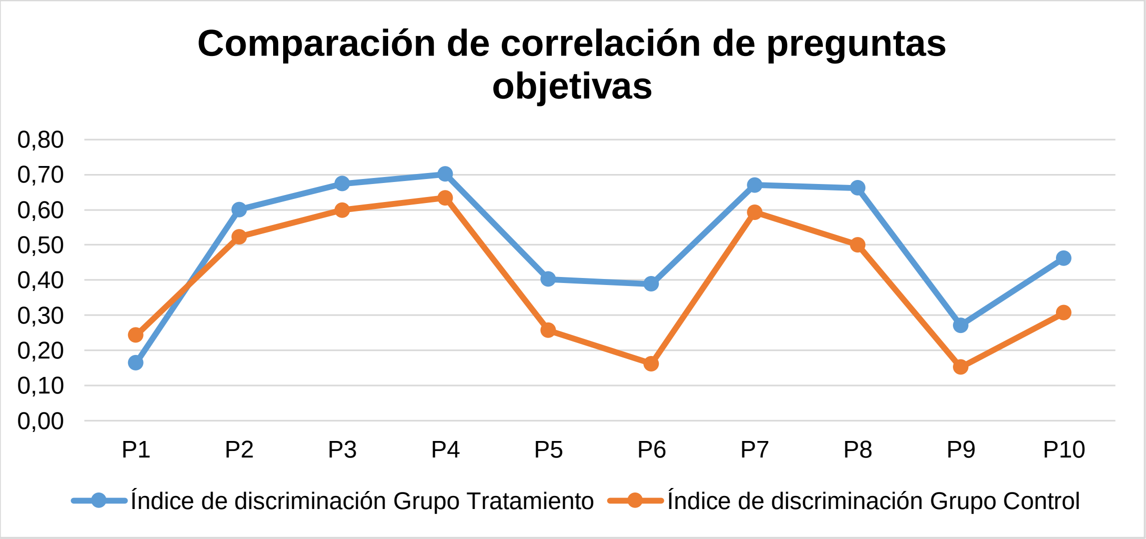
La autora utilizó **PBCC (POINT BISERIAL CORRELATION COEFFICIENT)**, para medir la correlación entre la respuesta correcta de una pregunta y el puntaje obtenido por el estudiante en la prueba de cierre de unidad, donde se aplicó un instrumento de evaluación con preguntas objetivas.

**Tabla # 4:** Comparación de correlación de preguntas objetivas

| PBCC | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Índice de discriminación *Grupo Tratamiento*** | 0,16 | 0,60 | 0,67 | 0,70 | 0,40 | 0,39 | 0,67 | 0,66 | 0,27 | 0,46 |
| **Índice de discriminación *Grupo Control*** | 0,24 | 0,52 | 0,60 | 0,63 | 0,26 | 0,16 | 0,59 | 0,50 | 0,15 | 0,31 |

**Fuente:** Comparación de correlación de preguntas objetivas
**Elaborado por:** Atora

**Cuadro# 3:** Comparación de correlación de preguntas objetivas




**Fuentes:** Comparación de correlación de preguntas objetivas
**Elaborado por:** Atora

Considerando como pregunta muy buena aquellas que tenga un índice de discriminación mayor a 0,30; es decir, a: P.2, P.3, P.4, P.7, P.8, P10 tanto tratamiento como control. Las preguntas que necesitan ser mejoradas según la interpretación de PBCC son: P1 y P 9, presentan el índice más bajo, por tal necesitan ser mejorados.

La pregunta P6, está por debajo de lo considerado como muy buena, para el grupo donde no se aplicó la propuesta, mientras que en el grupo tratamiento el índice de discriminación es favorable.

## 4.2. Prueba de hipótesis de las calificaciones de las lecciones del grupo tratamiento vs control

Las hipótesis planteadas son:

$H_0$: **No Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones del grupo tratamiento y la media de calificaciones del grupo control.

$H_a$: **Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones del grupo tratamiento y la media de calificaciones del grupo control.

$$H_0: \mu_t - \mu_c = 0$$

$$H_a: \mu_t - \mu_c > 0$$

Valor $\boldsymbol{p < 0,05}$ rechazar $H_0$

Para establecer la región de rechazo, se calcula primero el número de grados de libertad, de la siguiente forma:

$$gl = n_1 + n_2 = 33 + 35 - 2 = 66$$

Con grados de libertad de 66 y un nivel significancia de 0,05.

La región crítica $t_{(0,05,66)} = 1{,}6683$, por lo tanto $t > 1{,}6683$. Como se observa en la siguiente tabla T- Student:

**Tabla T- Student**

| Grados de libertad | 0.25 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 66 | 0.6782 | 1.2945 | 1.6683 | 1.9966 | 2.3842 | 2.6524 |

**Fuente:** Tabla de distribución T- Student

Cálculo del valor estadístico de prueba:

$$t_p = \frac{(\bar{x}_t - \bar{x}_c) - (\mu_t - \mu_c)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_p^2 + (m-1)s_p^2}{n+m-2}$$

**Lección N° I**

**Tabla # 5:** Datos de lección N° I

| DATOS | GRUPO TRATAMIENTO | GRUPO CONTROL |
|---|---|---|
| Estudiantes | 33 | 35 |
| Media | 7,859848485 | 6,823809524 |
| Varianza | 3,752367424 | 3,293956916 |

**Fuente:** Resultados de lección N° I
**Elaborado por:** Autora

En la lección N° I el estimado del estadístico de prueba es de:

$$t_p = \frac{(7{,}859848485 - 6{,}823809524) - 0}{\sqrt{3{,}9\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{35}\right)}} = 1{,}88299718$$

$$s_p^2 = \frac{(33-1)3{,}7 + (35-1)3{,}2}{66} = 3{,}516216556$$

El valor 1,882997 se encuentra dentro de la región crítico o rechazo y fuera de la región de confianza, por tanto, la decisión es rechazar la $H_0$ y aceptar $H_a$ . En conclusión la media de los promedios de los estudiantes donde se aplicó la propuesta es mayor con un índice de confianza del 95%.

**Lección N° II**

**Tabla # 6:** Datos de lección N° II

| DATOS | GRUPO TRATAMIENTO | GRUPO CONTROL |
|---|---|---|
| **Estudiantes** | 33 | 35 |
| **Media** | 8,01952862 | 6,205050505 |
| **Varianza** | 5,441332064 | 5,789623986 |

**Fuente:** Resultados de lección N° II
**Elaborado por:** Autora

En la lección N° II el estimado del estadístico de prueba es de:

$$t_p = \frac{(8{,}01952862 - 6{,}205050505) - 0}{\sqrt{5{,}6\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{35}\right)}} = 3{,}15421241$$

$$s_p^2 = \frac{(33-1)5{,}44 + (35-1)5{,}78}{66} = 5{,}620755175$$

El valor 3,15421241 se encuentra dentro de la región crítica o rechazo y fuera de la región de confianza, por tanto, la decisión es rechazar la $H_0$ y aceptar $H_a$ . En conclusión la media de los promedios de los estudiantes donde se aplicó la propuesta es mayor con un índice de confianza del 95%.

**Lección N° III**

**Tabla # 7:** Datos de lección N° III

| DATOS | GRUPO TRATAMIENTO | GRUPO CONTROL |
|---|---|---|
| **Estudiantes** | 33 | 35 |
| **Media** | 7,942760943 | 6,814814815 |
| **Varianza** | 6,511875205 | 3,552907533 |

**Fuente:** Resultados de lección N° III
**Elaborado por:** Autora

En la lección N° III el estimado del estadístico de prueba es de:

$$t_p = \frac{(7{,}942760943 - 6{,}814814815) - 0}{\sqrt{4{,}9\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{35}\right)}} = 2{,}08152145$$

$$s_p^2 = \frac{(33-1)6{,}51 + (35-1)3{,}55}{66} = 4{,}987558526$$

El valor 2,08152145 se encuentra dentro de la región crítica o rechazo y fuera de la región de confianza, por tanto, la decisión es rechazar la $H_0$ y aceptar $H_a$ . En conclusión la media de los promedios de los estudiantes donde se aplicó la propuesta es mayor con un índice de confianza del 95%.

**Lección N° IV**

| DATOS | GRUPO TRATAMIENTO | GRUPO CONTROL |
|---|---|---|
| **Estudiantes** | 33 | 35 |
| **Media** | 7,60290404 | 6,564880952 |
| **Varianza** | 5,494185064 | 4,145505244 |

**Fuente:** Resultados de lección N° IV
**Elaborado por:** Autora

En la lección N° IV el estimado del estadístico de prueba es de:

$$t_p = \frac{(7{,}60290404 - 6{,}564880952) - 0}{\sqrt{4{,}79\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{35}\right)}} = 1{,}95276326$$

$$s_p^2 = \frac{(33-1)5{,}49 + (35-1)4{,}14}{66} = 4{,}799410611$$

El valor 1,95276326 se encuentra dentro de la región crítica o rechazo y fuera de la región de confianza, por tanto, la decisión es rechazar la $H_0$ y aceptar $H_a$ . En conclusión la media de los promedios de los estudiantes donde se aplicó la propuesta es mayor con un índice de confianza del 95%.

**Lección N° V**

**Tabla # 8:** Datos de lección N° V

| DATOS | GRUPO TRATAMIENTO | GRUPO CONTROL |
|---|---|---|
| **Estudiantes** | 33 | 35 |
| **Media** | 7,51010101 | 6,247474747 |
| **Varianza** | 6,681295276 | 4,194195011 |

**Fuente:** Resultados de lección N° V
**Elaborado por:** Autora

En la lección N° V el estimado del estadístico de prueba es de:

$$t_p = \frac{(7{,}51010101 - 6{,}247474747) - 0}{\sqrt{5{,}4\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{35}\right)}} = 2{,}2392985$$

$$s_p^2 = \frac{(33-1)6{,}68 + (35-1)4{,}19}{66} = 5{,}400061806$$

El valor 2,2392985 se encuentra dentro de la región crítica o rechazo y fuera de la región de confianza, por tanto, la decisión es rechazar la $H_0$ y aceptar $H_a$ . En conclusión la media de los promedios de los estudiantes donde se aplicó la propuesta es mayor con un índice de confianza del 95%.

**Lección cierre de unidad**

**Tabla # 9:** Datos de lección cierre de unidad

| DATOS | GRUPO TRATAMIENTO | GRUPO CONTROL |
|---|---|---|
| **Estudiantes** | 33 | 35 |
| **Media** | 8,282828283 | 6,514285714 |
| **Varianza** | 4,122028364 | 3,164081633 |

**Fuente:** Resultados de lección cierre de unidad
**Elaborado por:** Autora

En la lección cierre de unidad el estimado del estadístico de prueba es de:

$$t_p = \frac{(8{,}282828283 - 6{,}514285714) - 0}{\sqrt{4{,}79\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{35}\right)}} = 3{,}82636202$$

$$s_p^2 = \frac{(33-1)4{,}1 + (35-1)3{,}1}{66} = 3{,}628540654$$

El valor 3,82636202 se encuentra dentro de la región crítica o rechazo y fuera de la región de confianza, por tanto, la decisión es rechazar la $H_0$ y aceptar $H_a$ . En conclusión la media de los promedios de los estudiantes donde se aplicó la propuesta es mayor con un índice de confianza del 95%.

## 4.3. Encuesta realizada a los estudiantes de tercero de bachillerato cc "A"

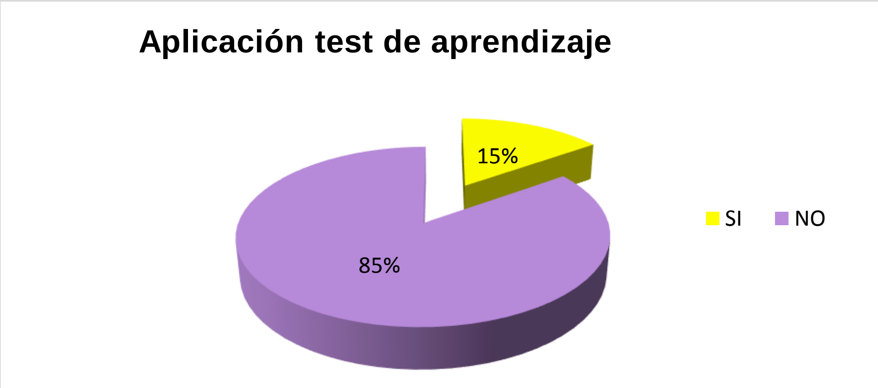
1. ¿Había hecho un test de aprendizaje anteriormente?

**Tabla # 10:** Aplicación de cuestionario de estilos de aprendizaje

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| **SI** | 5 | 15% |
| **NO** | 28 | 85% |
| **TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS** | **33** | **100%** |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 4:** Aplicación de cuestionario de estilos de aprendizaje




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

De los estudiantes encuestados el 85% no se habían sometido a un cuestionario que establezca cuáles son los estilos de aprendizaje, para este grupo resultó novedoso el describir a través de un test la forma que poseen al aprender.

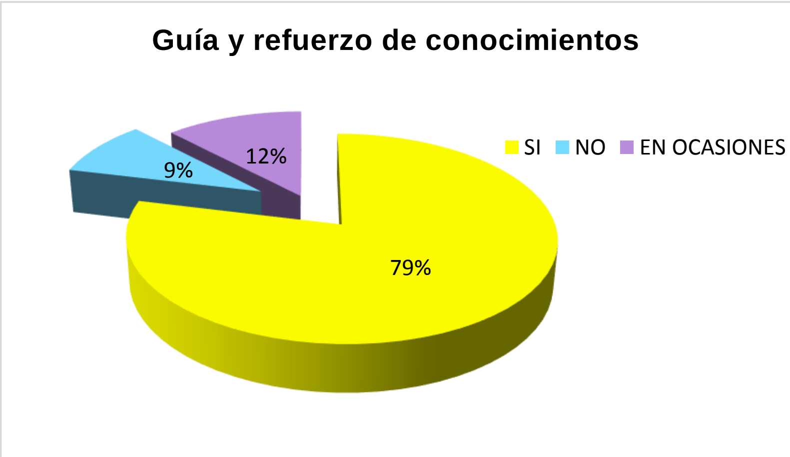
2. ¿La guía didáctica le permitió reforzar sus conocimientos en casa?

**Tabla # 11:** Guía y refuerzo de conocimientos

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| **SI** | 26 | 79% |
| **NO** | 3 | 9% |
| **EN OCASIONES** | 4 | 12% |
| **TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS** | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 5:** Guía y refuerzo de conocimientos




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

La aplicación de una guía didáctica según un 79% los estudiantes encuestados han ayudado a reforzar sus conocimientos, lo que se vio reflejado no solo en las lecciones, sino en la interacción entre los escolares; mientras los que ocasionalmente utilizaban es un 12%; un pequeño grupo que representa un 9% nunca aplicaron el folleto fuera del salón de clases.

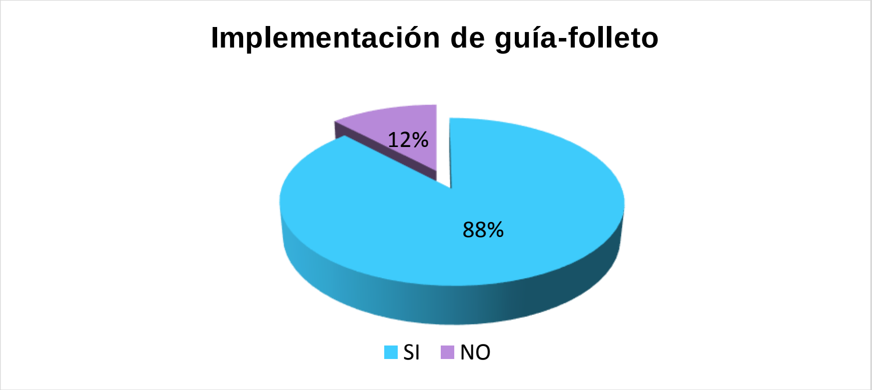
3. ¿Recomendaría a su docente implementar folleto-guía como apoyo pedagógico?

**Tabla # 12:** Implementación de guía-folleto

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| **SI** | 29 | 88% |
| **NO** | 4 | 12% |
| **TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS** | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 6:** Implementación de guía-folleto




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

De 33 estudiantes que se encuestaron un 88% recomendarían trabajar con folleto como ayuda pedagógica, por lo que se infiere que la guía fue de agrado y ayuda significativa para los jóvenes.

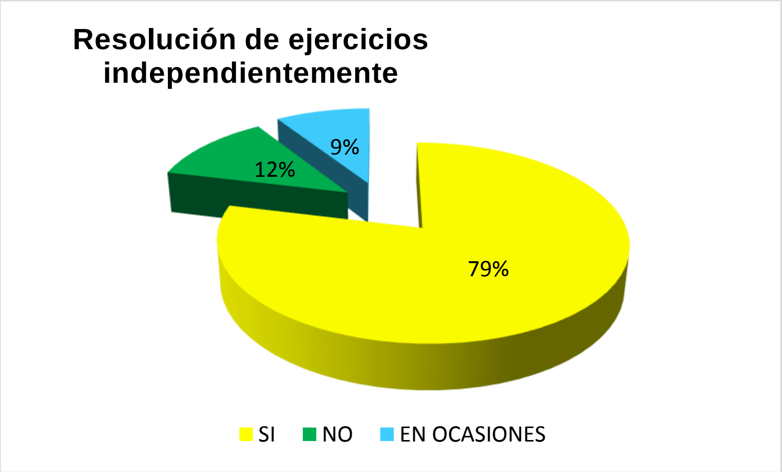
4. ¿Una vez recibidas las clases, logró hacer los ejercicios propuesto en la guía?

**Tabla # 13:** Resolución de ejercicios independientemente

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| SI | 26 | 79% |
| NO | 4 | 12% |
| EN OCASIONES | 3 | 9% |
| TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 7:** Resolución de ejercicios independientemente




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

Las actividades enviadas a casa suelen ser complicadas para los estudiantes, de los encuestados el 79% logró hacer las propuestas en el folleto, del estudiantado un 12% no pudo hacer los ejercicios planteados, mientras que el 9% ocasionalmente lograba hacer un ejercicio.

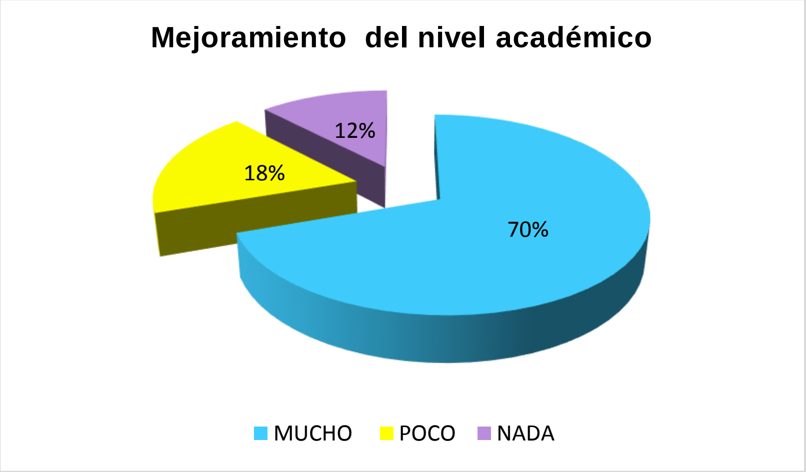
5. ¿Mejoró su rendimiento académico durante la aplicación del folleto de secciones cónicas?

**Tabla # 14:** Mejoramiento del rendimiento académico

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| MUCHO | 23 | 70% |
| POCO | 6 | 18% |
| NADA | 4 | 12% |
| TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 8:** Mejoramiento del rendimiento académico




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

De los estudiantes encuestados un 70% lograron mejorar su rendimiento académico significativamente, es decir 23 estudiantes; un 18% mejoraron levemente y un 12% que representa a 4 jóvenes que no superaron su rendimiento.

6. De los siguientes aspectos, cuál o cuáles le llamaron la atención de la guía.

**Tabla # 15:** Aspectos relevantes de la guía

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| **EJERCICIOS EXPLICADOS SECUENCIALMENTE** | 6 | 18% |
| **DEDUCCIÓN DE ECUACIONES** | 0 | 0% |
| **SÍNTESIS** | 5 | 15% |
| **MOMENTO TECNOLÓGICO** | 22 | 67% |
| **TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS** | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 9:** Aspectos relevantes de la guía


**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

Sin duda los jóvenes en la actualidad son tecnológicos, de los encuestados un 67% manifestaron gustar el "momento tecnológico del folleto", donde se recomienda videos tutoriales y trabajo con graficadores; un 18% muestran interés por los ejercicios resueltos paso a paso y un 15% las síntesis de la guía.

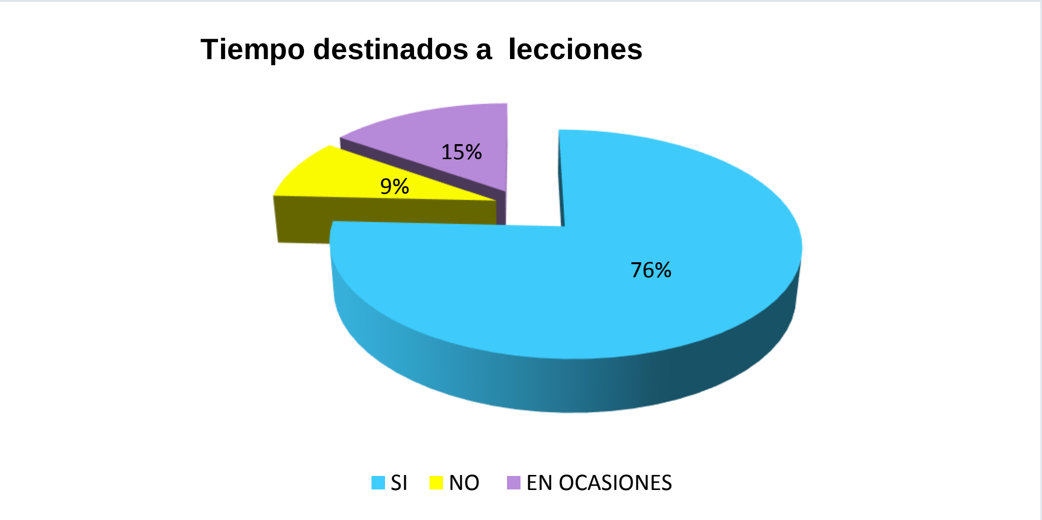
7. ¿El tiempo asignado para cada lección le pareció el adecuado?

**Tabla # 16:** Tiempo destinado a lecciones

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| SI | 25 | 76% |
| NO | 3 | 9% |
| EN OCASIONES | 5 | 15% |
| TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 10:** Tiempo destinados a lecciones




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

Según los encuestados el tiempo destinado para la realización las lecciones formativas durante la unidad fue de un 75%, un 9% consideran que el tiempo no ha sido el suficiente y un 16% establecen que los tiempos han sido ocasionalmente los adecuados.

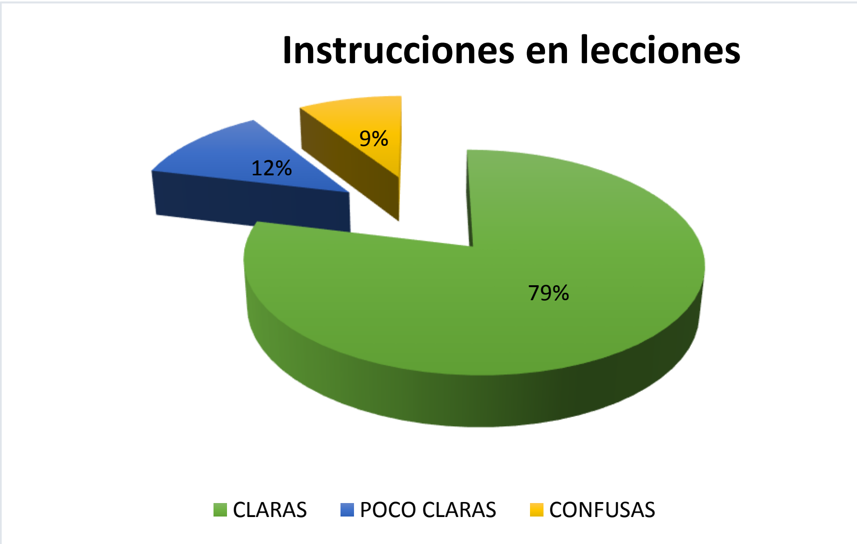
8. Las órdenes e instrucciones de las lecciones propuestas le pareció:

**Tabla # 17:** Instrucciones en lecciones

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| CLARAS | 26 | 79% |
| POCO CLARAS | 4 | 12% |
| CONFUSAS | 3 | 9% |
| TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 11:** Instrucciones en lecciones




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

Los estudiantes manifestaron en un gran porcentaje que las instrucciones dadas en las preguntas de las lecciones han sido claras en un 79%, mientras que un 12% consideran que han sido poco claras.

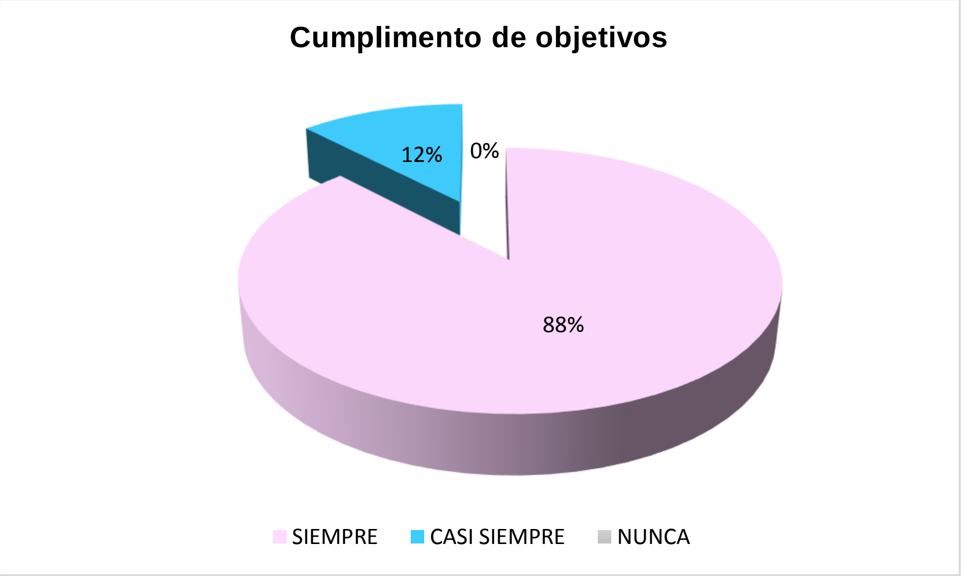
9. ¿La docente cumplió con todos objetivos propuestos en cada clase?

**Tabla # 18:** Cumplimento de objetivos

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| SIEMPRE | 29 | 88% |
| CASI SIEMPRE | 4 | 12% |
| NUNCA | 0 | 0% |
| TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 12:** Cumplimento de objetivos




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

Para los estudiantes se efectuaron los objetivos propuestos en cada clase, un 88% creen que se cumplieron a cabalidad un 12% consideran que no siempre se cumplieron.

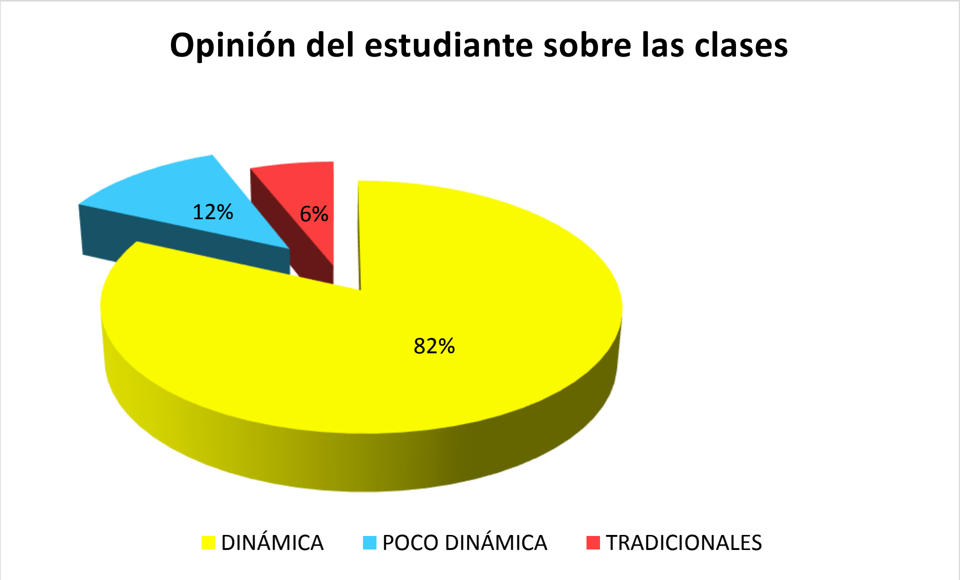
10. En los dos últimos parciales las clases le pareció:

**Tabla # 19:** Opinión del estudiante sobre las clases

| OPCIONES | ESTUDIANTES | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| DINÁMICA | 27 | 82% |
| POCO DINÁMICA | 4 | 12% |
| TRADICIONALES | 2 | 6% |
| TOTAL DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS | 33 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

**Cuadro# 13:** Opinión del estudiante sobre las clases




**Fuente:** Encuesta a estudiantes
**Elaborado por:** Autora

Los estudiantes que sintieron un cambio durante las horas de clases y consideraron que estas fueron dinámicas son un 82%, los que sintieron que las clases fueron tradicionales son un 6%.

# CAPITULO V

## 5. LA PROPUESTA

### 5.1. Título de la propuesta

“Diseño, implementación de guía didáctica e instrumentos de evaluación válidos y confiables en el proceso de enseñanza – aprendizaje de secciones cónicas, a estudiantes de tercero de bachillerato”

### 5.2. Justificación

En la actualidad los jóvenes muestran poco interés por mejorar el nivel académico. El poco tiempo que el docente tiene para una extensa malla curricular, la desmotivación que acompañado con “clases magistrales” hacen que la matemática se torne aburrida y odiada.

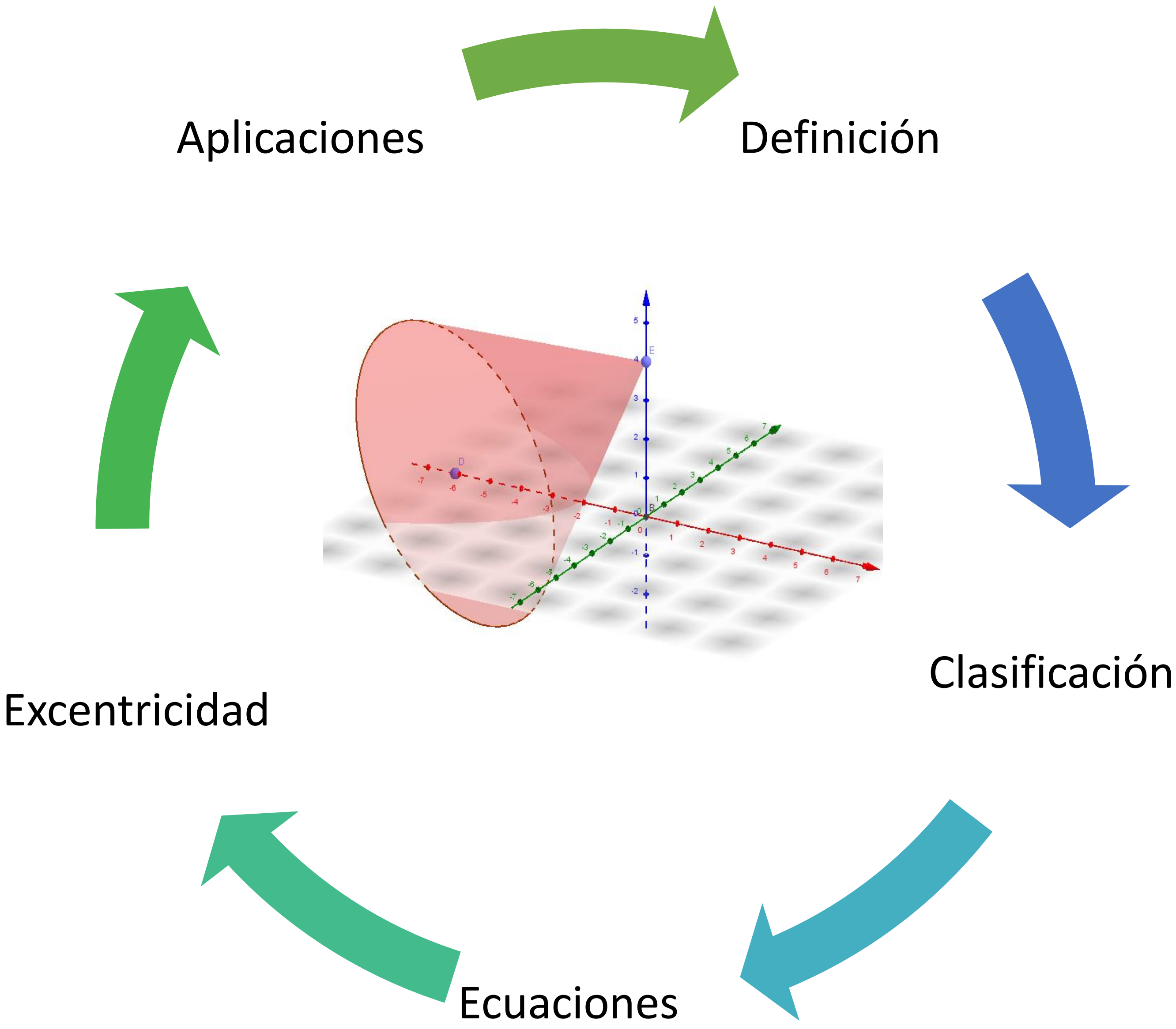
La implementación de una guía didáctica es, para que el estudiante logre tener una herramienta de trabajo en casa que conjugando con la tecnología se pueda mejorar el nivel cognitivo y así este se sienta motivado para aprender.

Una evaluación tiene el poder de motivar o desmotivar al estudiante, no solo significa una calificación, es valorar el aprendizaje; la propuesta es elaborar instrumentos de evaluación válidos y confiables.

Con la propuesta se espera:

- Activar un aprendizaje significativo.
- Incentivar el aprendizaje autónomo.
- Impulsar al interés por mejorar el rendimiento académico.
- Mejorar las calificaciones.
- Estimular clases participativas.

# Secciones Cónicas



# 1. Secciones Cónicas

*Capítulo I: Definición, Clasificación y aplicaciones.*

***Pre- Requisitos:***

- Reconocer formas básicas geométricas, curvas, conos, circunferencias, entre otras.
- Realizar graficas en el plano a partir de puntos dados.

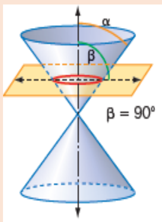
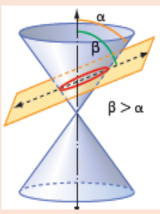
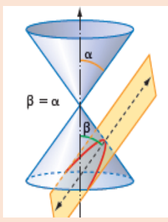
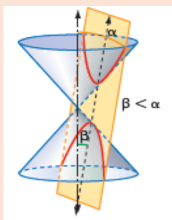
***Objetivos:***

- Reconocer las cónicas como variantes de un mismo modelo geométrico.
- Explicar el origen de las cónicas.
- Reconocer la expresión analítica de las cónicas.
- Identificar a que cónica corresponde (parábola, hipérbola, elipse) dado el discriminante de la ecuación general del segundo grado.
- Comprender los diversos usos de la teoría de las secciones cónicas en la realidad.

## Definición

Se denomina sección cónica a cada una de las curvas planas que se obtienen al cortar una superficie cónica por un plano que no pasa por su vértice. El tipo de curva que se obtiene depende del ángulo *α* de la superficie cónica y del ángulo *β* que forma el plano *P* con el eje *e*.

## Clasificación de las cónicas

| *Circunferencia* | *Elipse* | *Parábola* | *Hipérbola* |
|---|---|---|---|
| Si el plano corta de manera perpendicular al eje del cono. | Si el plano no perpendicular al eje, pero corta a toda generatriz. | Si plano es paralelo a una generatriz y corta a todas las demás. | Si el plano corta a dos ramas del cono y no pasa nada por el vértice. |
|  |  |  |  |

# *Ecuación general de las cónicas*

Desde un punto de vista analítico se puede definir cónica como la curva que responde a una ecuación del tipo: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

Los valores que toman A, B, C, D, E y F, determinan el tipo de la cónica y su posición en el plano. Permitiendo que dichos coeficientes tomen valores cualesquiera, además de los cuatro tipos de cónicas, se obtienen cónicas degeneradas e incluso cónicas imaginarias.

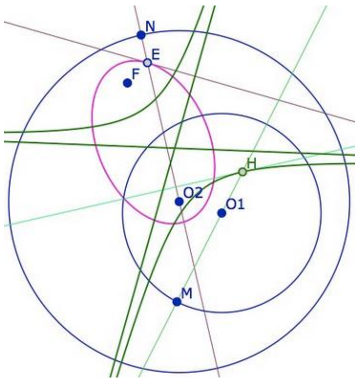
Si la cónica es no degenerada, de acuerdo al signo de $B^2 - 4AC$ se puede establecer de qué tipo es. Así:

- Si $B^2 - 4AC < 0$, se trata de una elipse.
- Si $B^2 - 4AC = 0$, la curva es una parábola.
- Si $B^2 - 4AC > 0$, es una hipérbola.

La expresión $B^2 - 4AC$ se llama discriminante de la ecuación.

## *Clave: Intersección entre cónicas*

Para encontrar el o los puntos comunes entre cónicas es necesario establecer un sistema de ecuación y reducirlo, para luego realizar todas las operaciones básicas en las ecuaciones obtenidas y hallar las coordenadas reales de intersección.



# *Entendiendo el origen*

Superficie cónica, la que se genera al girar una recta alrededor de otra a la cual corta.

Si se tienen dos rectas, *e* y *g*, que se cortan en un punto *V* (figura 1) y hacemos girar la recta *g* alrededor de *e*, se obtiene una figura formada por dos conos infinitos opuestos por el vértice (figura 2). Es la superficie cónica cuya forma depende del ángulo α que forman las rectas *e* y *g*.

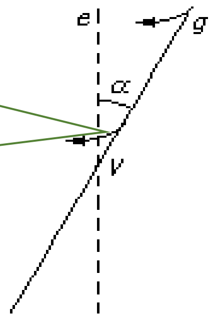



Figura 1

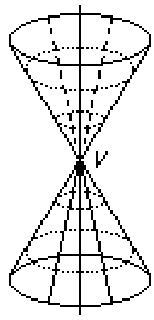



Figura 2

**Recuerda**

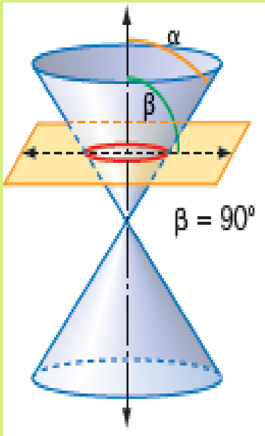
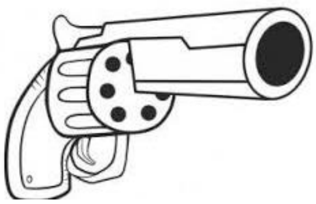
- ✓ La recta *e* se llama eje
- ✓ Todas las rectas *g* (la inicial y las infinitas posiciones que ésta ocupa al girar alrededor de *e*) se llaman generatrices,
- ✓ V es el vértice de la superficie cónica.
- ✓ Del ángulo α depende la forma de la superficie cónica.
- ✓ Del ángulo β depende la forma de la sección cónica.

# *Momento tecnológico*

https://www.youtube.com/watch?v=cUN7Io8OGxs

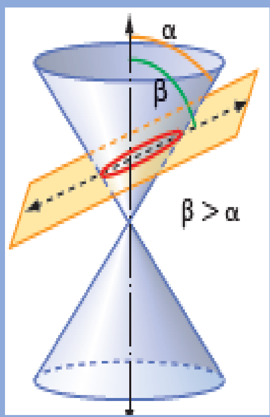
## *Aplicación de las secciones cónicas*

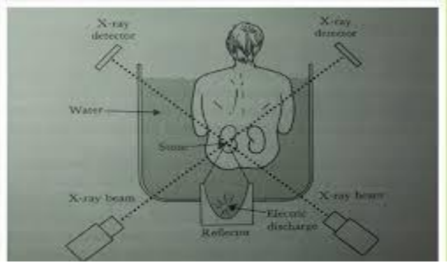
### 1. CIRCUNFERENCIA

| **APLICACIÓN EN LA VIDA DIARIA DE LAS CIRCUNFERENCIAS** | | |
|---|---|---|
| **En los deportes**.  No solo se aplica en los balones, al observar con detenimiento nos daremos cuenta que muchas de las canchas o lugares en donde se practican deportes tienen marcas geométricas y Circunferencias que determinan situaciones reglamentarias, etc. |   | **Los Cds,** piezas ordinarias en la música actual, son una placa circular con un borde que termina siendo una circunferencia. Entre  otros avances  |
| **En las Armas**, se habla normalmente de pistolas calibre de 6.35 mm, 7.65 mm, 9 mm, etc. Esto no es solo un "nombre", sino que esto se refiere al tamaño del agujero (cañón) por donde salen los proyectiles (balas) del arma, usando el tamaño del diámetro y usando una medida milimetrada para lograrlo.  | | **En el transporte,** Las ruedas están hechas de un "arco". La mejor parte de esto es que la rueda se afirma desde el centro y desde este salen un montón de alambres delgados llamados "rayos" y estos son radios que mantienen la forma circunferencial de la rueda perfectamente.  |

## 2. ELIPSE

<table>
<tr><th colspan="3">APLICACIÓN EN LA VIDA DIARIA DEL ELIPSE</th></tr>
<tr>
<td>Astronomía. El movimiento más frecuente de estrellas, planetas, satélites, etc. es el descrito


mediante trayectorias elípticas (la circunferencia es un caso particular de elipse). No hace falta salir al espacio para observar a la elipse y a la parábola como trayectorias que sigue un cuerpo.</td>
<td rowspan="2">
</td>
<td>Medicina, se usa un aparato llamado litotriptor para

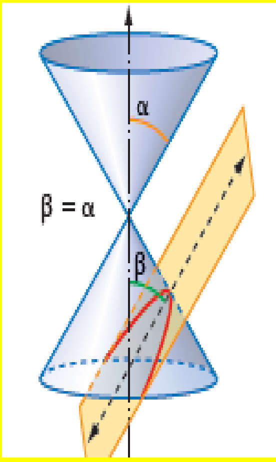



desintegrar "cálculos" renales por medio de ondas intra-acuaticas de choque. Para ello se coloca un medio elipsoide de agua pegado al cuerpo del paciente en el foco de esta parte del elipsoide se pone un generador de ondas; el foco de la otra parte del elipsoide se debe localizar en estos cálculos.</td>
</tr>
<tr>
<td>Orbita De Los Cometas, A cierta distancia del Sol, existe una velocidad umbral llamada velocidad de escape, v. Cuando un cometa tiene una velocidad igual o mayor que v, escapa del sistema solar. Si su velocidad es menor permanece dentro del campo gravitacional del Sol.

</td>
<td>Otros,

</td>
</tr>
</table>

## 3. PARÁBOLAS

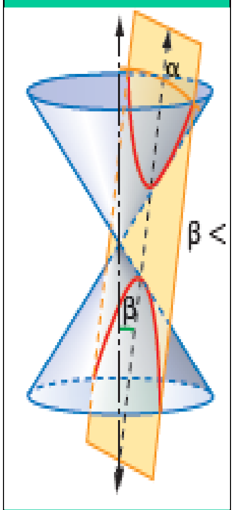
<table>
<tr><th colspan="3">APLICACIÓN EN LA VIDA DIARIA DE LAS PARÁBOLAS</th></tr>
<tr>
<td>Propiedades Reflectoras, Las aplicaciones principales de las parábolas incluyen su como reflectores de luz y ondas de radio, y las parabólicas. Los rayos originados en el foco de la parábola se reflejan hacia afuera de la parábola, en líneas paralelas al eje de la parábola.<br><br></td>
<td><br></td>
<td>En la Construcción.<br><br><br></td>
</tr>
</table>

## *4. HIPÉRBOLA*

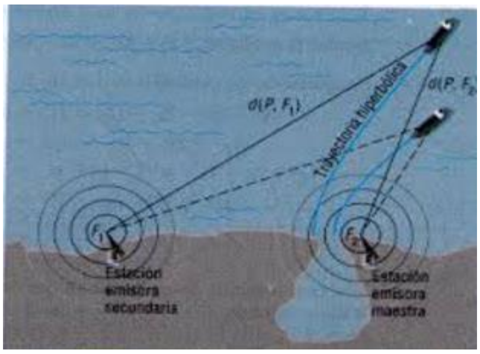
**APLICACIÓN EN LA VIDA DIARIA DE LAS *HIPÉRBOLAS***

Propiedades de Reflexión, la hipérbola tiene una propiedad interesante: Si unimos cualquier punto, P, de la hipérbola con sus focos, el ángulo que forman los radios focales con la tangente en ese punto, son iguales. (También se puede decir que la tangente es la bisectriz del

ángulo que forman los radios focales). Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos (de luz y sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde el foco se refleja en la dirección de la recta que une el otro foco con el punto.




**Sistema De Navegación Loran,** Consiste en mandar una señal de radio simultáneamente desde dos puntos muy lejanos entre sí, cuyas posiciones se conocen con exactitud. A partir del




tiempo y del orden de llegada de las dos señales, es posible determinar la posición de una de ellas considerando que están en una rama de determinada hipérbola, cuyos focos son las estaciones. Si se agrega una tercera estación como la anterior, se puede usar ésta con cualquiera de las 2 primeras, para restringir la posición de la señal a una segunda hipérbola. El punto de intersección de las dos medias hipérbolas da la ubicación del receptor.

## *Taller: Amor por las cónicas*

***Instrucciones***

*1. Ordenadamente todos los estudiantes deben formar 4 grupos, tratando en lo posible de que los mismos tengan la misma cantidad de integrantes. Cada grupo elegirá una sección cónica con la cual trabajara (Circunferencia, Elipse, Parábola e Hipérbola)*

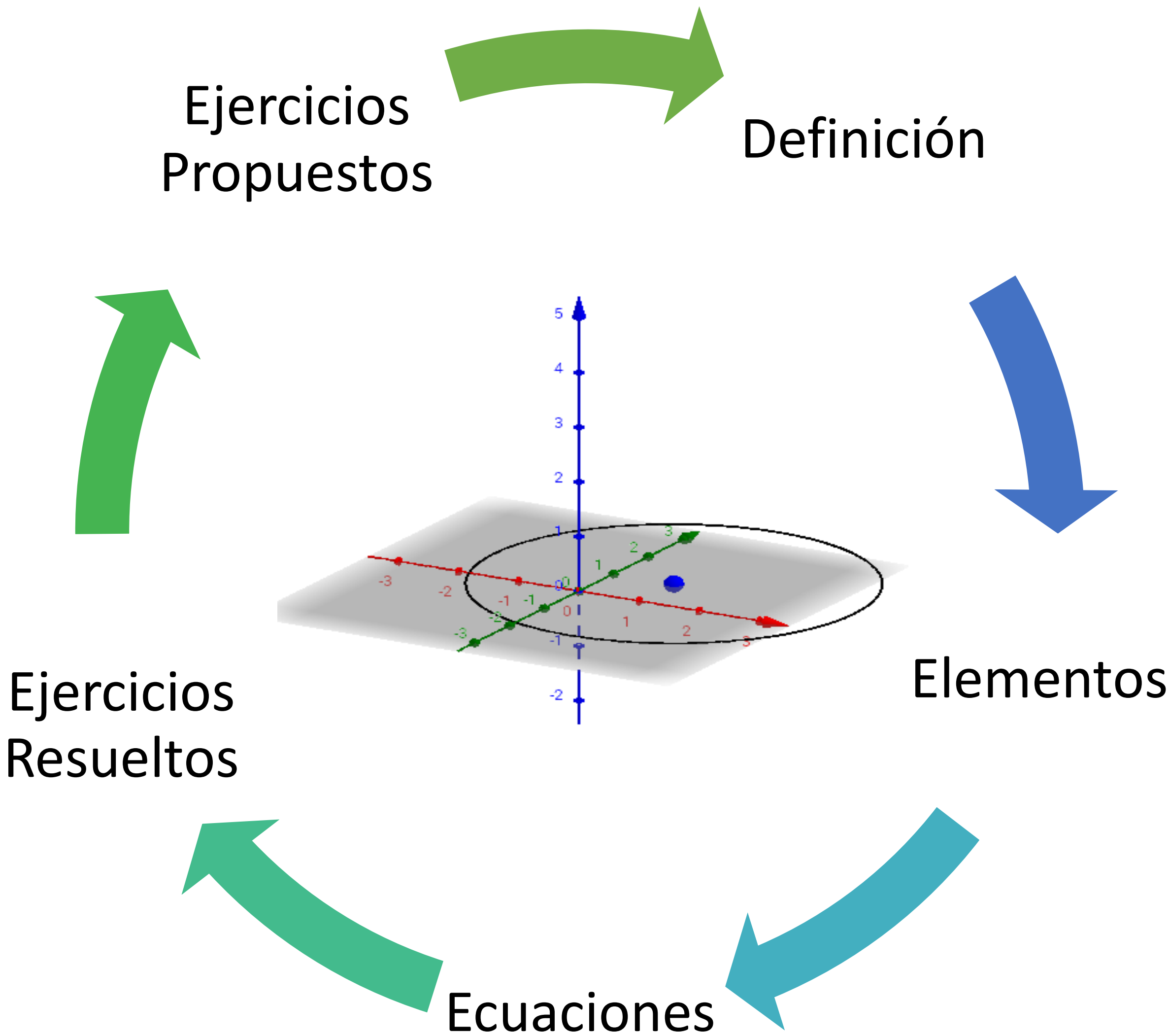
*2. Basados en el contenido impartido en lo Referente a Aplicaciones de cada sección cónica, comenzaran un debate donde cada grupo tendrá la oportunidad por turnos, de ir exponiendo los usos dados a la sección cónica que eligieron en la actualidad y la importancia que esta tiene al desarrollo tecnológico. El grupo que logre explicar la mayor cantidad de usos y la importancia de los mismos gana + que se acumularan para ganar puntos al final del curso.*

## COMPLEMENTO:


**1.** ***Ver y luego comentar en Clase la Película Ágora (2009) de Alejandro Amenábar:*** *A lo largo de la película el personaje de Hipatia se emociona ante los textos de los Elementos de Euclides,* ***el cono de Apolonio****, el sistema geocéntrico de Claudio Ptolomeo y el heliocéntrico de Aristarco de Samos y se apasiona y empeña en resolver el enigma astronómico que plantean los planetas errantes vislumbrando en* ***la elipse*** *la solución que hallarán más de mil años después, en el siglo XVI, Copérnico y Kepler en su reformulación, hoy vigente, de la Teoría heliocéntrica de* ***órbitas elípticas.***

*2.* ***Revisar y utiliza el programa GeoGrebra****: Este programa te ofrece la oportunidad de representar fácilmente secciones cónicas a partir de datos preestablecidos. Lo puedes descargar a tu computadora, tableta o teléfono inteligente, o en su defecto puedes trabajar en línea a través de* ***[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).*** *Conoce la infinidad de usos y lo divertidas que pueden ser las secciones cónicas con este programa.*

## *A continuación... Circunferencia*



### *Pre- Requisitos:*

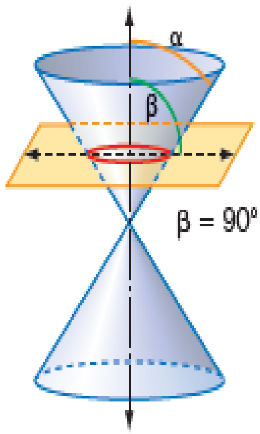
- Reconocer la ecuación general de la cónica.
- Establecer sistemas de ecuaciones y reducirlos.
- Desarrollar operaciones básicas (Producto notable, Despejes, factorización, entre otras)

### *Objetivos:*

- Deducir la ecuación canónica y general de la circunferencia, usando conceptos fundamentales de la matemática.
- Conocer y calcular los elementos de una circunferencia
- Interpretar rectas tangentes a una circunferencia, por medio de distancia de un punto a recta.
- Deducir la ecuación general de la circunferencia a partir de su gráfica en el plano.

## Definición

Conjunto de puntos en el plano cartesiano que se encuentran a una distancia fija r, de un punto fijo $O(h,k)$. La distancia fija r es denominada longitud del radio y el punto fijo $O(h,k)$ es el centro de la circunferencia.

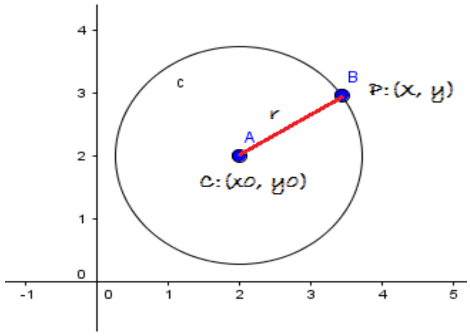



$$\boldsymbol{Circunferencia} = \{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{r}\}$$

## Ecuación General y reducida de la circunferencia:

Circunferencia es un lugar geométrico que equidistan un punto P (x, y) que pertenece a la circunferencia y su centro ($x_0$, $y_0$), donde:

$$d = \sqrt{(y - yo)^2 + (x - xo)^2}$$




Siendo la distancia el radio $r = \sqrt{(y - yo)^2 + (x - xo)^2}$

Elevamos al cuadrado cada expresión: $r^2 = (y - yo)^2 + (x - xo)^2$

Entonces tenemos:

- Si el centro está en el origen la expresión de la ecuación seria: $r^2 = x^2 + y^2$

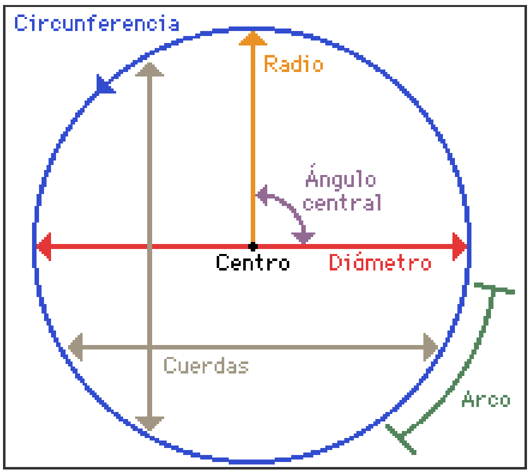
- Si el centro está en un punto P, podemos expresar el centro de la siguiente manera C: $(h, k)$, quedando la expresión: $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$.Esta forma la denominaremos forma canónica de la circunferencia.

- A partir de la ecuación canónica se obtiene la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$

## Elementos de la Circunferencia:

Los elementos de una circunferencia son:

- Diámetro
- Radio
- Cuerda
- Arco



## *Fórmulas para el cálculo de los elementos de una circunferencia:*

La ecuación general de una circunferencia con centro en *(a, b)* y radio *r* es

$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde

$C = -2a$, $D = -2b$ y $E = a^2 + b^2 - r^2$.

A partir de estos datos se obtienen las siguientes fórmulas para el cálculo del ***centro de una circunferencia***

$$a = -\frac{C}{2}\,;\ \ b = -\frac{D}{2}$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - E = \left(-\frac{C}{2}\right)^2 + \left(-\frac{D}{2}\right)^2 - E = \frac{C^2+D^2-4E}{4} \rightarrow r = \sqrt{\frac{C^2+D^2-4E}{4}}$$

Si $\frac{C^2+D^2-4E}{4} < 0$, ha de interpretarse que no existe tal circunferencia y se dirá en tal caso que es una circunferencia imaginaria

## *Cálculo de los elementos de una circunferencia:*

**Evidencia Práctica 1:**

Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$.

*Determinación del Centro*

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{C}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ b &= -\frac{D}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{aligned}\right\} \quad (2, -3)$$

**Centro**: (2,-3)

**Determinación Radio**

$$\mathrm{r} = \sqrt{\frac{\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2-4\mathrm{E}}{4}} = \sqrt{\frac{4^2+6^2-4(3)}{4}} = \sqrt{\frac{40}{4}} = \sqrt{10}$$

**Radio**: $\sqrt{10}$

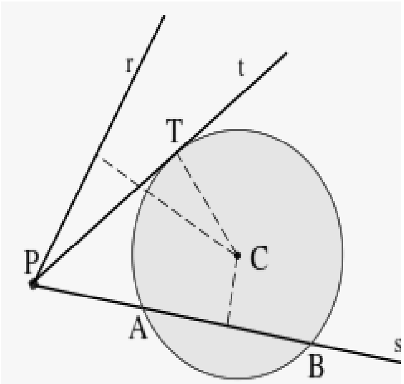
## *Recta Tangente a una circunferencia:*

Si desde un punto P(x, y) trazamos una recta t, será tangente a una circunferencia cuando la distancia del centro a la recta coincida con el radio.

• La recta es tangente si d(C, t) = radio

• La recta se llama exterior si d(C, r) > radio

• La recta se llama secante si d(C, s) < radio la intersecta en dos puntos A y B.




$$r = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Evidencia Práctica 1**

Comprobar que la recta *s* = 4x−3y+6 = 0 es tangente a la circunferencia $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$

**Solución:**

**Paso 1:** Reemplazar términos

$$r = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Paso 2:** Resolver

$$d(C;s) = \frac{|4(2) - 3(3) + 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1 = radio$$

**Respuesta:** Dado que la distancia *(C,s)* es igual al radio de la circunferencia descrita, se afirma que la recta *s* es tangente a la circunferencia $(x - 2)2 + (y - 3)2 = 1.$

**Evidencia Práctica 2**

Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene como centro al punto $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ y es tangente a la recta 2x+9y-31=0. La longitud del radio es la distancia entre el centro de la circunferencia a la recta tangente.

**Solución:**

**Paso 1:** Reemplazar términos

$$r = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r = \frac{\left|2(1) + 9\left(-\frac{3}{2}\right) - 31\right|}{\sqrt{2^2 + 9^2}}$$

**Paso 2:** Resolver operaciones básicas

$$r = \frac{\left|2 - \frac{27}{2} - 31\right|}{\sqrt{85}} = \frac{\left|-29 - \frac{27}{2}\right|}{\sqrt{85}} = \frac{\left|\frac{-58 - 27}{2}\right|}{\sqrt{85}} = \frac{\frac{85}{2}}{\sqrt{85}} = \frac{85}{2\sqrt{85}}$$

**Paso4:** Racionalizar

$$\frac{85}{2\sqrt{85}} x \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{85}} = \frac{85\sqrt{85}}{2x85} = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

**Paso5:** Reemplazar en la ecuación canónica:

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 = \frac{85}{4} = (x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2$$

**Paso 6:** Multiplicar toda la expresión por 4

$$\frac{85}{4} = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 3y + \frac{9}{4};$$

$$0 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 + 12y + 9 - 85$$

$$4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y + 9 - 85 + 4 = 0$$

**Solución**

$$4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 72 = 0$$

## *Síntesis*

| **Fórmulas de la circunferencia** | |
|---|---|
| **Ecuación General** | $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$ |
| **Ecuación Ordinaria Canoníca (Centro el origen)** | $x^2 + y^2 = r^2$ |
| **Ecuación Ordinaria con Centro $(h, k)$** | $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ |
| **Excentricidad** | $e = 0$ |
| **Diámetro** | $2\,radio$ |
| **Centro** | $a = -\frac{A}{2}$; $b = -\frac{B}{2}$ |
| **Longitud** | $L = \pi 2r$ |

## *Claves: Circunferencia*

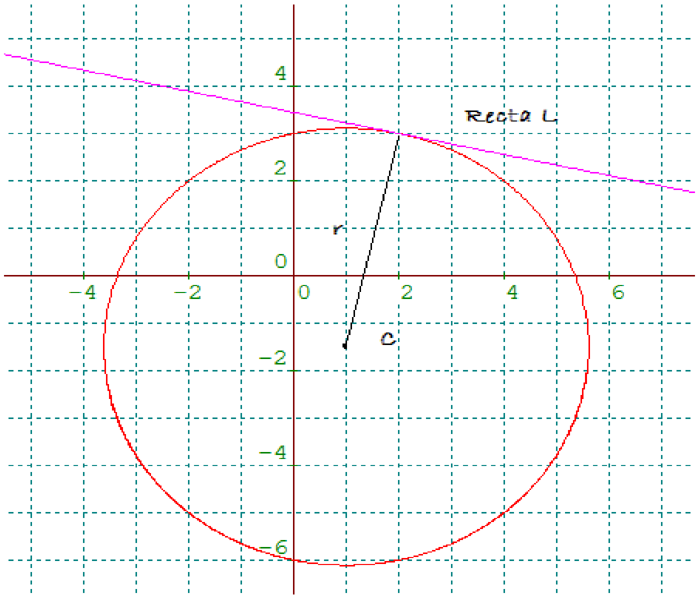
**1. Para identificar con rapidez la ecuación general de la circunferencia debes observar el valor que poseen los términos A y B, los cuales siempre serán iguales. Observa:**

$$4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 72 = 0$$

$$5x^2 + 5y^2 - 9x - 19y - 26 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$$

**2. La longitud del radio siempre será la distancia entre el centro de la circunferencia a una recta tangente**



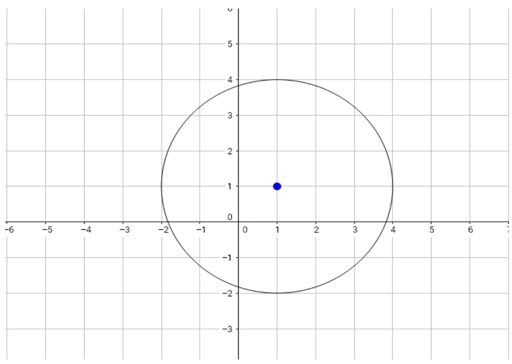

# *Momento tecnológico*

Para graficar puedes usar GeoGebra

**Tutorial:** https://www.youtube.com/watch?v=_KufORmC34w

# *Ejercicios Resueltos*

1) **Dada la siguiente gráfica, hallar su ecuación general.**



**Solución**

**Paso 1:** Identificar datos en la gráfica, donde se tiene:

C (1,1) y el radio= 3unidades

**Paso 2:** Se sustituyen los datos en la ecuación ordinaria

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (3)^2.$$

**Paso 3:** Resolviendo el cuadrado de una diferencia y potencia

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 9.$$

**Paso 4:** Ordenando los términos en el primer miembro

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 - 9 = 0$$

**Paso 5:** Resolviendo las operaciones correspondientes, se tiene la ***ecuación general.***

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0}$$

**2.) Dada la ecuación general $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$, encontrar su gráfica en el plano cartesiano.**

**Solución**

**Paso 1:** Agrupación de los términos que contengan la misma variable.

$$(x2 + 6x) + (y2 + 2y) - 6 = 0$$

**Paso 2:** Igualando al término independiente

$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 2y) = 0 + 6$$

**Paso 3:** Completando términos → $2xb = 6x$; $2yb = 2y$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 0 + 6 + 9 + 1$$

**Paso 4:** Factorizando por trinomio cuadrado perfecto y realizando operaciones básicas

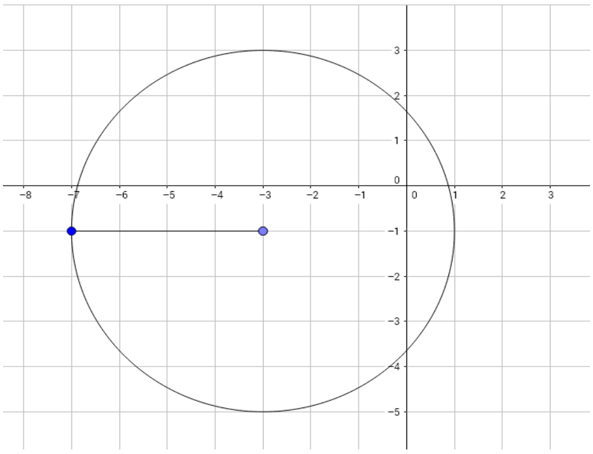
$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

**Paso 5:** Extrayendo de cada binomio y calculando raíz cuadrada del término independiente, se obtiene: $C\ (-3, -1)\ y\ el\ radio = 4$

**Respuesta:**

**La circunferencia posee un radio de 4 unidades y centro (-3,-1)**

**Ubicación en el plano cartesiano**

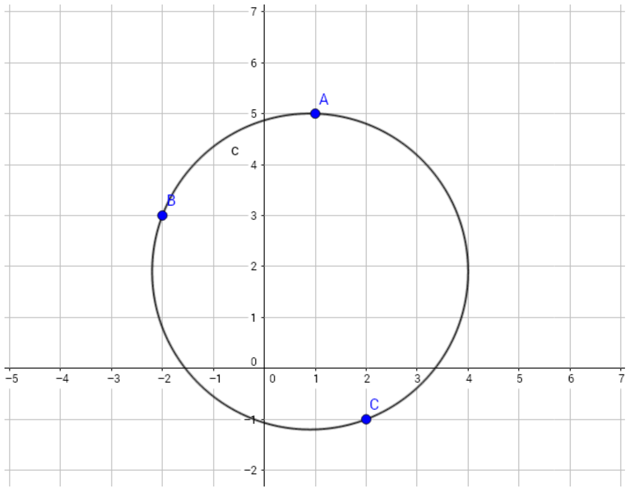


**3) Dado el lugar geométrico, encontrar la ecuación general de la circunferencia.**

**Solución**

**Paso 1:** Se obtienen los datos de la gráfica

$A$ (1,5) $B$ (−2, 3) $C$ (2, −1)




**Paso 2:** Sustituye en la ecuación general de la circunferencia, donde los coeficientes serán las incógnitas**.**

**A (1, 5)** → $(1)^2 + (5)^2 + C(1) + D(5) + E = 0$

**B (−2, 3)** → $(-2)^2 + (3)^2 + C(-2) + D(3) + E = 0$

**C (2, −1)** → $(2)^2 + (-1)^2 + C(2) + D(-1) + E = 0$

**Paso 3:** Resolviendo el sistema de ecuación lineal, se tiene:

$$\begin{cases} C + 5D + E = -26 \\ -2C + 3D + E = -13 \\ 2C - D + E = -5 \end{cases}$$

Se obtiene

$C = -\frac{9}{5}$; $D = -\frac{19}{5}$; $E = -\frac{26}{5}$

**Paso 4:** Sustituyendo en la ecuación general de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - \frac{9}{5}x - \frac{19}{5}y - \frac{26}{5} = 0$$

**Paso 5:** Multiplicando por 5 toda la expresión, se obtiene la, ***Ecuación general***

$$\mathbf{5x^2 + 5y^2 - 9x - 19y - 26 = 0}$$

**4) Hallar la ecuación de la circunferencia de radio igual a 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$ y $2x + 7y + 9 = 0$.**

**Solución**

**Paso 1:** Se construye un sistema de ecuación lineal, ya que el punto de intersección es el centro.

$$\begin{cases} 3h - 2k = 24 \\ 2h + 7k = -9 \end{cases}$$

**Paso 2:** Resolviendo el sistema de ecuación lineal C (h, k)

$$h = 6; \ \ k = -3$$

**Paso 3:** Sustituyendo los datos en la ecuación ordinaria de la circunferencia.

$$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = (5)^2$$

**Paso 4:** Resolviendo el producto notable y organizando los términos

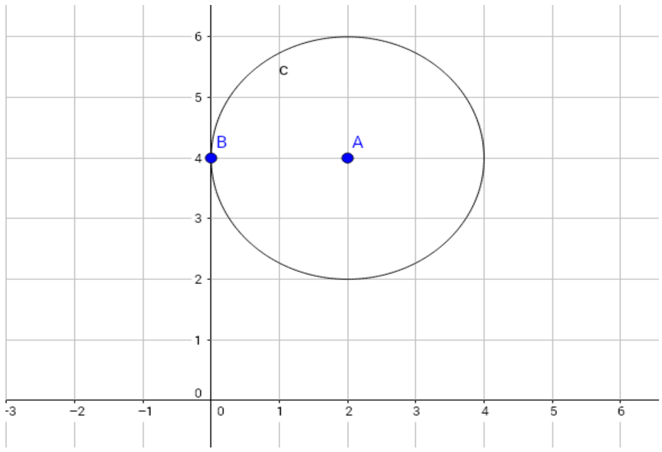
$$x^2 + y^2 - 12x + 6y - 25 + 36 + 9 = 0$$

**Paso 5:** Resolviendo las operaciones básicas, se obtiene la ecuación general.

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0}$$

## *Ejercicios Propuestos*

1) Dada la gráfica construye la ecuación general.




2) Escribe en forma canónica la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$

3) Indicar si la ecuación: $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$ corresponde a una circunferencia, y en caso afirmativo, calcular el centro y el radio.

4) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: A (2,0), B (2,3), C (1, 3).

5) Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de la rectas x + 3y + 3 = 0, x + y + 1 = 0, y su radio es igual a 5.

6) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la ecuación $x^2+y^2-6x-6=0$, y que pasa por el punto (-3,4).

7) Dadas las ecuaciones generales construye su gráfica

a) $x^2+y^2-18x+12y-40=0$

b) $x^2+y^2-8x-4y-10=0$

***Taller:* Demuestra lo que aprendiste**

***Instrucciones:***

*1. Ordenadamente los estudiantes deben formar 2 grupos, tratando en lo posible de que los mismos tengan la misma cantidad de integrantes.*

*2. Basados en el contenido impartido en lo Referente a Circunferencia, elaboren 4 preguntas que representaran los obstáculos que sus compañeros del grupo contrario deben superar en el laberinto, las mismas deben incluir definiciones, descripción de ecuaciones, resolución de ejercicios y utilidad práctica de la sección cónica.*

**Pregunta 1:**

______________________________________________

**Pregunta 2:**

______________________________________________

**Pregunta 3:**

______________________________________________

**Pregunta 4:**

______________________________________________

*3. Al finalizar ambos grupos deben escribir las preguntas en la pizarra para que sus compañeros del equipo contrario anoten y comiencen a resolver.*

**Respuesta 1:**

______________________________________________

______________________________________________

______________________

**Respuesta 2:**

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

_________________________

**Respuesta 3:**

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

_________________________

**Respuesta 4:**

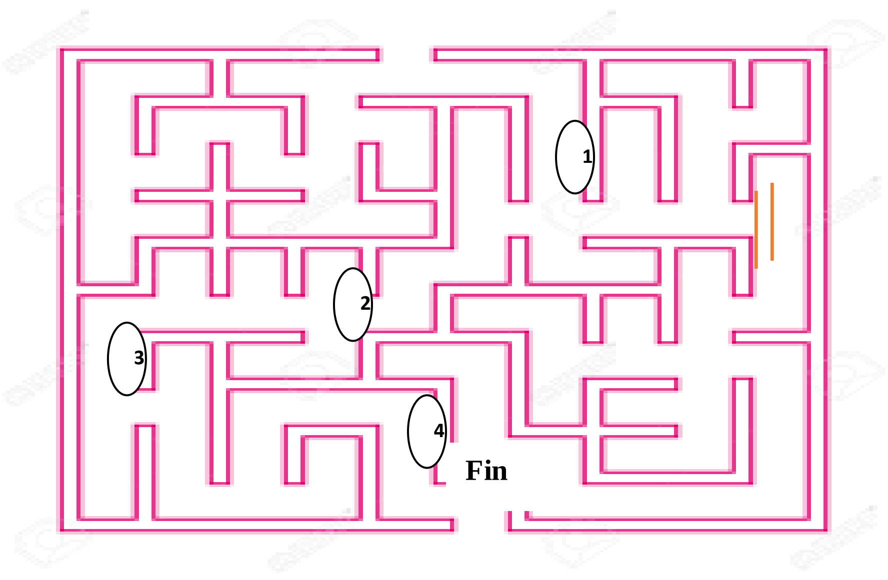
______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

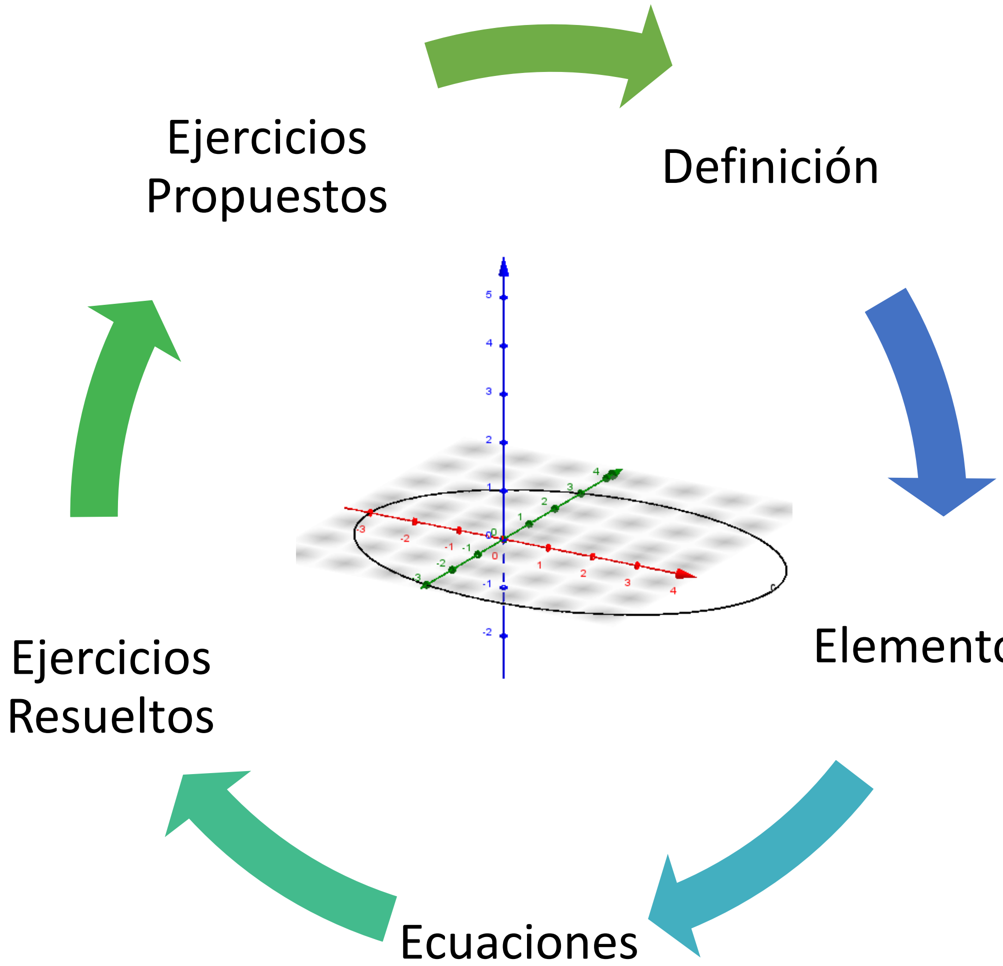
_________________________

*4. El equipo que resuelva de manera correcta y en el menor tiempo posible las preguntas cruza el laberinto y gana "+" que al final de se transformaran en puntos netos en la unidad.*

**Inicio**



# *A continuación... Elipse*



### *Pre- Requisitos:*

- Reconocer la ecuación general de la cónica.
- Establecer sistemas de ecuaciones y reducirlos.
- Desarrollar operaciones básicas (Producto notable, Despejes, factorización, entre otras)

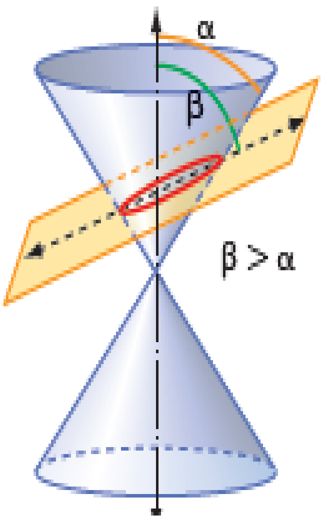
### *Objetivos:*

- Deducir la ecuación canónica y general de la Elipse, usando conceptos fundamentales de la matemática.
- Conocer y calcular los elementos de una elipse.
- Reconocer la ecuación de una elipse con ejes Paralelos a los ejes Coordenados
- Deducir la ecuación general de la elipse a partir de su gráfica en el plano.

## *Definición*

Conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos $F_1$ $y$ $F_2$, es una constante.

$$Elipse = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d(P,F_1) + d(P,F_2) = constante\}$$

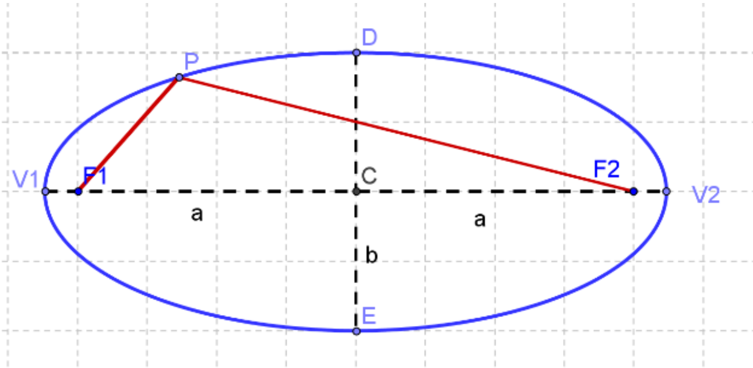



Excentricidad, de una cónica, es su grado de alargamiento, y se mide mediante un número, $e$, tanto mayor cuanto más alargada sea la cónica.

$$e = \frac{c}{a}$$

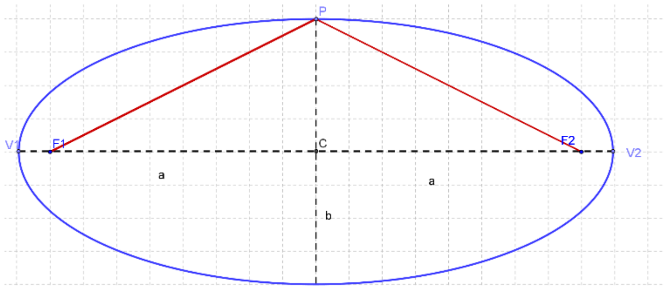
## *Elementos de la elipse*

- Vértices V1 y V2
- Focos F1 y F2
- Centro de la elipse $O(h,k)$
- Eje menor: 2b
- Eje mayor: 2a
- Distancia focal: 2c
- Semieje menor: b
- Semieje mayor: a
- Semidistancia focal: c




Cálculo de la longitud del eje menor $2b$

- $\overline{PF_1} = \sqrt{b^2 + c^2}$
- $\overline{PF_2} = \sqrt{b^2 + c^2}$




$$Elipse = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}$$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2a \rightarrow 2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a$$

$$\sqrt{b^2 + c^2} = a \rightarrow \ b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow \ b^2 = a^2 - c^2$$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (semieje menor)

La excentricidad de una elipse se obtiene así: $e = c/a$

Puesto que $c < a$ se verifica que $0 < e < 1$, es decir, la excentricidad de una elipse es un número comprendido entre 0 y 1.

## *Ecuación reducida de una elipse*

La ecuación de una elipse centrada en el origen, y con focos $\mathrm{F_1(-c,0)}$ y $\mathrm{F_2(c,0)}$, se puede obtener aplicando la definición:

$$|\mathrm{d(P,F_1) + (P,F_2)}| = 2\mathrm{a}$$

$$\sqrt{(\mathrm{x+c})^2 + (\mathrm{y})^2} + \sqrt{(\mathrm{x-c})^2 + (\mathrm{y})^2} = 2\mathrm{a}\ (\mathrm{I})$$

$$\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+(\mathrm{y})^2}-\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{c})^2+(\mathrm{y})^2}=\mathrm{f}\ (\mathrm{II})$$

Multiplique las expresiones (I) y (II)

$$(\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+(\mathrm{y})^2})^2-\left(\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{c})^2+(\mathrm{y})^2}\right)^2=2af$$

$$(x^2+2\mathrm{xc}+c^2+y^2)-(x^2-2\mathrm{xc}+c^2+y^2)=2af$$

$$x^2+2\mathrm{xc}+c^2+y^2-x^2+2\mathrm{xc}-c^2-y^2=2af$$

$$4xc=2af$$

$$f=\frac{2xc}{a}$$

Reemplazamos $\mathrm{f}$en (II) y sumando las expresiones (I) y (II):

$$2\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}=2a+\frac{2xc}{a}$$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$a^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2-\frac{x^2c^2}{a^2}+\ y^2=a^2+c^2$$

Resolviendo y dividiendo la expresión por $\mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

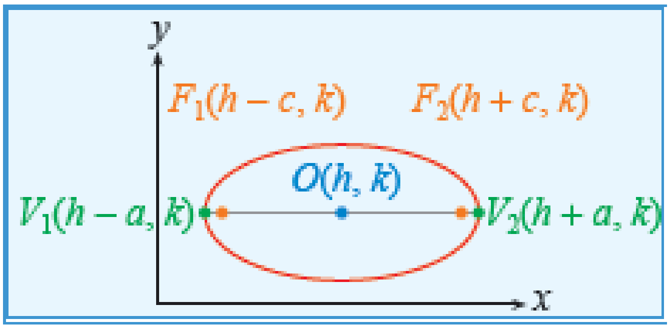
Remplazando $\mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2$ por $\mathrm{b}^2$, tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

## *Ecuación de una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados.*

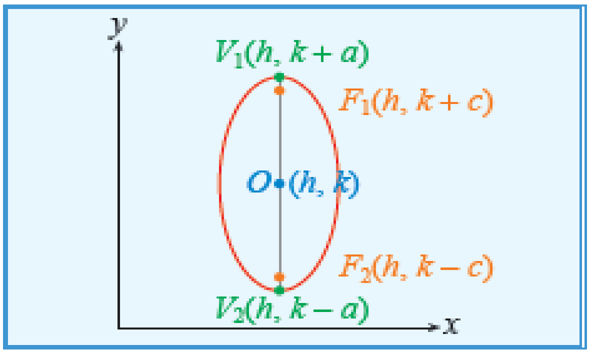
**Ecuación de una elipse con eje paralelo al Horizontal**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$




**Ecuación de una elipse con eje paralelo al Vertical**

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$




***OJO:*** *La diferencia entre ambas ecuaciones está en que se intercambian los términos $a^2$ y $b^2$ los cuales representa al semieje mayor y menor respectivamente.*

## *Ecuación general de la elipse*

Dado una ecuación del tipo $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$, donde A y B tienen el mismo signo, además $\mathrm{A,B,C,D,E,F}\ \in\mathbb{R}$, siendo $A\neq 0, B\neq 0$, éste puede transformarse en otro del tipo $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

***OJO:*** *Las ecuaciones de la elipse y la hipérbola son similares, se diferencian en que los signos son opuestos.*

## *Síntesis*

| | | |
|---|---|---|
| Constantes | | $2a = eje$ Mayor<br>$2b = eje$ Menor<br>$2a = eje\ focal$ |
| Ecuación General | | $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$<br>**Donde $A \neq B$, y ambos $\in R+$.** |
| Ecuación Ordinaria Canoníca Con Centro (0, 0) | **Eje focal paralelo al Eje horizontal** | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| | **Eje focal paralelo al Eje vertical** | $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ |
| Ecuación Ordinaria Con Centro $(h, k)$ | **Eje focal paralelo al Eje horizontal** | $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ |
| | **Eje focal paralelo al Eje vertical** | $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ |
| Longitud del lado Recto | | $Lr = \frac{2b^2}{a}$ |
| Excentricidad | | $e = \frac{c}{a} < 1$ |
| Relación entre Semiejes | | $c^2 = a^2 - b^2$ |
| Directrices | | $x = \pm\frac{a^2}{c} + h = 0$ **o** $y = \pm\frac{a^2}{c} + k = 0$ |

# Claves: Elipse

**1. Para identificar con rapidez la ecuación general de la Elipse debes observar el valor que poseen los términos A y B, los cuales siempre serán diferentes pero positivos. Observa:**

$$16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$$

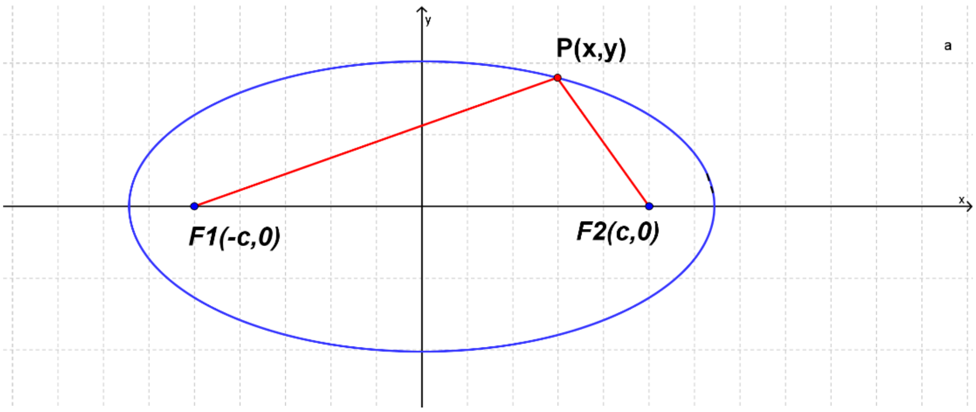
$$3x^2 + 5y^2 - 9x - 19y - 26 = 0$$

$$\boldsymbol{x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0}$$

**2. Las ecuaciones reducidas de la elipse y la hipérbola son similares, se diferencian en que los signos de la ecuación de la elipse son positivos.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**3. Ten en cuenta identificar correctamente los semiejes y los focos de la elipse en la imagen se puede observar los focos *F* y *F´*, el Centro *O*, Eje mayor, *AA´*, Eje menor, *BB´*, Distancia focal, *OF.***



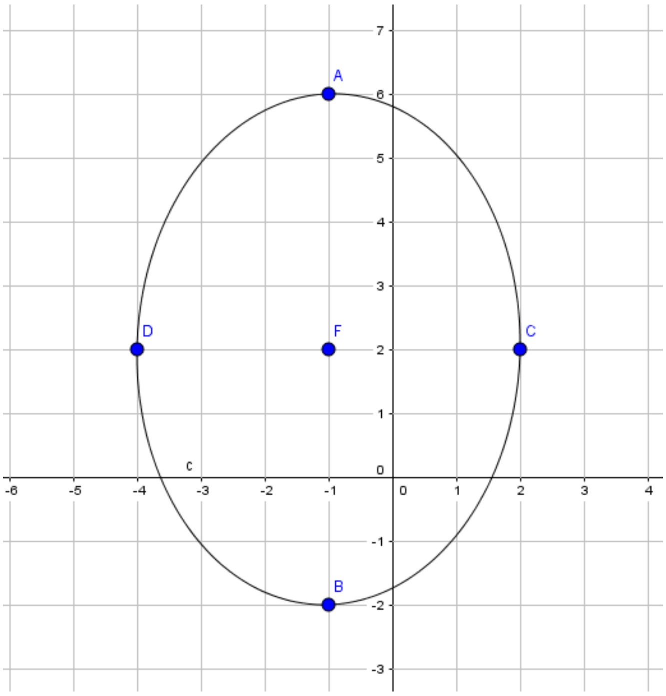

# Momento tecnológico

https://www.youtube.com/watch?v=Hf-Mown3aOE

https://www.youtube.com/watch?v=PlYY_qvSX2s

## *Ejercicios resueltos*

### 1. Dada su gráfica, hallar su ecuación general:




**Solución**

**Paso 1:** Datos observados en la gráfica C (-1,2), a=4, b=3

**Paso 2:** Se sustituyen los datos en la ecuación ordinaria

$$\frac{(x-(-1))^2}{(3)^2}+\frac{(y-2)^2}{(4)^2}=1$$

**Paso 3:** Resolviendo el producto notable y las potencias

$$\frac{x^2+2x+1}{9}+\frac{y^2-4y+4}{16}=1$$

**Paso 4:** Aplicando el M.C.M.

$$16x^2 + 32x + 16 + 9y^2 - 36y + 36 = 144$$

**Paso 5:** Resolviendo las operaciones correspondientes y ordenando los términos se tiene:

$$16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$$

**2) Dada la ecuación general $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$, hallar su gráfica con todos sus elementos.**

**Solución**

**Paso 1:** Se agrupan los términos semejantes

$$(x^2 + 2x) + (4y^2 - 24y) = -33$$

**Paso 2:** Completando cuadrados

$$(x^2 + 2x + 1) + 4\,(y^2 - 6y + 9) = 4$$

**Paso 3:** Factorizando

$$(x + 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 4$$

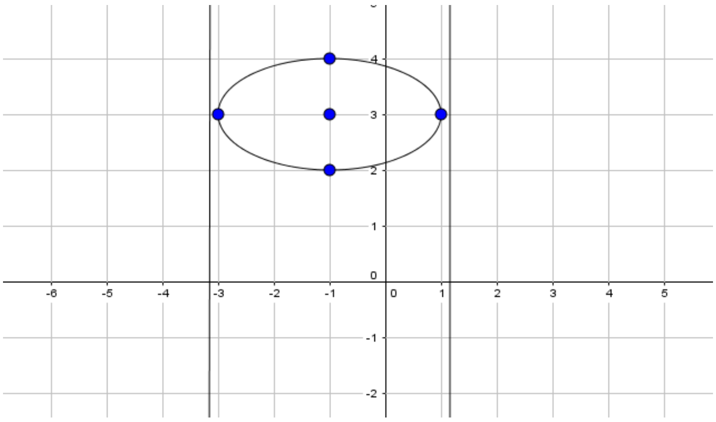
**Paso 4:** Igualando a la unidad

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

**Paso 5:** Extrayendo centro y ejes de la ecuación ordinaria

$$C\ (-1,3),\ a = 2,\quad b = 1$$

**Respuesta:** La elipse tiene centro en (-1,3), sus semiejes son $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$, $c = \sqrt{3}$ mientras que sus directrices son $\sqrt{3x - (4 - \sqrt{3}) = 0}$ y $\sqrt{3x + (4 + \sqrt{3}) = 0}$



**3. Dadas las ecuaciones generales $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ y $9x^2 + y^2 + 9y - 9 = 0$, hallar el o los puntos de intersección y su gráfica:**

**Solución**

**Paso 1:** Calcular el o los puntos de intersección, estableciendo un sistema de ecuación.

$x^2 + 9y^2 - 9 = 0$

$9x^2 + y^2 - 9 = 0$

**Paso 2:** Reducir los términos.

$-\cancel{9x^2} - 81y^2 = -81$

$9x^2 + y^2 = 9$

---

**Paso3:** Despejando.

$-80y^2 = -72$

**Paso 4:** Hallar el valor de la y.

$$y = \pm\sqrt{\frac{9}{10}}$$

**Paso 5:** Sustituir en $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ lo valores de obtenidos de *y* para obtener *x*

$$y = -\sqrt{\frac{9}{10}}\ ; y = \sqrt{\frac{9}{10}}$$

**Paso 6:** Resolver la ecuación de segundo grado, para obtener los cuatro puntos de intersección

$$x^2 + 9\left(\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 - 9 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$\boldsymbol{A}\left(\sqrt{\frac{9}{10}},\sqrt{\frac{9}{10}}\right)\ \boldsymbol{B}\left(\sqrt{\frac{9}{10}},-\sqrt{\frac{9}{10}}\right)\ \boldsymbol{C}\left(-\sqrt{\frac{9}{10}},\sqrt{\frac{9}{10}}\right)\ \boldsymbol{D}\left(-\sqrt{\frac{9}{10}},-\sqrt{\frac{9}{10}}\right)$$

**Paso 7:** Para calcular los elementos de la elipse 1, se iguala el término independiente.

$$x^2 + 9y^2 = 9$$

**Paso 8:** Se halla la ecuación ordinaria

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

**Paso 9:** Se extrae el centro y ejes de la ecuación ordinaria.

*C (0,0) a=3, b=1*

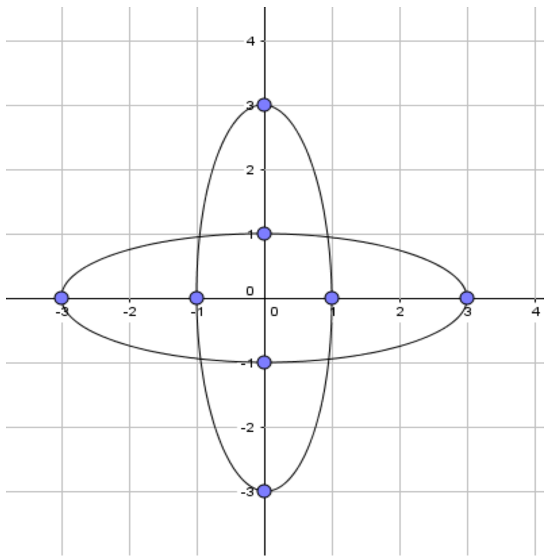
**Paso 10:** Para calcular los elementos de la elipse 2, se iguala el término independiente.

**Paso 11:** Se halla la ecuación ordinaria

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$$

**Paso 12:** Se extrae el centro y ejes de la ecuación ordinaria.

*C (0,0) a=1, b=3*



**4. La altura máxima de un auditorio cuyo techo tiene forma semielíptica es de 8m y tiene 20m de longitud. Si cae una pelota sobre un foco, el ruido que produce se escucha claramente en el otro foco. ¿A qué distancia está un foco del otro?**

**Solución**

**Paso 1**: Utilizar la formula Pitagórica que relaciona los tres semiejes.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Paso 2**: Sustituyendo los valores

$$c = \sqrt{(8)^2 + (10)^2}$$

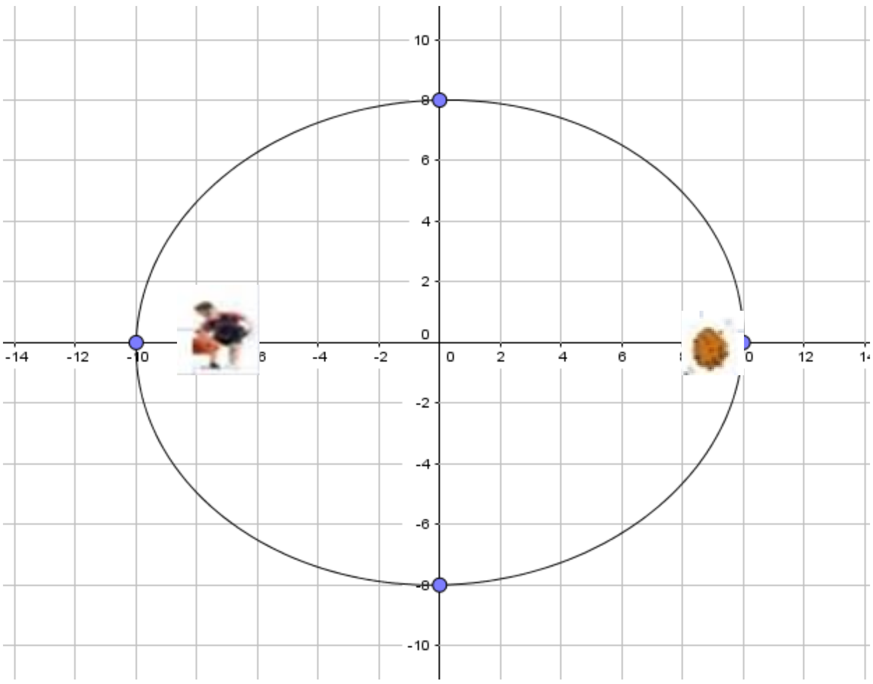
**Paso 3**: Distancia del semieje focal

$$c = 6$$

**Paso 4**: Distancia del eje focal

$$2c = 12$$

**Respuesta:** La distancia de un foco al otro es de 12m.



## *Ejercicios propuestos*

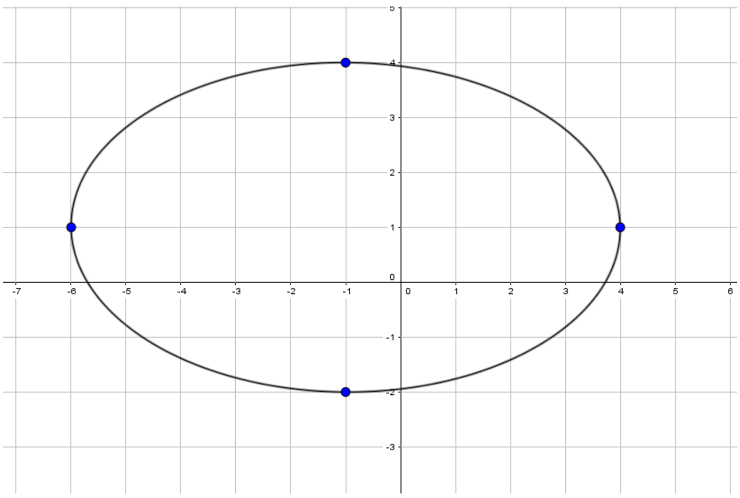
1. Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (Indique todo sus elementos).

a. $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$

b. $9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$

2. Si los focos de una elipse son los puntos $F_1$= (-4,3), $F_2$= (2,3) y el perímetro del triángulo cuyos vértices son los focos y un punto de la elipse, es igual a 16, determine la ecuación de la elipse.

3. Dada la gráfica construye la ecuación general.



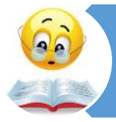
4. Dadas las ecuaciones generales construye la elipse y todos sus elementos.

a) $3x^2+ 4y^2- 30x – 16y + 79 = 0$

b) $9x^2+ 25y^2+ 18x – 50y - 191 = 0$

5. Encuentra los puntos de intersección de la elipse $9x^2 + 16y^2- 2 = 0$ con la recta $3x + 4y = 0$.

6. Un objeto se mueve en forma elíptica alrededor de un punto fijo que está en uno de los focos de la elipse. Si la excentricidad es de 0,5 y el eje mayor de la elipse es de 8m, encuentra la distancia máxima a la que se puede encontrar el objeto del punto fijo.

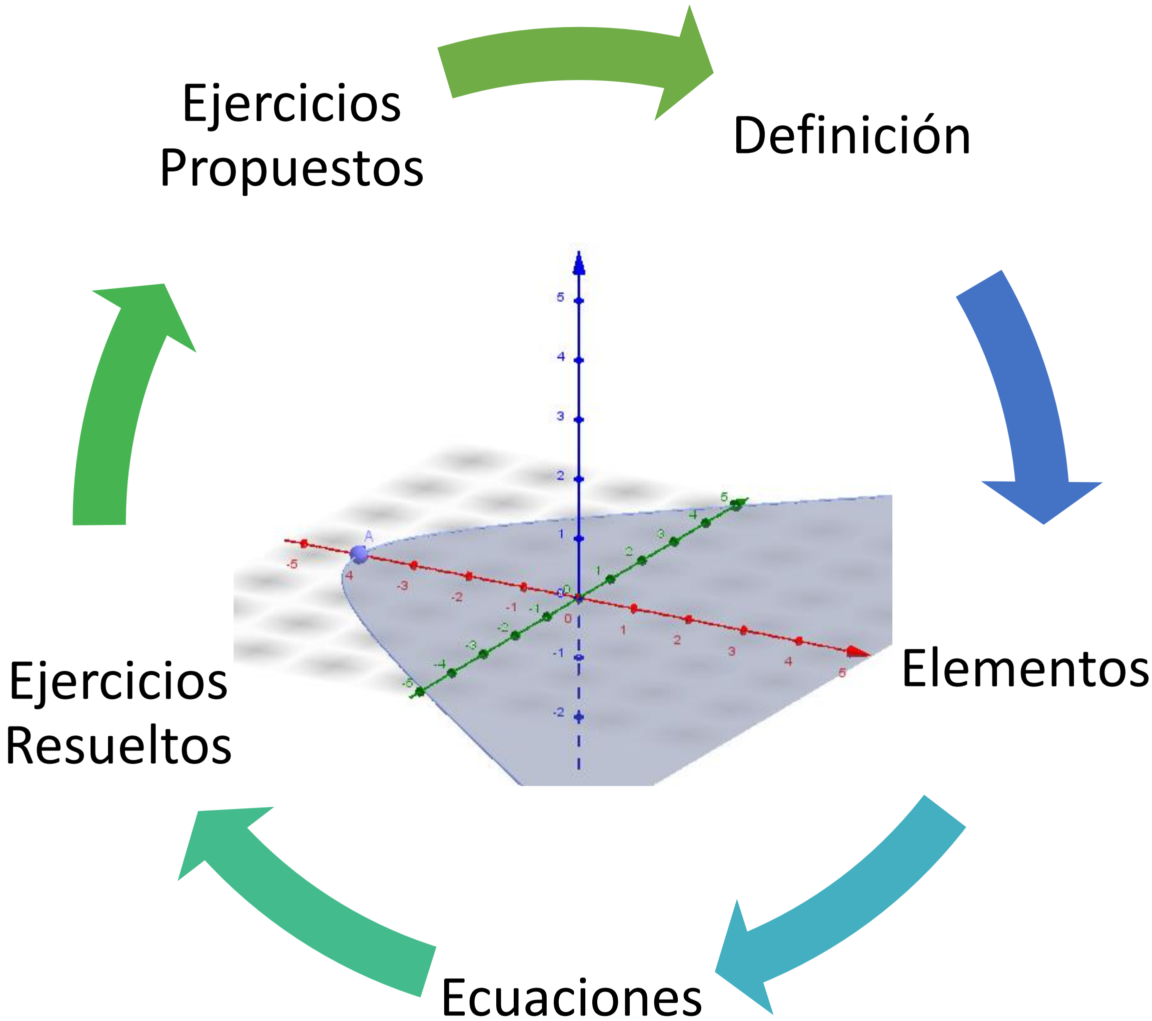


## *Taller: Encontrando Coincidencias*

***Instrucciones:***

- *Cada estudiante en su pupitre y de manera discreta debe recrear una elipse utilizando cartón o cartulina, colores y juego geométrico, para ello debe utilizar valores de a y b inventados por el mismo. Seguidamente calcular su ecuación General e identificarla en dicha elipse.*
- *Al finalizar de manera ordenada harán pasar entre sus compañeros la elipse ya terminada, con la finalidad de encontrar las elipses que mayor parentesco tengan.*
- *Al encontrar las similitudes deben entregarlas al docente para que el mismo verifique y los declare ganadores absolutos, obteniendo "+" que al final se sumaran para obtener puntos netos en la unidad.*

## *A continuación... Parábola*



## *Pre- Requisitos:*

- Reconocer la ecuación general de la cónica.
- Establecer sistemas de ecuaciones y reducirlos.
- Desarrollar operaciones básicas (Producto notable, Despejes, factorización, entre otras)

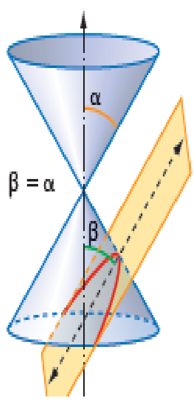
## *Objetivos:*

- Deducir la ecuación canónica y general de la parábola, usando conceptos fundamentales de la matemática.
- Conocer los elementos de una parábola.
- Desarrollar destrezas para el cálculo de los elementos de una parábola.
- Deducir la ecuación general de la parábola a partir de su gráfica en el *plano.*

## *Definición*

El conjunto de todos los puntos P(x,y) en el plano que equidistan de un punto fijo $\mathrm{F_o}$ y de una recta fija L. El punto $\mathrm{F_o}$ es denominado foco de la parábola; la recta L es la directriz de la parábola.

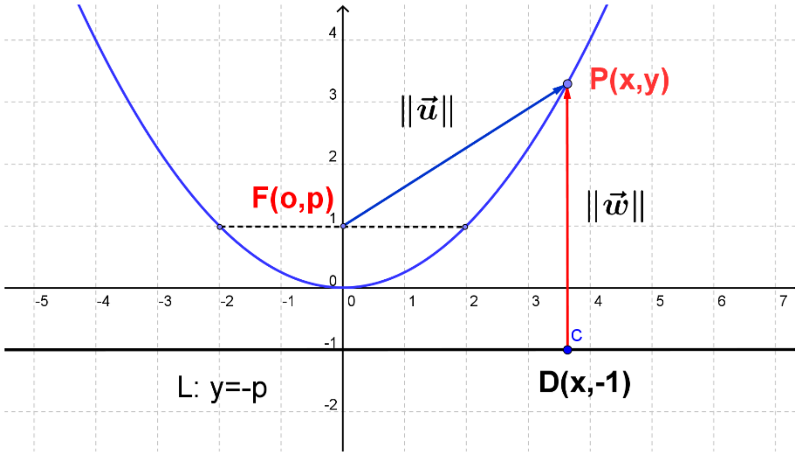
$$Parábola = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d(P,F_o) = d(P,L)\}$$



## *Elementos de la parábola*

Elementos de la parábola:

- Vértice
- Recta directriz
- Parámetro p
- Lado recto =4p




## *Ecuación reducida de la parábola*

Se supondrá que el vértice es el origen de coordenadas y que el foco se encuentra en el semieje positivo de las ordenadas.

En este caso, la directriz es una recta horizontal $L$ de ecuación $y = -p$, o sea, $y + p = 0$

Dado el punto $P(x, y)$ del plano, su distancia al foco $F_0 = (0, p)$ es $d(P, F_0) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$.

La distancia del punto $P$ a la recta es de $d(P, L) = |y + p|$.

La condición para que el punto $P$ pertenezca a la parábola, es que ambas distancias coincidan:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Elevado al cuadrado:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 - 2py = 2py$$

La ecuación de esta parábola, con vértice en el origen de coordenadas V(0,0) y foco en el punto $F_0(0,p)$, es: $x^2 = 4py$

Basándose en la deducción realizada, existe otros tres casos elementales de paraábolas:

- Si el eje de simetria es vertical y el foco está en el semieje negatico de las ordenadas $F_0(0,-p)$, la ecuación es: $x^2 = -4py$

- Si el eje de simetría es horizontal y el foco está en el semieje positivo de las abcisas $F_0(p,0)$, la ecuación es: $y^2 = 4px$

- Si el eje de simetría es horizontal y el foco está en el semieje negativo de las abcisas $F_0(-p,0)$,la escuación es: $y^2 = -4px$

## *Ecuación general*

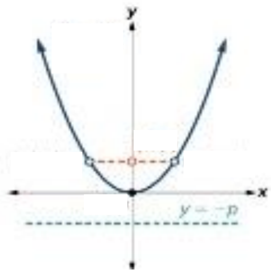
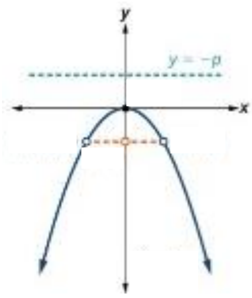
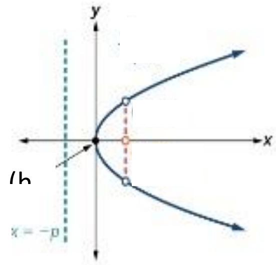
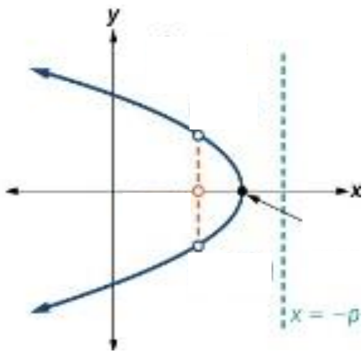
Se tiene la ecuación general de la parábola que se obtiene desarrollando distributivas y productos notables e igualando a cero, quedando generalizada siguiente manera:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Pero con la condición necesaria de que $A = 0$ ó $B = 0$,

$$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad ó \qquad By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

## *Ecuación de la parábola con en el punto V (h,k)*

| Coordenadas de foco | Recta directriz | Forma canónica | Gráfica |
|---|---|---|---|
| $F_0\,(h\,,k+p)$ | $L: y = k - p$ | $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ |   |
| $F_0\,(h\,,k-p)$ | $L: y = k + p$ | $(x-h)^2 = -4p\,(y-k)$ |   |
| $F_0\,(h+p,\,k)$ | $L: x = h - p$ | $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$ |   |
| $F_0\,(h-p,\,k)$ | $L: x = h + p$ | $(y-k)^2 = -4p\,(x-h)$ |   |

## *Síntesis*

| Constantes | | $p = parámetro$ |
|---|---|---|
| Ecuación General | | $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$<br>Donde $A$ =0 y $B$ =0. |
| Ecuación Ordinaria Canonía (0,0) | **Eje focal paralelo al eje horizontal** | $x^2 = 4py$ |
| | **Eje focal Paralelo al eje vertical** | $y^2 = 4px$ |
| Ecuación Ordinaria Con Centro V $(h, k)$ | **Eje focal paralelo al eje horizontal** | $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ |
| | **Eje focal Paralelo al eje vertical** | $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ |
| Longitud del lado Recto | | $Lr = 4p$ |
| Excentricidad | | $e = 1$ |
| Directrices | | $x + (h \pm p) = 0$ |
| | | $y + (k \pm p) = 0$ |

# Claves: Parábola

**1. Para identificar con rapidez la ecuación general de la parábola debes observar el valor que poseen los términos A y B, los cuales cumplen con la condición necesaria de que $A = 0$ ó $B = 0$. De esta manera la ecuación queda determinada por una y solo una variable cuadrática $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$ ó $By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Observa:**

$$y^2 - x - 4y + 6 = 0$$

$$y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$$

$$x^2 + 2x + 4y - 7 = 0$$

$$2x^2 + 8x + 3y - 5 = 0$$

**2. El sentido de la concavidad quede determinada por la variable cuadrática, es decir si la variable cuadrática es $x^2$ la parábola abrirá en *y*, si la variable cuadrática es $y^2$ abrirá en x. por su parte el signo de el parámetro es el que indica la dirección (derecha +, izquierda -, arriba +, abajo-). Observa:**

# Momento tecnológico

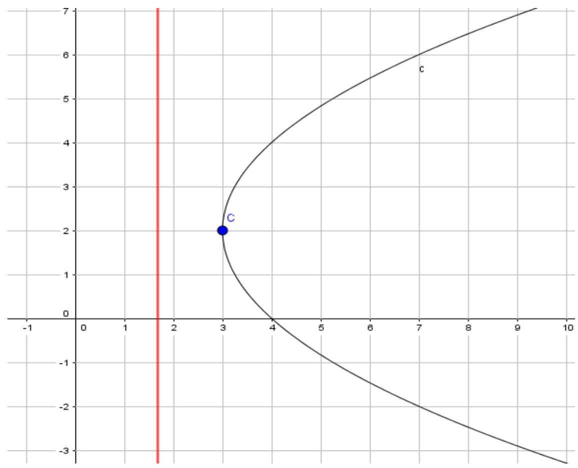
**https://www.youtube.com/watch?v=_YOPO4mtl_s**

**https://www.youtube.com/watch?v=VI5pgAzVJLI**

**https://www.youtube.com/watch?v=A7Obz6Fvsoc**

## Ejercicios resueltos

### 1. Dada la gráfica encontrar su ecuación general.



**Solución**

**Paso 1:** Se extraen datos de la gráfica.

$V(3,2)$ Directriz $x = \frac{7}{4}$

**Calcular el Parámetro.**

**Paso 2:** Sustrayendo la abscisa en cada miembro de la directriz

$$x - 3 = \frac{7}{4} - 3$$

**Paso 3:** Corresponde al parámetro

$$x - 3 + \frac{5}{4} = 0$$

**Paso 4:** El parámetro de la parábola es

$$p = \frac{5}{4}$$

**Paso 5:** Sustituyendo en la ecuación ordinaria

$$(y-2)^2 = 4\left(\frac{5}{4}\right)(x-3)$$

**Paso 6:** Desarrollando el producto notable y las operaciones pertinentes

$$y^2 - 5x - 4y + 19 = 0$$

**Respuesta:** La ecuación general de la parábola $y^2 - 5x - 4y + 19 = 0$

### 2. Dada la ecuación general $x^2 + 2x + 4y - 7 = 0$ , encontrar su grafica.

**Solución**

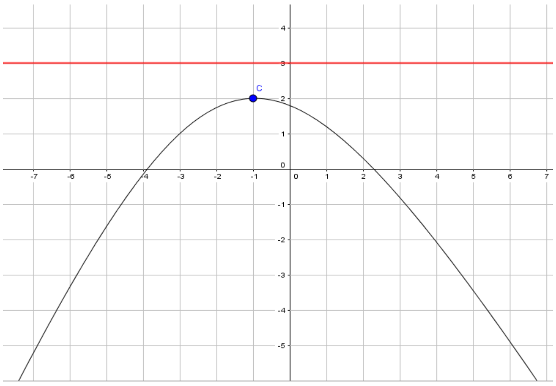
**Paso 1:** Agrupando términos semejantes y completando cuadrados

$$x^2 + 2x + 1 = -4y + 7 + 1$$

**Paso 2:** Desarrollando la factorización y las operaciones básicas

$$(x+1)^2 = -4(y-2)$$

**Paso 3:** El vértice de la parábola es $V\ (-1,2)$ y la directriz es paralela al eje de las abscisas.



**Paso 4:** Se calcula la directriz de la parábola extrayendo el valor del parámetro

$$4p = -4$$

**Paso 5:** Ecuación de la directriz

$$y - 2 - 1 = 0$$

**Paso 6:** Desarrollando las operaciones básicas se obtiene que la directriz de la parábola es $y = 3$

**3. Hallar la ecuación de la parábola cuya directriz es y = -6 y su foco (0, 6).**

**Solución**

a) Como el foco y la directriz están a la misma distancia del origen se puede utilizar la ecuación reducida que, al ser la directriz horizontal, es de forma $x^2 = 2py$ con $p = 2 \times 6 = 12$.

**Respuesta:** Su ecuación es $x^2 = 24y$.

**4. Hallar la ecuaciones de las parábolas cuyo vértice su vértice (2, 0) y su foco (6, 0).**

**Solución:**

**Paso 1:** Para hallar las ecuaciones de las parábolas cuyo vértice no coincide con el origen de coordenadas se parte de igualdad: $d = (X, F) = d\ (X, recta\ directriz)$.

**Paso 2:** Para calcular la directriz hay que tener en cuenta que la distancia de vértice, V= (2,0), al foco, F = (6, 0), es de 4 unidades. Como la distancia de vértice a la directriz es la misma que la del vértice al foco, se concluye que la directriz es la recta *x* = -2

**Paso 3:** Teniendo en cuenta la igualdad *d (X, F)* = d (x, recta directriz), se tiene, $\sqrt{(x-6)^2+y^2}=x+2$.

**Paso 4:** Elevando al cuadrado y realizando operaciones, se obtiene:

$$x^2-12x+36+y^2 = x^2+4x+4$$

**Respuesta:** Su ecuación es $y^2=16x-32$

**5. Determine la ecuación canónica de la parábola 2x$^2$+8x+3y-5=0, encontrando su vértice, foco y ecuación de la recta directriz**

**Solución:**

**Paso 1:** Plantear la ecuación

$$2x^2+8x+3y-5=0$$

**Paso2:** Despejar

$$2x^2+8x=5-3y$$

**Paso3:** M.C.M

$$2(x^2+4x)=5-3y$$

**Paso 4:** Sumar 4 a cada lado de la igualdad

$$(x^2+4x+4)=\frac{5}{2}-\frac{3y}{2}+4$$

**Respuesta:** ecuación canónica

$$(x+2)^2=\frac{-3}{2}\left(y-\frac{13}{3}\right)$$

De acuerdo a la ecuación canónica:

Vértice: V: $\left(-2,\frac{13}{3}\right)$

$$4p=\frac{3}{2}$$

$$p=\frac{3}{8}$$

## Ejercicios propuestos

1) Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (Indique todos sus elementos).

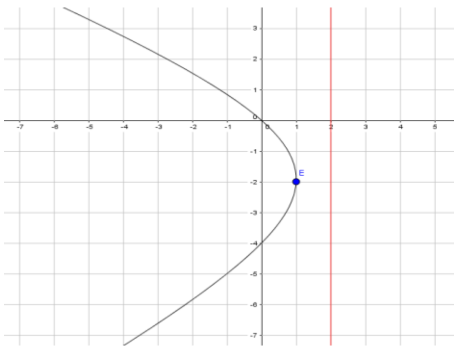
$$a.\, x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$$b.\, 2y^2 - 2x - 2y + 9 = 0$$

$$c.\, y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$$

$$d.\, -x^2 - 4x - 6y + 17 = 0$$

2) Dada la gráfica, encuentra su ecuación general.



3) Dada la ecuación $x^2 + 4x - y - 6 = 0$, grafica con todos sus elementos.

4) Encontrar los puntos de intersección de las siguientes curvas $y2 - 6x - 18 = 0$ y $x2 + y2 - 5 = 0$.

5) Determine la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta definida por y =1, contiene al punto (0,3) y la menor distancia entre la parábola y la directriz es igual a 2.

6) Determine la ecuación canoníca de la parábola donde la recta directriz tiene la ecuación $y + 2 = 0$ y los extremos de lado recto son los puntos $A(0,2) y\ B(8,2)$.

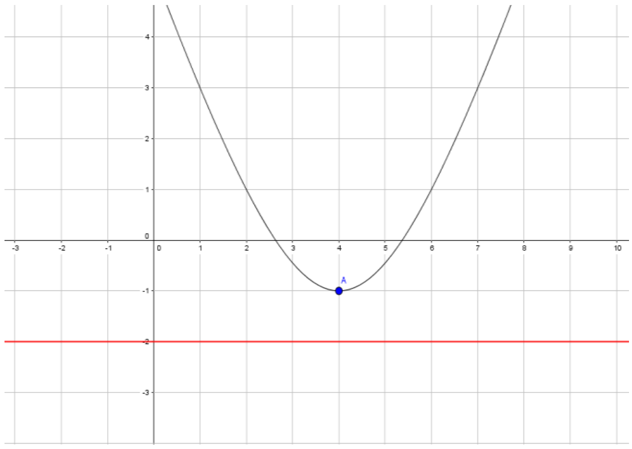
7) Encuentre la de la parábola que contiene los puntos: $(0,0), (1,-1), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

# *Taller: Directriz perdida*

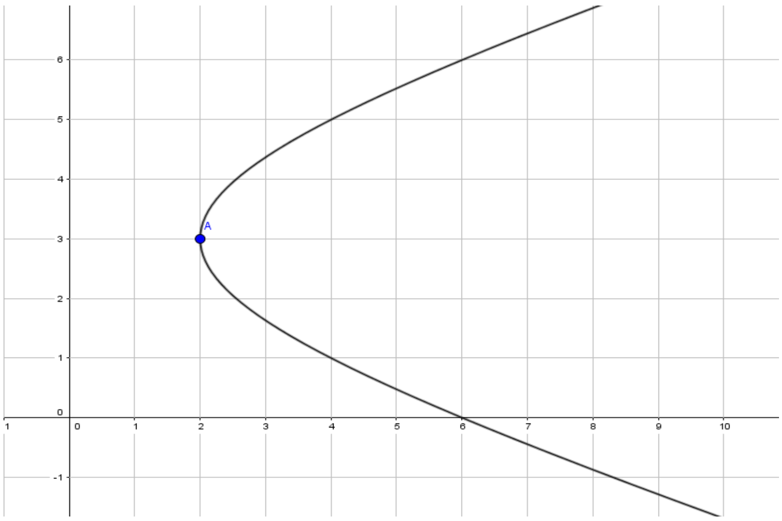
**Instrucciones:**

- *Cada estudiante en su pupitre y de manera discreta debe dibujar la directriz en uno de los casos planteados, según el ejemplo dado, a partir de allí extraer datos de la gráfica (vértice y directriz) y calcular su ecuación general e identificar sus elementos. De terminar en un corto tiempo y de manera correcta el ejercicio estarás ganando "+" que al final se transformaran en puntos*

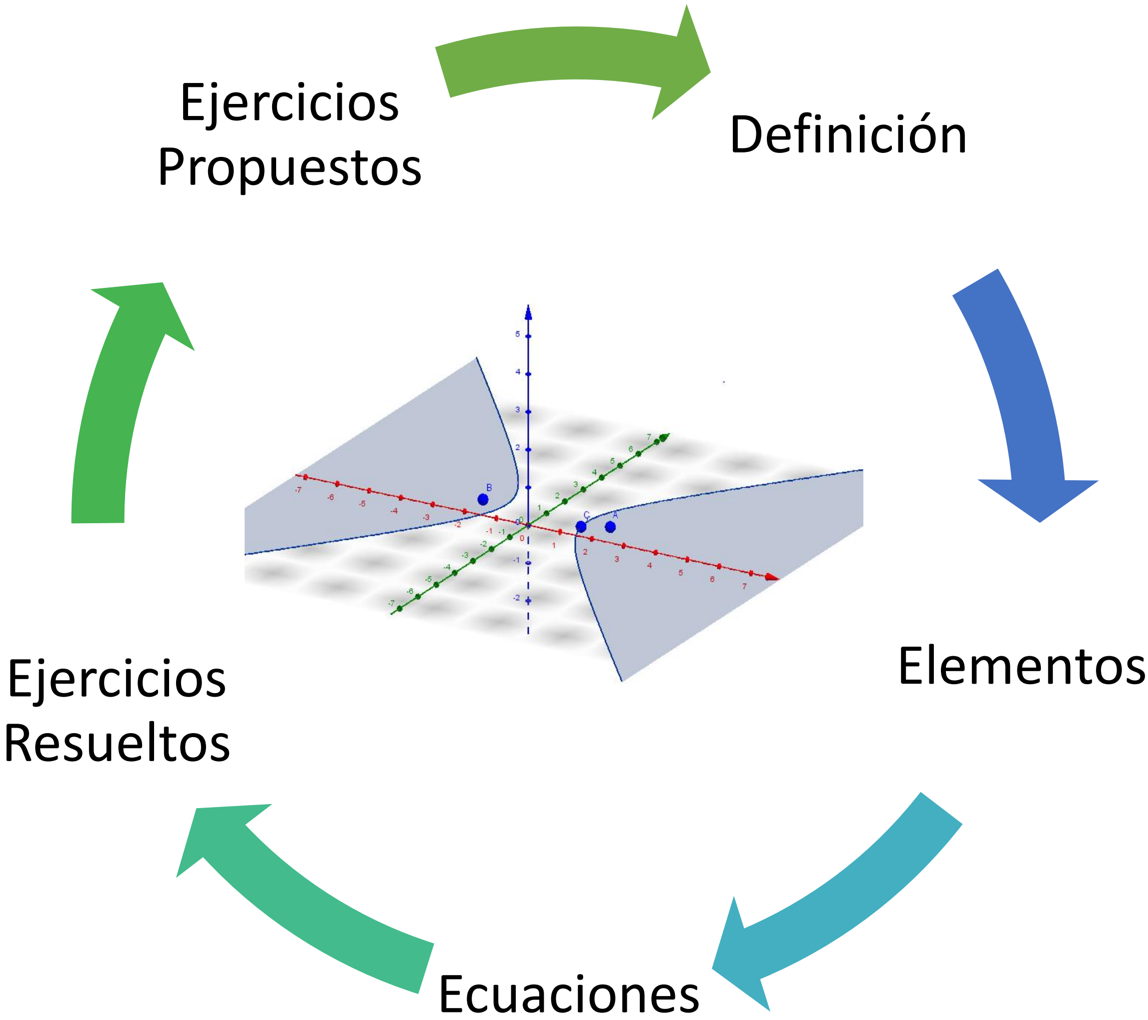
**Ejemplo:** ***V (4, -1)*** **Directriz: y = -2**




**Caso :** *Dibujar directriz según parecer del estudiante, a partir de allí extraer datos y calcular su ecuación general y elementos de la misma.*



# *A continuación... Hipérbola*



| **Secciones Cónicas** | *Capítulo V: Hipérbola.* |
|---|---|

## ***Pre- Requisitos:***

- Reconocer la ecuación general de la cónica.
- Establecer sistemas de ecuaciones y reducirlos.
- Desarrollar operaciones básicas (Producto notable, Despejes, factorización, entre otras)

## ***Objetivos:***

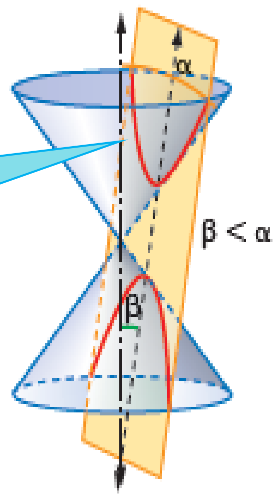
- Deducir la ecuación canónica y general de la hipérbole, usando conceptos fundamentales de la matemática.
- Conocer y calcular los elementos de una hipérbole.
- Reconocer la ecuación de una hipérbole con ejes Paralelos a los ejes Coordenados
- Deducir la ecuación general de la hipérbole a partir de su gráfica en el plano.

## *Definición*

Conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos $F_1$ y $F_2$, es constante.

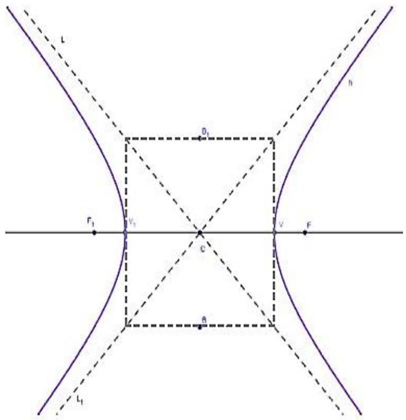
$$Hpérbola = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = constante\}$$

El cociente $e = \frac{c}{a}$, que es un número mayor que 1, se denomina excentricidad de la hipérbola



# Elementos de la hipérbola

- Centro: C(0, 0)
- Coordenadas de sus vértices: V(0, a) y V´(0, -a)
- Coordenadas de los extremos del eje conjugado: B(b, 0) y B´(-b, 0)
- Coordenadas de sus focos: F(0, c) y F´(0, -c)
- Longitud del eje transverso: VV´= 2a
- Longitud del eje conjugado: BB´=2b
- Longitud de cada lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x$



# Ecuación reducida de la hipérbola

La ecuación de una hipérbola centrada en el origen, y con foco en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, se puede obtener aplicando la definición:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \ (se\ supondrá\ que\ d(P, F_1) > d(P, F_2))$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} = 2a(I)$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} = f(II)$$

Multiplicando las expresiones (I) y (II):

$$\left(\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x - c)^2 + (y)^2}\right)^2 = 2af$$

$$(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) - (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = 2af$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 = 2af$$

$$4xc = 2af$$

$$f = \frac{2xc}{a}$$

Reemplazando $f$ en (II) y sumando las expresiones (I) Y (II):

$$2\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} = 2a + \frac{2xc}{a}$$

Simplificando y elevado al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$c^2 - a^2 = \frac{x^2c^2}{a^2} - x^2 - y^2$$

$$c^2 - a^2 = x^2\left[\frac{c^2}{a^2} - 1\right] - y^2$$

$$x^2\left[\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right] - y^2 = c^2 - a^2$$

Resolviendo y dividiendo la expresión $c^2 - a^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

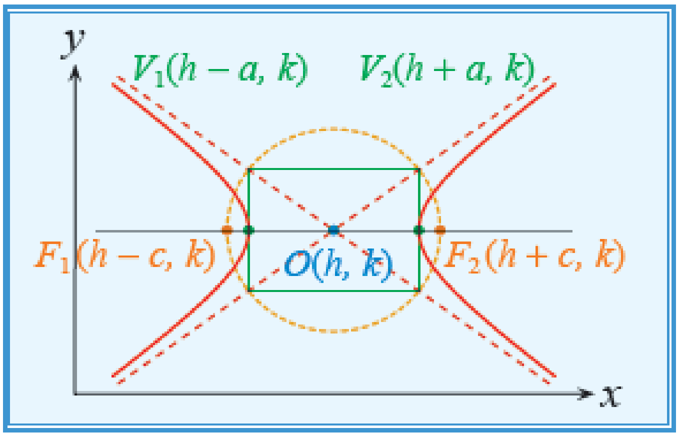
Reemplazando $c^2 - a^2$ por $b^2$, tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

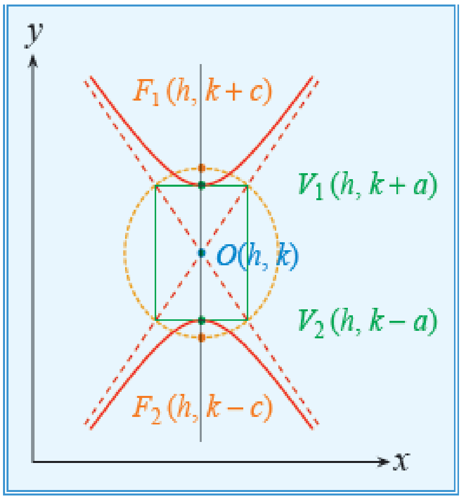
## *Ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes coordenados.*

**Ecuación de una Hipérbola con eje paralelo al horizontal y vertical**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$




$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



## *Ecuación general*

La ecuación general de la hipérbola de la siguiente manera:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Pero con la condición necesaria de A ≠ B son de distinto signos y diferentes de cero

## *Síntesis*

| | | |
|---|---|---|
| Constantes | | $2a = eje\ transverso$<br>$2b = eje\ conjugado$<br>$2a = eje\ focal$ |
| Ecuación General | | $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$<br>Donde $A$ y $B$, son de ≠ signos. |
| Ecuación Ordinaria Canoníca | **Eje focal paralelo al Eje horizontal** | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| | **Eje focal paralelo al Eje vertical** | $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ |
| Ecuación Ordinaria Con Centro $(h, k)$ | **Eje focal paralelo al Eje horizontal** | $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ |
| | **Eje focal paralelo al Eje vertical** | $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ |
| Longitud del lado Recto | | $Lr = \frac{2b^2}{a}$ |
| Excentricidad | | $e = \frac{c}{a} > 1$ |
| Relación entre Semiejes | | $c^2 = a^2 + b^2$ |
| Ecuación de las Asíntotas | | $\frac{x-h}{a} \pm \frac{y-k}{b} = 0$ |
| | | $\frac{y-k}{a} \pm \frac{x-h}{b} = 0$ |

# *Claves: Hipérbola*

**1. Para identificar con rapidez la ecuación general de la Hipérbola debes observar el valor que poseen los términos A y B, los cuales siempre serán diferentes y de signo contrario. Observa:**

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 16 = 0$$

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 11 = 0$$

$$2x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

**2. La ecuación reducida de la hipérbola es similares a la de elipse, se diferencian en que los signos de la ecuación de la Hipérbola son diferentes.**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

# *Momento tecnológico*

**https://www.youtube.com/watch?v=yBTdSYYUHow**
**https://www.youtube.com/watch?v=ZrdbCg_cqW4**
**https://www.youtube.com/watch?v=Zg1ASF3C6uc**

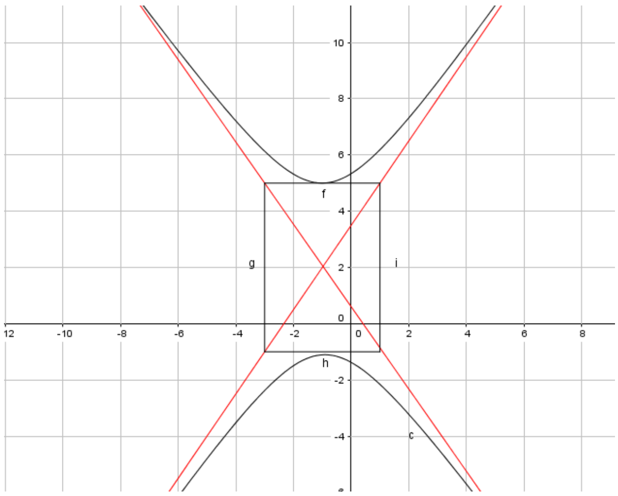
## Ejercicios resueltos

**1) Dada su gráfica, encontrar su ecuación general de la hipérbola y de sus asíntotas.**

**Solución**

**Paso 1:** Extraer datos observados en la gráfica

$$c(-1,2), a = 3, b = 2$$




**Paso 2:** Se sustituyen los datos en la ecuación ordinaria

$$\frac{\left(y-(2)\right)^2}{(3)^2} - \frac{\left(x-(-1)\right)^2}{(2)^2}$$

**Paso 3:** Resolviendo el producto notable y las potencias

$$\frac{(y^2-4y+4)}{9} - \frac{(x^2-2x+2)}{4} = 2$$

**Paso 4:** Aplicando el M.C.M.

$$4y^2 + \ 16y + 16 - 9x^2 - 18x - 18 = 36$$

**Paso 5:** Resolviendo las operaciones correspondientes y ordenando los términos se obtiene la ecuación general

$$4y^2 - 9x^2 + \ 16y - 18x - 38 = 0$$

**Respuesta:** $4y^2 - 9x^2 + \ 16y - 18x - 38 = 0$

**Paso 6:** Calculando las asíntotas de la hipérbola, igualando a cero la ecuación y determinando la raíz cuadrada de cada fracción.

$$\frac{y-2}{3} \pm \frac{x-1}{2} = 0$$

**Paso 7:** Despejando e igualando al término independiente.

$$3x + 2y = 1 \quad y \quad 3x + 2x = 7$$

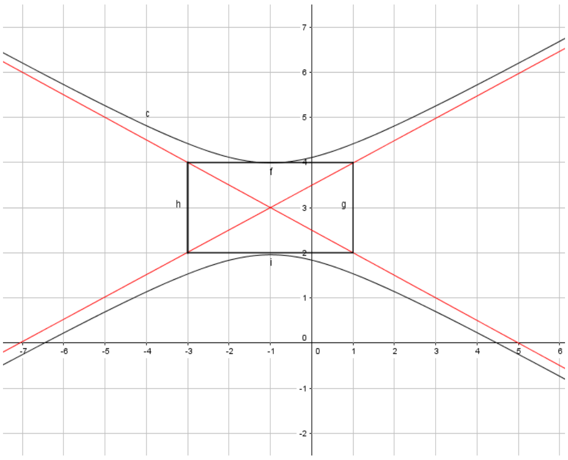
Resultado las ecuaciones de las asíntotas son $\boldsymbol{L}$: $\mathbf{3x + 2y = 1}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{L1}$: $\mathbf{3x + 2x = 7}$

**2) Dada la ecuación general $x^2 - 4y^2 + 2x + 24y - 31 = 0$, hallar su gráfica.**

**Solución**

**Paso 1:** Agrupamos los términos semejantes

$$(x^2 + 2x) - (4y^2 - 24y) = 31$$



**Paso 2:** Completando cuadrados

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = -4$$

**Paso 3:** Factorizando

$$4(y-3)^2 - (x+1)^2 = 4$$

**Paso 4:** Igualando a la unidad

$$\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{\left((x+1)\right)^2}{4} = 1$$

**Paso 5:** Extrayendo centro y ejes de la ecuación ordinaria

$$C(-1{,}3), \quad a = 1, \quad b = 2$$

**Respuesta:** La hipérbola tiene centro en (-1,3), sus semiejes son a=1 y b=2

**Calculando las asíntotas de la hipérbola.**

**Paso 6:** Igualando a cero y determinando la raíz cuadrada de cada fracción

$$\frac{y-3}{1} \pm \frac{x+1}{2} = 0$$

**Paso 7:** Despejando e igualando al término independiente.

$$-x + 2y = 7 \quad y \quad x + 2y = 5$$

**3) Hallar la ecuación reducida de la hipérbola con focos en (7, 0) y (-7, 0) y que pasa por el punto (4, 0)**

***Solución***

**Paso 1:** Establecer la ecuación reducida de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Paso 2:** El punto (4,0) de la hipérbola es el punto de corte con el eje de abscisas, por tanto, $a = 4$. Al ser la distancia semifocal $c = 7$, se tiene que

$$b^2 = c^2 - a^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$$

**Respuesta:** Por tanto, la ecuacion de la hiperbola es $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{33} = 1$

**4) Encuentre la forma canónica de la ecuación de la hipérbola: $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ Determine su centro, vértices, focos y asíntotas.**

**Solución**

**Paso 1:** Resolver operaciones Básicas (Ordenar términos similares, MCM, Resolver de segundo grado)

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

$$(4x^2 - 8x) - (9y^2 + 36y) + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 4y) = -4$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4 - 36$$

$$4(x-1)^2 - 9\,(y-2)^2 = -36$$

**Paso 2:** Se dividimos para -36

$$\frac{4(\mathrm{x}-1)^2}{-36} - \frac{9(\mathrm{y}-2)^2}{-36} = 1$$

$$\frac{4(\mathrm{x}-1)^2}{-9} + \frac{4(\mathrm{y}-2)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{4} - \frac{(\mathrm{x}-2)^2}{9} = 1$$

**Respuesta:** Se trata de una hipérbola con eje transverso horizontal y con centro C: (2,1) sus semiejes son *a=2, b =3.*

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$

**Los focos son:**

$F1: \left(1{,}2 + \sqrt{13}\right)$

$F1: \left(1{,}2 - \sqrt{13}\right)$

**Para hallar las asíntotas**

Eje transverso Horizontal:

$(y-k) = \frac{b}{a}\,(x-h)$

$(y-k) = -\frac{b}{a}\,(x-h)$

$$y - 2 = \pm\frac{2}{3}\,(x-1)$$

## *Ejercicios propuestos*

1) Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (Indique todos sus elementos)

a. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 9 = 0$

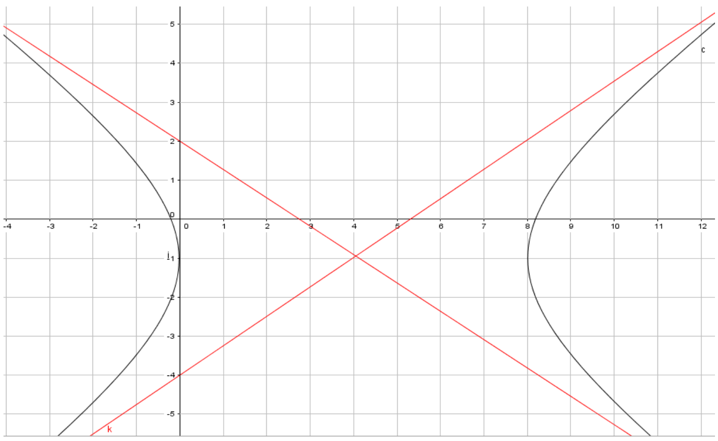
b. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 9 = 0$

2) Determine la ecuación de las asíntotas de la hipérbola definido por $4x^2 - 3y^2 + 8x + 16 = 0$

3) Determine la ecuación de la recta que contiene al centro de la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - y^2 - 32x - 8y + 49 = 0$ y es perpendicular a la recta definida por la ecuación $2x - 9y + 3 = 0$

4) Determine la distancia entre los vértices de la cónica con ecuación $-9x^2 + 18x + 4\,y^2 + 24y = 9$

5) Dada la gráfica, encuentra su ecuación general.



# *Taller: Hipérbola Veloz*

***Instrucciones:***

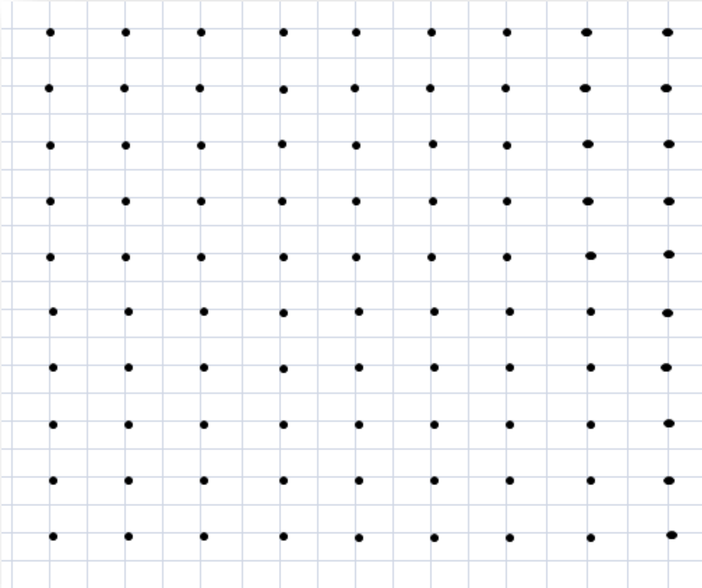
1. *Ordenadamente los estudiantes deben formar 4 grupos, tratando en lo posible de que los mismos tengan la misma cantidad de integrantes. Cada grupo se colocara un nombre (ej. Los matemáticos, Los genios, Los cónicos, entre otros). Seguidamente escriben en un trozo de papel el nombre elegido y se procede a sortear 2 nombres al azar, los cuales serán los equipos retadores. Los 2 equipos no elegidos serán los retados.*

*3. Basados en el contenido impartido en lo referente a Hipérbole los equipos retadores, colocaran como reto que en un tiempo determinado por ellos, elaborar en la plantilla de la fase 1 una hipérbole con eje paralelo al Horizontal junto a su ecuación general, tomando valores al azar de c (h, k), a y b.*

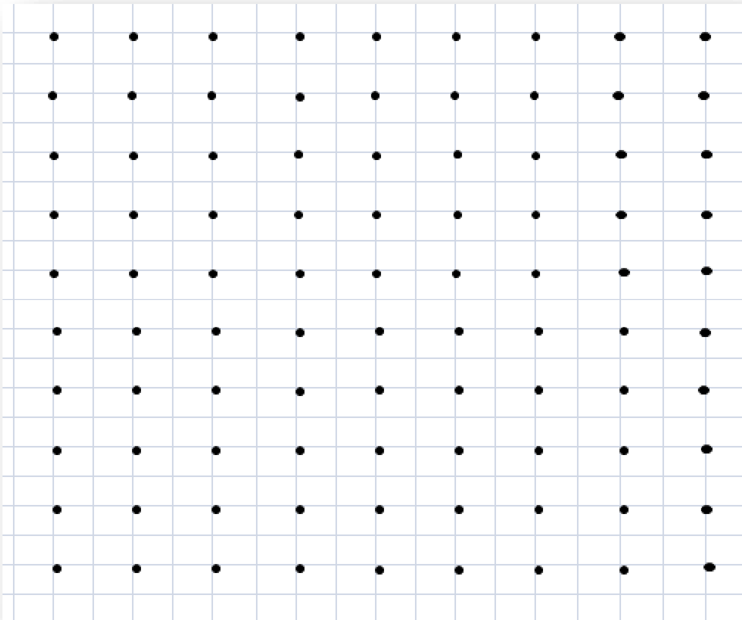
*4. Los 2 equipos (bien sea retadores o retados) que en el tiempo determinado o menor a este logren superar acertadamente el reto serán los ganadores de la primera fase, demostrando así quienes son mejores.*

*5. A continuación los 2 grupos ganadores elaboraran en la plantilla de la fase 2 una hipérbole con eje paralelo al vertical junto a su ecuación general, tomando valores al azar de c (h, k), a y b. Quienes logren finalizar acertadamente en el menor tiempo posible la tarea será el equipo ganador absoluto del aula, ganando "+" los cuales se transformaran en puntos al finalizar la unidad.*

***Fase 1: Hipérbola con eje paralelo al Horizontal***



***Fase 2: Hipérbola con eje paralelo al Vertical***



**Evaluación Formativa I**

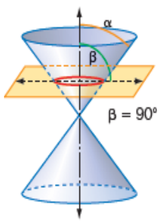
1. Escriba cómo se originan una superficie cónica. (1 punto)

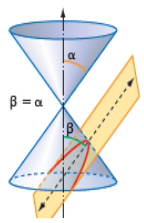
| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
|---|---|
| Describe correctamente como se forma una superficie cónica | 0,5 |
| Menciona los elementos que intervienen en la formación de una superficie cónica. Generatriz, vértice y eje. | 0,5 |

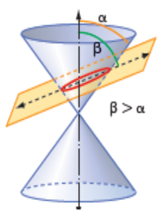
2. Escriba la ecuación general, con sus restricciones, de segundo grado que permite determinar una sección cónica. (1 punto)

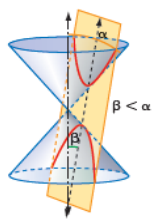
| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
|---|---|
| Escribe correctamente los términos de la ecuación | 0,5 |
| Describe las restricciones de la ecuación | 0,5 |

3. Observe las gráficas, escriba el nombre de cada cónica y describa cómo se forma. (1 punto)




| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
|---|---|
| Escribe el nombre de cada cónica en su respectivo gráfico. | 0,25 por cada cónica |
| Describe cómo se forma cada cónica. | 0,50 por cada descripción. |

4. Aplique el discriminante para determinar si la ecuación dada corresponde a una parábola, elipse o hipérbola. (1 punto)

   $9x^2 - 24xy - 16y^2 = 100x - 100y - 10$

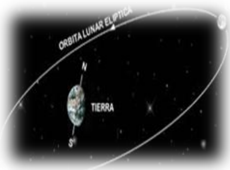
| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Relaciona la forma de la ecuación general del segundo grado, con la ecuación dada. | 0,20 |
| Conoce la ecuación del discriminante. $B^2 - 4AC$ | 0,40 |
| Determina a que sección cónica corresponde la ecuación utilizando el discriminante. | 0,40 |

5. En el entorno encontramos secciones cónicas, escriba a que sección cónica corresponde la figura. (4 puntos )

   Deporte


______________________________

Astronomía.



__________________________

Propiedades Reflectoras


___________________________

Construcción


_______________________________

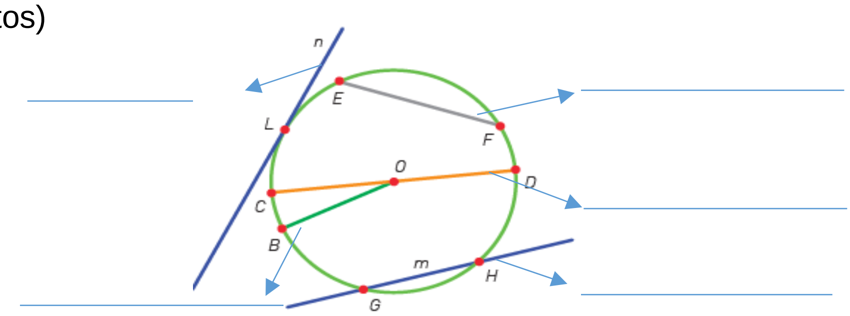
| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Relaciona la forma de la ecuación general del segundo grado, con la ecuación dada. | 0,20 |
| Conoce la ecuación del discriminante. $B^2 - 4AC$ | 0,40 |
| Determina a que sección cónica corresponde la ecuación utilizando el discriminante. | 0,40 |

**Evaluación Formativa II**

1. Deduzca la ecuación general de la circunferencia. (Valor: 1 punto)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Escribe la ecuación canónica de la circunferencia. | 0,20 |
| Desarrolla el cuadrado de un binomio. | 0,20 |
| Reagrupa los términos correctamente. | 0,20 |
| Obtiene la ecuación general de la circunferencia. | 0,40 |

2. Observe el gráfico y escriba la ecuación de la circunferencia. (Valor: 1,25 puntos)



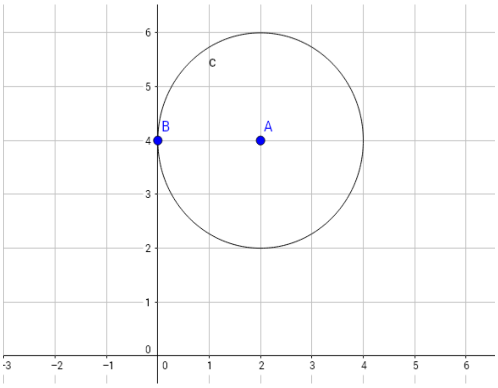

3. Determine el centro y el radio de una circunferencia cuya ecuación general es
   $x^2 + y^{2\,+}\, 4x – 6y + 12 = 0$. (Valor 1,5punto)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Completa cuadrados de forma correcta | 0,30 |
| Factoriza adecuadamente | 0,20 |
| Identifica las coordenadas del centro en la ecuación resultante | 0,50 |
| Identifica el radio en la ecuación | 0,50 |

4. Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2$- 6x + 2y = 0 en el punto (4, 2). (Valor 1,25punto)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Expresa adecuadamente la forma canónica de la ecuación de la circunferencia | 0,25 |
| Identifica en centro de la circunferencia | 0,25 |
| Determina la pendiente del radio de la circunferencia | 0,25 |
| Determina la pendiente de la recta tangente a la circunferencia | 0,30 |
| Obtiene la ecuación de la recta dado sustituyente el punto dado y la pendiente | 0,2 |

5. Dada la gráfica de la circunferencia deducir su ecuación general (Valor 1,5 puntos)




| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Identifica las coordenadas del centro de la circunferencia | 0,20 |
| Determina el radio de la circunferencia | 0,25 |
| Escribe la ecuación canónica de la circunferencia. | 0,25 |
| Reemplaza correctamente las coordenadas del centro | 0,25 |
| Resuelve los binomios cuadrados de forma correcta | 0,25 |
| Agrupa términos adecuadamente | 0,30 |

6. Un ciclista recorre una pista circular cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 6084 = 0$. Si la línea de partida se haya al este del centro, determinar el número de vueltas que debe recorrer para cubrir 5000 meros. (Valor: 1,5 punto)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Determina correctamente el radio de la circunferencia | 0,25 |
| Determina correctamente el diámetro de la circunferencia | 0,25 |
| Calcula de forma adecuada la longitud de la circunferencia | 0,50 |
| Calcula correctamente número de vueltas que debe dar el ciclista | 0,50 |

**Evaluación Formativa III**

1. Deduzca la ecuación general de la elipse. (Valor: 1 punto)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Escribe la ecuación canónica de la elipse. | 0,20 |
| Desarrolla el cuadrado de un binomio. | 0,20 |
| Reagrupa los términos correctamente. | 0,20 |
| Obtiene la ecuación general de la elipse. | 0,40 |

2. Complete el algoritmo para determinar la ecuación canónica de la elipse. (1 punto)

$$x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$$

$$x^2 - 2x \;\; + 2y^2 + 8y \;\; = -5$$

$$(x^2 - 2x \;\_\_\_\_\_) + 2(y^2 + 4y \;\_\_\_\_\_\_) = -5\_\_\_\_\_\_ \;\; \_\_\_\_\_\_\_$$

Ecuación canónica $(x \;\_\_\_\_)^2 + (y \;\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_$

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Ordena la ecuación para formar trinomio cuadrado perfecto. | 0,10 |
| Desarrolla el trinomio cuadrado perfecto, correctamente. | 0,50 |
| Obtiene la ecuación canónica de la elipse. | 0,40 |

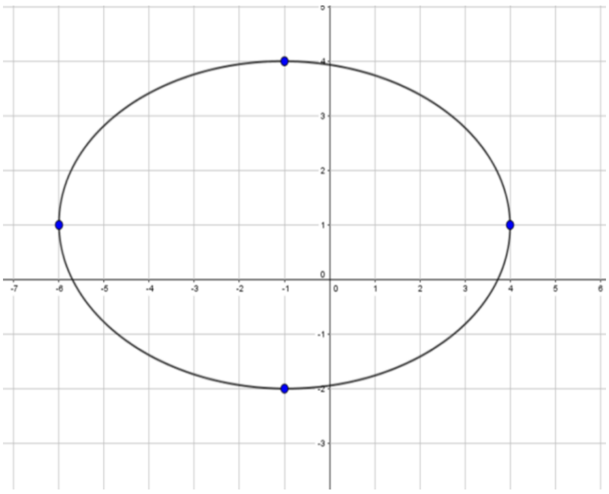
3. Determine la ecuación y la excentricidad de la elipse cuyo eje focal es paralelo al eje x, con centro en (-3, 4), la distancia entre el centro y cada foco es igual 3 y el eje mayor mide 8 unidades. (Valor: 1,5puntos)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Escribe correctamente la forma de la ecuación canónica de la elipse con eje focal paralelo al eje x | 0,30 |
| Encuentra el valor de “b” a través de la relación entre semiejes | 0,30 |
| Escribe la ecuación de la elipse | 0,30 |
| Determina el eje menor de la elipse | 0,30 |
| Calcula la excentricidad de la elipse | 0,30 |

4. Determine la ecuación canónica de la elipse a partir de su ecuación general $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y + 189 = 0$. (Valor: 1punto)

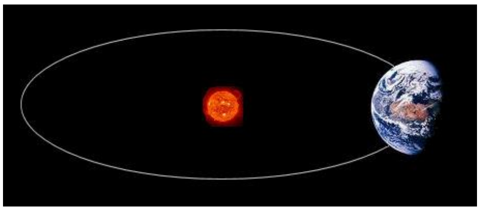
| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
|---|---|
| Agrupa convenientemente los términos | 0,10 |
| Completa trinomios de forma adecuada | 0,25 |
| Factoriza adecuadamente | 0,25 |
| Logra obtener la ecuación canónica de la elipse | 0,40 |

5. Dada la gráfica construye la ecuación general. (Valor: 1,5 punto)



| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
|---|---|
| Identifica c | 0,25 |
| Identifica a | 0,25 |
| Identifica b | 0,2 |
| Sustituye adecuadamente los datos en la ecuación ordinaria canónica | 0,2 |
| Resuelve adecuadamente producto notable | 0,2 |
| Agrupa adecuadamente los términos para conseguir la ecuación general | 0,4 |

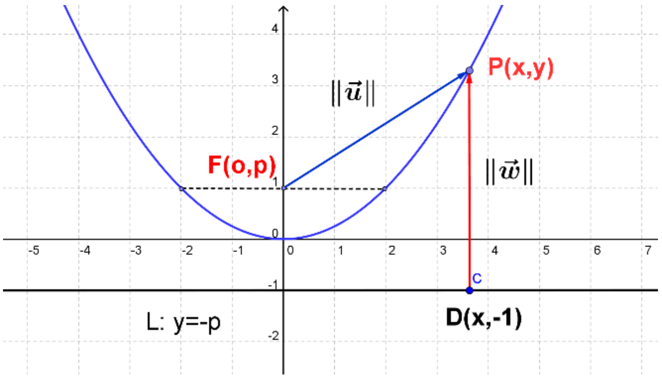
6. La distancia máxima a la que se encuentra la Tierra del Sol es 1,016 UA, la distancia mínima es 0,984 UA y su excentricidad es 0,017. La distancia máxima a la que se encuentra Marte del Sol es 1,654 UA, la distancia mínima es 1,372UA y su excentricidad es 0,093. Dibujar a escala y en el mismo plano la trayectoria de los dos planetas. (Valor: 1,5 puntos)



| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
|---|---|
| Determina el valor de a para la Tierra correctamente | 0,25 |
| Determina el valor de c para la Tierra correctamente | 0,25 |
| Determina el valor de b para la Tierra correctamente | 0,30 |
| Determina el valor de a para Marte correctamente | 0,20 |
| Determina el valor de c para Marte correctamente | 0,1 |
| Determina el valor de b para Marte correctamente | 0,1 |
| Grafica correctamente | 0,30 |

**Evaluación Formativa IV**

1. Observe la figura e identifique sus elementos. (Valor: 1punto)




________________________________

________________________________

________________________________

________________________________

2. Escriba la ecuación general de la parábola en cada caso. (Valor: 1punto)

Caso I
a. Parábola dirigida hacia arriba

____________________________

Caso II
b. Parábola dirigida hacia abajo

____________________________

Caso III
c. Parábola dirigida hacia derecha

___________________________

Caso IV
d. Parábola dirigida hacia izquierda

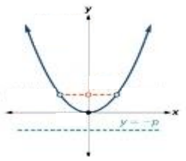
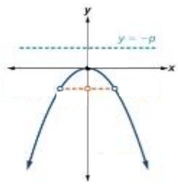
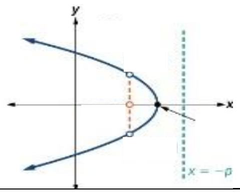
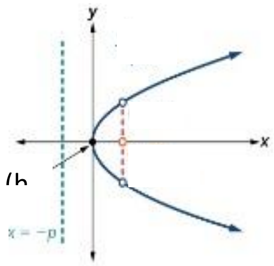
_________________________

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Escribe correctamente la ecuación de la circunferencia en cada caso. | 0,5 |

3. Determinar la ecuación canónica de la parábola con vértice en (1, -3) y foco en (1, -1). (Valor: 1,5 puntos)

| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
|---|---|
| Identifica el eje de simetría de la parábola a partir de los datos dados | 0,2 |
| Reconoce la forma de la ecuación canónica de la parábola | 0,25 |
| Idéntica hacia donde abre la parábola partiendo de los datos dados | 0,25 |
| Identifica el valor de "p" | 0,4 |
| Expresa correctamente la ecuación canónica | 0,4 |

4. Complete con las ecuaciones para determinar el foco y la línea directriz. (Valor:1 puntos)

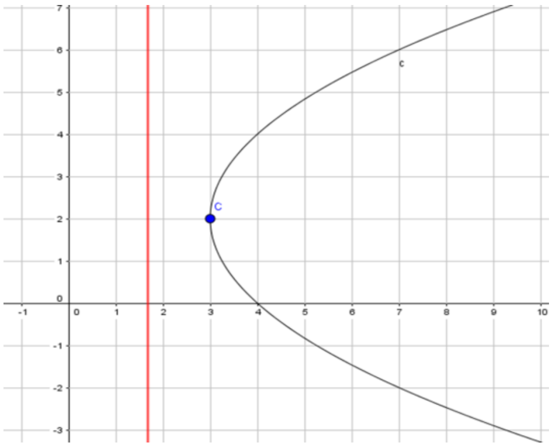
| Gráfica | Foco | Línea Directriz |
|---|---|---|
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Dado la gráfica, logra determinar la ecuación del foco y la línea directriz parábola | 0,25 |

5. Determinar los elementos de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -12x$. (Valor: 1punto)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Reconoce la características de una ecuación de una parábola identificando el eje de simetría | 0,5 |
| Determina correctamente el foco de la parábola | 0,5 |
| Determina correctamente la directriz de la parábola | 0,5 |
| Identifica el vértice de la parábola | 0,5 |

6. Dada la gráfica de la parábola encuentre la ecuación general. (Valor: 1,5 puntos)



| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Identifica la forma de la ecuación canónica de la parábola a partir de su eje de simetría | 0,20 |
| Identifica el vértice | 0,10 |
| Identifica la directriz | 0,10 |
| Calcula el parámetro correctamente | 0,30 |
| Sustituye en la ecuación ordinaria los datos obtenidos | 0,30 |
| Desarrolla el producto notable adecuadamente | 0,10 |
| Agrupa los términos de forma adecuada, determina la ecuación de la parábola | 0,40 |

7. La trayectoria de un valor de futbol desde el nivel del suelo, es una parábola que abre hacia abajo. La altura alcanzada por el balón es 2 metros y su alcance horizontal es 6 metros. (Valor: 1punto)
   - Escribir la ecuación de la parábola que describe la trayectoria del balón
   - Si el alcance horizontal se reduce a la mitad ¿Cómo cambia la ecuación del punto anterior?

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Identifica eje de simetría | 0,5 |
| Identifica vértices | 0,5 |
| Escribe correctamente la ecuación | 0,5 |
| Escribe correctamente la ecuación de acuerdo a la variación del alcance | 0,5 |

8. Cuando no se considera la fricción que ofrece el aire, la ecuación de trayectoria parabólica seguida por un objeto que se lanza con velocidad de 5m/s formando con la horizontal un ángulo de 37°, es: $x^2 - \frac{120}{49}x + \frac{160}{49}y = 0$ . Determinar la altura máxima alcanzada por el objeto y el máximo alcance horizontal. (Valor: 1,5 punto)

| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
|---|---|
| Completa cuadrados correctamente | 0,30 |
| Factoriza de forma adecuada para obtener la forma de la ecuación canónica | 0,30 |
| Extrae de la ecuación canónica el valor de la altura máxima | 0,50 |
| Extrae de la ecuación canónica el máximo alcance horizontal | 0,40 |

## Evaluación Formativa V

1. Complete la deducción de la ecuación canónica de la hipérbola (Valor: 1 punto)
   La ecuación de una hipérbola centrada en el origen, y con focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, se puede obtener aplicando la definición:

$$|d(P, F_1) - (P, F_2)| = 2a(\text{se supondrá que } d(P, F_1) > d(P, F_2))$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} = 2a \text{ (I)}$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} = f \text{ (II)}$$

Multiplique las expresiones (I) y (II)

$$(\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2})^2 - \left(\sqrt{(x - c)^2 + (y)^2}\right)^2 = 2af$$

(______________________) − (_______________________) =_____

______________________ − _______________________ =_____

$$4xc = \_\_\_\_\_$$

$$f = \text{——}$$

Reemplazamos fen (II) y sumando las expresiones (I) y (II):

$$2\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} = 2a + \frac{2xc}{a}$$

____________________________ = ______________

$$c^2 - a^2 = x^2\left[\frac{c^2}{a^2} - 1\right] - y$$

$$x^2\left[\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right] - y^2 = c^2 - a^2$$

Resolviendo y dividiendo la expresión por $c^2 - a^2$:

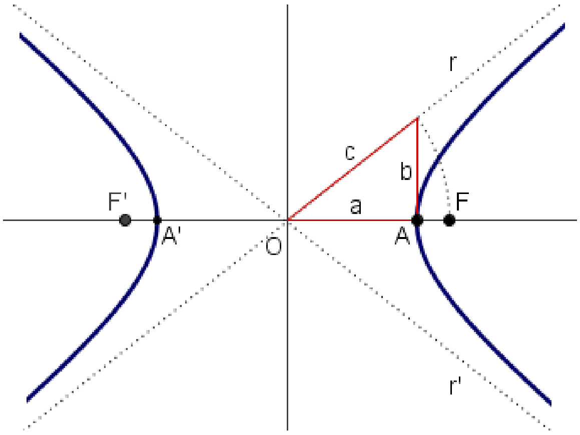
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Remplazando $c^2 - a^2$ por $b^2$, tenemos:

$$\_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Resuelve correctamente cuadro de un binomio | 0,30 |
| Despaja correctamente términos algebraicos | 0,30 |
| Sustituye correctamente términos | 0,30 |
| Obtiene la ecuación canónica de la hipérbola | 0,10 |

2. Observe la figura de la hipérbole y escriba los elementos. (Valor: 1punto)




____________________________

____________________________

____________________________

____________________________

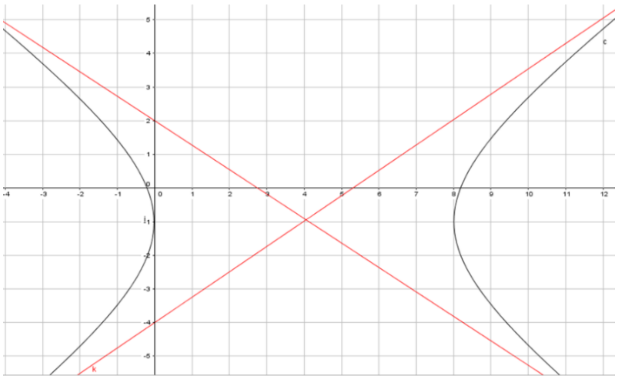
____________________________

____________________________

3. Representar gráficamente la hipérbola cuya ecuación es $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ y determine la excentricidad y la ecuación de las asíntotas. (Valor: 1punto)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Identifica a forma correcta el eje focal de la hipérbola | 0,2 |
| Identifica los valores de a y b | 0,2 |
| Calcula el valor de c | 0,2 |
| Determina correctamente las asíntotas | 0,2 |
| Calcula la excentricidad de forma adecuada | 0,2 |

4. Dada la gráfica, encuentra su ecuación general. (Valor:1puntos)



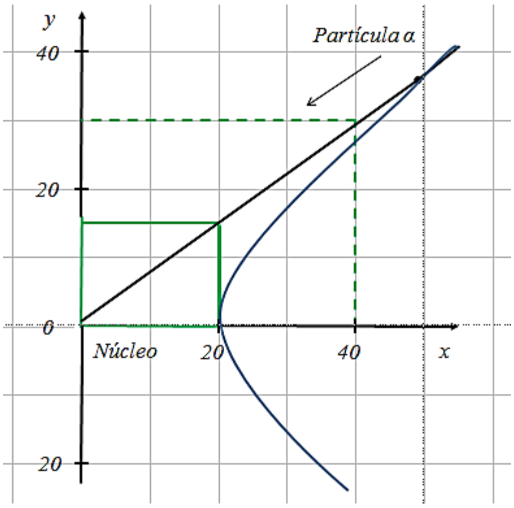
| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Identifica el valor de a | 0,1 |
| Identifica el valor de b | 0,1 |
| Identifica el valor de c | 0,2 |
| Sustituyen los datos en la ecuación ordinaria | 0,2 |
| Resuelve producto notable | 0,2 |
| Agrupa los términos adecuadamente para expresar la ecuación general | 0,2 |

5. Determine la ecuación de las asíntotas de la hipérbola definido por $x^2 - 4y^2 + 2x + 24y - 31 = 0$ (Valor: 1 punto)

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Agrupa términos adecuadamente | 0,2 |
| Factoriza de forma correcta | 0,2 |
| Iguala a la unidad | 0,2 |
| Extrae Centro y ejes | 0,2 |
| Expresa adecuadamente a ecuación de las asíntotas | 0,2 |

6. Una partícula α es un núcleo de helio, por tanto su carga eléctrica es positiva. Cuando se dispara una partícula α hacia un núcleo atómico, el cual también es carga positiva, esta es repelida y sigue con trayectoria hiperbólica en cuyo centro se encuentra el núcleo.

La figura muestra la trayectoria de una partícula a que dirige contra un núcleo. Si la distancia más cercana al núcleo es de 20 (1 Å = $10^{-10}$m), determinar la ecuación de la trayectoria. (Valor: 1 punto)



| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| Obtiene correctamente la pendiente de la asíntota | 0,1 |
| Escribe de forma adecuada la ecuación de la asíntota | 0,2 |
| Identifica el centro de la hipérbola | 0,1 |
| Identifica el valor de a | 0,2 |
| Identifica el valor de b | 0,2 |
| Escribe correctamente la ecuación de la hipérbola | 0,2 |

## Evaluación Sumativa

*Estimadas y estimados estudiantes, la presente evaluación recopila lo estudiado en el quinto y sexto parcila.*

***Éxitos***

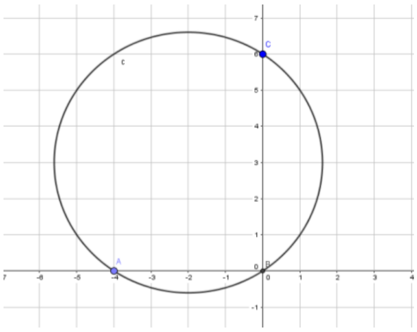
1. Marque con una x, cómo se originan una superficie cónica.

| | |
|---|---|
| Al hacer girar una recta **g** llamada generatriz alrededor de otra recta **e** llamada eje, cuando g y e son secantes. El punto de corte de las dos rectas se llama vértice V de la superficie. | |
| Al hacer girar una recta **g** llamada generatriz alrededor de otra recta **e** llamada eje, cuando g y e son secantes. El punto de corte de las dos rectas se llama secciones S de la superficie. | |
| Al hacer girar una recta **g** llamada secante alrededor de otra recta **e** llamada eje, cuando g y e son generatriz. El punto de corte de las dos rectas se llama vértice V de la superficie. | |

2. Hallar la ecuación de la parábola, cuyo foco es F = (5, 5) y su directriz es L: x = 3.

   a) $(y - 5)^2 = 4 (x - 4)$
   b) $(y - 3)^2 = 8(x - 4)$
   c) $(y - 3)^2 = 8(x - 2)$
   d) $(x - 4) = (y - 3)^2$

3. Dada la gráfica, la ecuación general que genera dicha curva es:



a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$

4. La ecuación $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$, genera en el plano cartesiano una:

a) Circunferencia

b) Elipse

c) Parábola

d) Hipérbola

5. Aplique el discriminante en la ecuación $9x^2 - 24xy - 16y^2 = 100x - 100y - 10$, subraye a que cónica corresponde.
   a. Elipse
   b. Hipérbola
   c. Parábola

6. Subraye la ecuación ordinaria de las circunferencia, que es tangente a la recta 3x + 4y + 3 = 0 en el punto (–1, 0); su radio mide 5 unidades.
   a. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = -25$; $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 25$
   b. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$; $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 25$
   c. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = -25$; $(x+4)^2 + (y+4)^2 = -25$
   d. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$; $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 25$

7. La ecuación $4x^2 - 4y^2 - y = -3$, genera en el plano cartesiano una:

a) Parábola

b) Elipse

c) Hipérbola

d) Circunferencia

8. Subraye la definición de la parábola como sección cónica. (Valor: 1punto)
   a. $\{\mathrm{P(x,y)} \in \mathbb{R}^2/\mathrm{d(O,P)} = \mathrm{r}\}$
   b. $\{\mathrm{P(x,y)} \in \mathbb{R}^2/\mathrm{d(P,F_o)} = \mathrm{d(P,L)}\}$
   c. $\{\mathrm{P(x,y)} \in \mathbb{R}^2/\mathrm{d(P,F_1)} + \mathrm{d(P,F_2)} = \mathrm{constante}\}$

9. Seleccione, subrayando, la ecuación canónica de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 11 = 0$
   a. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 11$
   b. $(x-2)^2 - (y-1)^2 = 16$
   c. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 11$
   d. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 11$

10. Relacione los elementos con las coordenadas resultantes de la elipse cuya ecuación es:
    $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

| **ELEMENTOS** | **COORDENADAS** |
|---|---|
| Focos | (-4, 0) y (4,0) |
| Vértice | (0, -3) y (0,3) |
| Eje mayor | (-5, 0) y (5,0) |

# CONCLUSIONES

Al finalizar el trabajo de investigación la autora concluye que:

1. La aplicación de un cuestionario de estilos de aprendizaje ayuda al docente a conocer cómo impartir una clase, para que los estudiantes tengan aprendizajes significativos.

2. La implementación de guía didáctica como herramienta para la enseñanza aprendizaje de secciones cónicas en los estudiantes de tercero de bachillerato, aportó a elevar el nivel académico.

3. Con la elaboración de instrumentos de evaluación, válidos y confiables, el grupo tratamiento obtuvo óptimos resultados en todas las lecciones de la unidad; mientras que el grupo control la media fluctúa entre 6 – 7 puntos.

4. La aplicación de estrategias didácticas, incentiva a los estudiantes a ser más participativos, activos y motiva al momento de la adquisición de conocimientos.

5. Impartir clases didácticas no solo eleva la autoestima de los estudiantes, sino que mejora significativamente el rendimiento académico.

# RECOMENDACIONES

1. Cada docente al inicio del año escolar debe aplicar un cuestionario de estilos de aprendizaje, para conocer más sus estudiantes, sobre todo a los que tienden a tener bajo rendimiento académico.

2. Elaborar instrumentos de evaluación que valoren correctamente el nivel cognitivo de los estudiantes, aunque esto implique una mayor inversión de tiempo para el docente; además hacer conocer los criterios de las rúbricas.

3. Implementar guías, folletos que sirvan a los estudiantes tanto fuera como dentro del salón de clases, para la adquisición de un aprendizaje significativo.

4. Reinventar con ayuda de estrategias didácticas clases más dinámicas donde el estudiante tenga una participación activa, renunciar el tradicionalismo en las salas de clases; que dejan estudiantes desinteresados y un bajo rendimiento académico.

# REFERENCIAS

Arias, F. G. (2012). El Proyecto de Investigación. Caracas : Episteme .

Bernal. ( 2006).

Contreras, E. (1990). Módulo de Evaluación del Prendizaje .

Hernández, Fernández y Baptista. ( (2010) ).

Moreira. (1997).

Nérice tomado de Michelle Zapata Arango. (17 de marzo de 2015 ).

Larson, R. E., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., & López, J. L. P. (1989). Cálculo y geometría analítica. McGraw-Hill.

Iezzi, G., & DOLCE, O. (1972). Geometría analítica. Fundamentos da Matemática Elementar, 7.

Flores, L. (2015). Diseño Instruccional para El Aprendizaje de Secciones Cónicas. Universidad de Carabobo. [Documento en línea.] Disponible en http://riuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/123456789/2406/1/rflores.pdf.

ESPOL, 2010, “Fundamentos de matemáticas” Editorial Poligráfica. Guayaquil, Ecuador.

Villena, M. (2009). *Pre cálculo.* (ESPOL, Ed.). Guayaquil, Ecuador.

Cabrerizo, D., Castillo, S., (2010). “Evaluación educativa de aprendizajes y competencias”, Pearson Educación, Madrid.

Jesús, C. D. (2003). Prácticas de evaluación educativa. En C. D. Jesús. Madrid.

Toruncha, J. Z. (2003). Aprendizaje y categorías de una didáctica desarrolladora. En J. Z. Toruncha. La Habana.

Muñoz, E. C. (1990). El profesor universitario y la evaluación de los alumnos. En E. C. Muñoz, Emilio Contreras Muñoz. Madrid: ICE-UPM.

LOEI. (2011). De la evaluación, calificación y promoción de los estudiantes.

# ANEXOS

## Anexo 1.- Cuestionario para la evaluación de estilos de aprendizaje Felder y Silverman

**INSTRUCCIONES**
Encierre en un círculo la opción "a" o "b" para indicar su respuesta a cada pregunta. Por favor seleccione solamente una respuesta para cada pregunta.
Si tanto "a" y "b" parecen aplicarse a usted, seleccione aquella que se aplique más frecuentemente.

1. Entiendo mejor algo
a) si lo práctico.
b) si pienso en ello.

2. Me considero
a) realista.
b) innovador.

3. Cuando pienso acerca de lo que hice ayer, es más probable que lo haga sobre la base de
a) una imagen.
b) palabras.

4. Tengo tendencia a
a) entender los detalles de un tema pero no ver claramente su estructura completa.
b) entender la estructura completa pero no ver claramente los detalles.

5. Cuando estoy aprendiendo algo nuevo, me ayuda
a) hablar de ello.
b) pensar en ello.

6. Si yo fuera profesor, yo preferiría dar un curso
a) que trate sobre hechos y situaciones reales de la vida.
b) que trate con ideas y teorías.

7. Prefiero obtener información nueva de
a) imágenes, diagramas, gráficas o mapas.
b) instrucciones escritas o información verbal.

8. Una vez que entiendo
a) todas las partes, entiendo el total.
b) el total de algo, entiendo como encajan sus partes.

9. En un grupo de estudio que trabaja con un material difícil, es más probable que
a) participe y contribuya con ideas.

b) no participe y solo escuche.

10. Es más fácil para mí
a) aprender hechos.
b) aprender conceptos.

11. En un libro con muchas imágenes y gráficas es más probable que
a) revise cuidadosamente las imágenes y las gráficas.
b) me concentre en el texto escrito.

12. Cuando resuelvo problemas de matemáticas
a) generalmente trabajo sobre las soluciones con un paso a la vez.
b) frecuentemente sé cuáles son las soluciones, pero luego tengo dificultad para imaginarme los pasos para llegar a ellas.

13. En las clases a las que he asistido
a) he llegado a saber cómo son muchos de los estudiantes.
b) raramente he llegado a saber cómo son muchos estudiantes.

14. Cuando leo temas que no son de ficción, prefiero
a) algo que me enseñe nuevos hechos o me diga como hacer algo.
b) algo que me de nuevas ideas en que pensar.

15. Me gustan los maestros
a) que utilizan muchos esquemas en el pizarrón.
b) que toman mucho tiempo para explicar.

16. Cuando estoy analizando un cuento o una novela
a) pienso en los incidentes y trato de acomodarlos para configurar los temas.
b) me doy cuenta de cuales son los temas cuando termino de leer y luego tengo que regresar y encontrar los incidentes que los demuestran.

17. Cuando comienzo a resolver un problema de tarea, es más probable que
a) comience a trabajar en su solución inmediatamente.
b) primero trate de entender completamente el problema.

18. Prefiero la idea de
a) certeza.
b) teoría.

19. Recuerdo mejor
a) lo que veo.
b) lo que oigo.

20. Es más importante para mí que un profesor
a) exponga el material en pasos secuenciales claros.
b) me dé un panorama general y relacione el material con otros temas.

21. Prefiero estudiar

a) en un grupo de estudio.
b) solo.

22. Me considero
a) cuidadoso en los detalles de mi trabajo.
b) creativo en la forma en la que hago mi trabajo.

23. Cuando alguien me da direcciones de nuevos lugares, prefiero
a) un mapa.
b) instrucciones escritas.

24. Aprendo
a) a un paso constante. Si estudio con ahínco consigo lo que deseo.
b) en inicios y pausas. Me llego a confundir y súbitamente lo entiendo.

25. Prefiero primero
a) hacer algo y ver que sucede.
b) pensar como voy a hacer algo.

26. Cuando leo por diversión, me gustan los escritores que
a) dicen claramente los que desean dar a entender.
b) dicen las cosas en forma creativa e interesante.

27. Cuando veo un esquema o bosquejo en clase, es más probable que recuerde
a) la imagen.
b) lo que el profesor dijo acerca de ella.

28. Cuando me enfrento a un cuerpo de información
a) me concentro en los detalles y pierdo de vista el total de la misma.
b) trato de entender el todo antes de ir a los detalles.

29. Recuerdo más fácilmente
a) algo que he hecho.
b) algo en lo que he pensado mucho.

30. Cuando tengo que hacer un trabajo, prefiero
a) dominar una forma de hacerlo.
b) intentar nuevas formas de hacerlo.

31. Cuando alguien me enseña datos, prefiero
a) gráficas.
b) resúmenes con texto.

32. Cuando escribo un trabajo, es más probable que
a) lo haga ( piense o escriba) desde el principio y avance.
b) lo haga (piense o escriba) en diferentes partes y luego las ordene.

33. Cuando tengo que trabajar en un proyecto de grupo, primero quiero
a) realizar una "tormenta de ideas" donde cada uno contribuye con ideas.

b) realizar la "tormenta de ideas" en forma personal y luego juntarme con el grupo para comparar las ideas.

34. Considero que es mejor elogio llamar a alguien
a) sensible.
b) imaginativo.

35. Cuando conozco gente en una fiesta, es más probable que recuerde
a) cómo es su apariencia.
b) lo que dicen de sí mismos.

36. Cuando estoy aprendiendo un tema, prefiero
a) mantenerme concentrado en ese tema, aprendiendo lo más que pueda de él.
b) hacer conexiones entre ese tema y temas relacionados.

37. Me considero
a) abierto.
b) reservado.

38. Prefiero cursos que dan más importancia a
a) material concreto (hechos, datos.)
b) material abstracto (conceptos, teorías.)

39. Para divertirme, prefiero
a) ver televisión.
b) leer un libro.

40. Algunos profesores inician sus clases haciendo un bosquejo de lo que enseñarán. Esos bosquejos son
a) algo útiles para mí.
b) muy útiles para mí.

41. La idea de hacer una tarea en grupo con una sola calificación para todos
a) me parece bien.
b) no me parece bien.

42. Cuando hago grandes cálculos
a) tiendo a repetir todos mis pasos y revisar cuidadosamente mi trabajo.
b) me cansa hacer su revisión y tengo que esforzarme para hacerlo.

43. Tiendo a recordar lugares en los que he estado
a) fácilmente y con bastante exactitud.
b) con dificultad y sin mucho detalle.

44. Cuando resuelvo problemas en grupo, es más probable que yo
a) piense en los pasos para la solución de los problemas.
b) piense en las posibles consecuencias o aplicaciones de la solución en un amplio rango de campos.

## Anexo 2: Calificaciones de Lección N° I

| ESTUDIANTE Grupo tratamiento | LECCIÓN I | | ESTUDIANTE Grupo control | LECCIÓN I | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 10,0 | SAR | **1** | 4,4 | NAR |
| **2** | 7,9 | AAR | **2** | 7,1 | AAR |
| **3** | 7,9 | AAR | **3** | 6,7 | AAR |
| **4** | 4,2 | NAR | **4** | 4,2 | NAR |
| **5** | 8,3 | AAR | **5** | 10,0 | SAR |
| **6** | 7,9 | AAR | **6** | 8,4 | AAR |
| **7** | 5,4 | PAR | **7** | 5,4 | PAR |
| **8** | 9,2 | DAR | **8** | 5,4 | PAR |
| **9** | 7,3 | AAR | **9** | 6,0 | PAR |
| **10** | 9,2 | DAR | **10** | 7,5 | AAR |
| **11** | 5,4 | PAR | **11** | 5,4 | PAR |
| **12** | 7,5 | AAR | **12** | 6,3 | PAR |
| **13** | 10,0 | SAR | **13** | 6,3 | PAR |
| **14** | 5,2 | PAR | **14** | 5,2 | PAR |
| **15** | 2,9 | NAR | **15** | 5,4 | PAR |
| **16** | 9,2 | DAR | **16** | 6,9 | AAR |
| **17** | 6,0 | PAR | **17** | 4,6 | PAR |
| **18** | 9,4 | DAR | **18** | 10,0 | SAR |
| **19** | 5,6 | PAR | **19** | 4,6 | PAR |
| **20** | 7,9 | AAR | **20** | 8,8 | DAR |
| **21** | 9,4 | DAR | **21** | 9,6 | SAR |
| **22** | 9,2 | DAR | **22** | 9,2 | DAR |
| **23** | 5,4 | PAR | **23** | 5,4 | PAR |
| **24** | 8,1 | AAR | **24** | 5,7 | PAR |
| **25** | 10,0 | SAR | **25** | 10,0 | SAR |
| **26** | 9,2 | DAR | **26** | 6,9 | AAR |
| **27** | 9,6 | SAR | **27** | 7,3 | AAR |
| **28** | 9,6 | SAR | **28** | 6,0 | PAR |
| **29** | 10,0 | SAR | **29** | 10,0 | SAR |
| **30** | 8,5 | DAR | **30** | 8,5 | DAR |
| **31** | 9,6 | SAR | **31** | 6,9 | AAR |
| **32** | 9,0 | DAR | **32** | 4,8 | PAR |
| **33** | 5,4 | PAR | **33** | 7,5 | AAR |
| | | SAR | **34** | 8,2 | AAR |
| | | AAR | **35** | 4,2 | NAR |
| **Media** | 7,9 | AAR | **Media** | 6,8 | |
| **Varianza** | 3,752367424 | NAR | **Varianza** | 3,293956916 | |

## Anexo 3: Calificaciones de Lección N° II

| ESTUDIANTE Grupo tratamiento | LECCIÓN II | | ESTUDIANTE Grupo control | LECCIÓN II | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 9,3 | DAR | **1** | 7,0 | AAR |
| **2** | 9,7 | SAR | **2** | 7,2 | AAR |
| **3** | 3,9 | NAR | **3** | 5,7 | PAR |
| **4** | 7,9 | AAR | **4** | 7,2 | AAR |
| **5** | 6,8 | AAR | **5** | 10,0 | SAR |
| **6** | 7,6 | AAR | **6** | 10,0 | SAR |
| **7** | 6,3 | PAR | **7** | 5,7 | PAR |
| **8** | 10,0 | SAR | **8** | 6,5 | AAR |
| **9** | 7,7 | AAR | **9** | 2,2 | NAR |
| **10** | 10,0 | SAR | **10** | 5,7 | PAR |
| **11** | 5,3 | PAR | **11** | 4,7 | PAR |
| **12** | 5,1 | PAR | **12** | 2,4 | NAR |
| **13** | 10,0 | SAR | **13** | 6,9 | AAR |
| **14** | 5,2 | PAR | **14** | 5,6 | PAR |
| **15** | 0,6 | NAR | **15** | 2,1 | NAR |
| **16** | 10,0 | SAR | **16** | 7,5 | AAR |
| **17** | 10,0 | SAR | **17** | 10,0 | SAR |
| **18** | 10,0 | SAR | **18** | 7,6 | AAR |
| **19** | 6,3 | PAR | **19** | 2,5 | NAR |
| **20** | 10,0 | SAR | **20** | 8,9 | DAR |
| **21** | 10,0 | SAR | **21** | 10,0 | SAR |
| **22** | 10,0 | SAR | **22** | 8,6 | DAR |
| **23** | 3,6 | NAR | **23** | 5,2 | PAR |
| **24** | 9,1 | DAR | **24** | 8,2 | AAR |
| **25** | 9,4 | DAR | **25** | 6,6 | AAR |
| **26** | 9,4 | DAR | **26** | 5,5 | PAR |
| **27** | 9,4 | DAR | **27** | 7,1 | AAR |
| **28** | 9,4 | DAR | **28** | 2,5 | NAR |
| **29** | 9,7 | SAR | **29** | 8,2 | AAR |
| **30** | 9,4 | DAR | **30** | 6,8 | AAR |
| **31** | 9,3 | DAR | **31** | 2,2 | NAR |
| **32** | 7,1 | AAR | **32** | 1,9 | NAR |
| **33** | 7,1 | AAR | **33** | 6,7 | AAR |
| | | | **34** | 5,1 | PAR |
| | | | **35** | 4,9 | PAR |
| **Media** | 8,0 | | **Media** | 6,2 | |
| **Varianza** | 5,441332064 | | **Varianza** | 5,789623986 | |

## Anexo 4: Calificaciones de Lección N° III

| ESTUDIANTE Grupo tratamiento | LECCIÓN III | | ESTUDIANTE Grupo control | LECCIÓN III | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8,8 | DAR | 1 | 7,7 | AAR |
| 2 | 10,0 | SAR | 2 | 6,4 | PAR |
| 3 | 2,9 | NAR | 3 | 3,6 | NAR |
| 4 | 8,7 | DAR | 4 | 9,3 | DAR |
| 5 | 6,1 | PAR | 5 | 10,0 | SAR |
| 6 | 8,1 | AAR | 6 | 10,0 | SAR |
| 7 | 7,1 | AAR | 7 | 6,8 | AAR |
| 8 | 10,0 | SAR | 8 | 7,4 | AAR |
| 9 | 8,4 | AAR | 9 | 5,3 | PAR |
| 10 | 10,0 | SAR | 10 | 5,4 | PAR |
| 11 | 3,9 | NAR | 11 | 5,1 | PAR |
| 12 | 5,4 | PAR | 12 | 4,6 | PAR |
| 13 | 10,0 | SAR | 13 | 6,6 | AAR |
| 14 | 5,7 | PAR | 14 | 6,7 | AAR |
| 15 | 0,3 | NAR | 15 | 2,5 | NAR |
| 16 | 9,1 | DAR | 16 | 7,8 | AAR |
| 17 | 10,0 | SAR | 17 | 10,0 | SAR |
| 18 | 9,4 | DAR | 18 | 7,4 | AAR |
| 19 | 8,1 | AAR | 19 | 4,4 | NAR |
| 20 | 9,4 | DAR | 20 | 8,1 | AAR |
| 21 | 8,9 | DAR | 21 | 8,9 | DAR |
| 22 | 9,1 | DAR | 22 | 8,1 | AAR |
| 23 | 1,0 | NAR | 23 | 5,7 | PAR |
| 24 | 10,0 | SAR | 24 | 7,3 | AAR |
| 25 | 9,7 | SAR | 25 | 6,2 | PAR |
| 26 | 9,3 | DAR | 26 | 7,6 | AAR |
| 27 | 8,3 | AAR | 27 | 9,7 | SAR |
| 28 | 9,3 | DAR | 28 | 4,6 | PAR |
| 29 | 9,4 | DAR | 29 | 8,3 | AAR |
| 30 | 10,0 | SAR | 30 | 7,5 | AAR |
| 31 | 9,4 | DAR | 31 | 4,4 | NAR |
| 32 | 8,4 | AAR | 32 | 4,5 | NAR |
| 33 | 7,7 | AAR | 33 | 7,1 | AAR |
| | | | 34 | 6,4 | PAR |
| | | | 35 | 6,6 | AAR |
| Media | 7,9 | | Media | 6,8 | |
| Varianza | 6,511875205 | | Varianza | 3,552907533 | |

## Anexo 5: Calificaciones de Lección N° IV

| ESTUDIANTE Grupo tratamiento | LECCIÓN IV | | ESTUDIANTE Grupo control | LECCIÓN IV | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9,3 | DAR | 1 | 5,8 | PAR |
| 2 | 9,3 | DAR | 2 | 6,8 | AAR |
| 3 | 5,3 | PAR | 3 | 5,3 | PAR |
| 4 | 8,3 | AAR | 4 | 7,6 | AAR |
| 5 | 6,4 | PAR | 5 | 10,0 | SAR |
| 6 | 7,0 | AAR | 6 | 10,0 | SAR |
| 7 | 7,7 | AAR | 7 | 6,8 | AAR |
| 8 | 9,3 | DAR | 8 | 7,0 | AAR |
| 9 | 7,2 | AAR | 9 | 2,3 | NAR |
| 10 | 10,0 | SAR | 10 | 7,0 | AAR |
| 11 | 3,6 | NAR | 11 | 4,1 | NAR |
| 12 | 3,0 | NAR | 12 | 2,5 | NAR |
| 13 | 10,0 | SAR | 13 | 6,9 | AAR |
| 14 | 5,7 | PAR | 14 | 5,8 | PAR |
| 15 | 0,3 | NAR | 15 | 1,3 | NAR |
| 16 | 8,1 | AAR | 16 | 6,8 | AAR |
| 17 | 9,1 | DAR | 17 | 10,0 | SAR |
| 18 | 9,1 | DAR | 18 | 7,0 | AAR |
| 19 | 7,5 | AAR | 19 | 4,6 | PAR |
| 20 | 8,5 | DAR | 20 | 8,5 | DAR |
| 21 | 8,8 | DAR | 21 | 8,5 | DAR |
| 22 | 8,8 | DAR | 22 | 8,9 | DAR |
| 23 | 2,3 | NAR | 23 | 5,1 | PAR |
| 24 | 10,0 | SAR | 24 | 8,0 | AAR |
| 25 | 10,0 | SAR | 25 | 6,2 | PAR |
| 26 | 9,3 | DAR | 26 | 7,8 | AAR |
| 27 | 8,5 | DAR | 27 | 8,2 | AAR |
| 28 | 8,1 | AAR | 28 | 6,8 | AAR |
| 29 | 10,0 | SAR | 29 | 7,7 | AAR |
| 30 | 8,0 | AAR | 30 | 6,3 | PAR |
| 31 | 8,4 | AAR | 31 | 6,8 | AAR |
| 32 | 7,4 | AAR | 32 | 3,5 | NAR |
| 33 | 6,8 | AAR | 33 | 6,8 | AAR |
| | | | 34 | 6,7 | AAR |
| | | | 35 | 6,7 | AAR |
| Media | 7,6 | | Media | 6,6 | |
| Varianza | 5,494185064 | | Varianza | 4,145505244 | |

## Anexo 6: Calificaciones de Lección N° V

| ESTUDIANTE Grupo tratamiento | LECCIÓN V | | ESTUDIANTE Grupo control | LECCIÓN V | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9,0 | DAR | 1 | 7,2 | AAR |
| 2 | 9,3 | DAR | 2 | 7,0 | AAR |
| 3 | 4,7 | PAR | 3 | 4,7 | PAR |
| 4 | 7,0 | AAR | 4 | 7,0 | AAR |
| 5 | 7,3 | AAR | 5 | 10,0 | SAR |
| 6 | 9,7 | SAR | 6 | 9,3 | DAR |
| 7 | 5,2 | PAR | 7 | 7,2 | AAR |
| 8 | 9,0 | DAR | 8 | 6,0 | PAR |
| 9 | 3,8 | NAR | 9 | 2,2 | NAR |
| 10 | 10,0 | SAR | 10 | 4,3 | NAR |
| 11 | 3,8 | NAR | 11 | 3,8 | NAR |
| 12 | 5,2 | PAR | 12 | 2,0 | NAR |
| 13 | 10,0 | SAR | 13 | 7,3 | AAR |
| 14 | 4,7 | PAR | 14 | 5,8 | PAR |
| 15 | 0,5 | NAR | 15 | 3,2 | NAR |
| 16 | 8,5 | DAR | 16 | 7,2 | AAR |
| 17 | 9,3 | DAR | 17 | 8,5 | DAR |
| 18 | 9,7 | SAR | 18 | 7,3 | AAR |
| 19 | 5,5 | PAR | 19 | 1,5 | NAR |
| 20 | 9,7 | SAR | 20 | 9,7 | SAR |
| 21 | 9,6 | SAR | 21 | 8,5 | DAR |
| 22 | 10,0 | SAR | 22 | 7,3 | AAR |
| 23 | 1,3 | NAR | 23 | 6,2 | PAR |
| 24 | 10,0 | SAR | 24 | 8,2 | AAR |
| 25 | 8,2 | AAR | 25 | 5,2 | PAR |
| 26 | 9,3 | DAR | 26 | 7,0 | AAR |
| 27 | 7,0 | AAR | 27 | 7,2 | AAR |
| 28 | 9,0 | DAR | 28 | 5,8 | PAR |
| 29 | 10,0 | SAR | 29 | 6,8 | AAR |
| 30 | 7,3 | AAR | 30 | 7,2 | AAR |
| 31 | 8,7 | DAR | 31 | 4,2 | NAR |
| 32 | 6,3 | PAR | 32 | 5,7 | PAR |
| 33 | 9,3 | DAR | 33 | 5,8 | PAR |
| | | | 34 | 7,33 | AAR |
| | | | 35 | 5 | PAR |
| Media | 7,5 | | Media | 6,2 | |
| Varianza | 6,68129528 | | Varianza | 4,19419501 | |

## Anexo 7: Calificaciones de Lección final de unidad

| ESTUDIANTE Grupo tratamiento | LECCIÓN CIERRE DE UNIDAD | | ESTUDIANTE Grupo control | LECCIÓN CIERRE DE UNIDAD | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10,0 | SAR | 1 | 7 | AAR |
| 2 | 7,9 | AAR | 2 | 9 | DAR |
| 3 | 7,9 | AAR | 3 | 6 | PAR |
| 4 | 4,2 | NAR | 4 | 8 | AAR |
| 5 | 8,3 | AAR | 5 | 10 | SAR |
| 6 | 7,9 | AAR | 6 | 10 | SAR |
| 7 | 5,4 | PAR | 7 | 5 | PAR |
| 8 | 9,2 | DAR | 8 | 10 | SAR |
| 9 | 7,3 | AAR | 9 | 5 | PAR |
| 10 | 9,2 | DAR | 10 | 6 | PAR |
| 11 | 5,4 | PAR | 11 | 4 | NAR |
| 12 | 7,5 | AAR | 12 | 4 | NAR |
| 13 | 10,0 | SAR | 13 | 7 | AAR |
| 14 | 5,2 | PAR | 14 | 4 | NAR |
| 15 | 2,9 | NAR | 15 | 3 | NAR |
| 16 | 9,2 | DAR | 16 | 8 | AAR |
| 17 | 6,0 | PAR | 17 | 8 | AAR |
| 18 | 9,4 | DAR | 18 | 7 | AAR |
| 19 | 5,6 | PAR | 19 | 4 | NAR |
| 20 | 7,9 | AAR | 20 | 8 | AAR |
| 21 | 9,4 | DAR | 21 | 8 | AAR |
| 22 | 9,2 | DAR | 22 | 7 | AAR |
| 23 | 5,4 | PAR | 23 | 5 | PAR |
| 24 | 8,1 | AAR | 24 | 7 | AAR |
| 25 | 10,0 | SAR | 25 | 5 | PAR |
| 26 | 9,2 | DAR | 26 | 7 | AAR |
| 27 | 9,6 | SAR | 27 | 6 | PAR |
| 28 | 9,6 | SAR | 28 | 6 | PAR |
| 29 | 10,0 | SAR | 29 | 6 | PAR |
| 30 | 8,5 | DAR | 30 | 7 | AAR |
| 31 | 9,6 | SAR | 31 | 7 | AAR |
| 32 | 9,0 | DAR | 32 | 7 | AAR |
| 33 | 5,4 | PAR | 33 | 7 | AAR |
| | | | 34 | 6 | PAR |
| | | | 35 | 4 | NAR |
| Media | 7,9 | | Media | 6,5 | |
| Varianza | 3,6386593 | | Varianza | 3,164081633 | |

## Anexo 8: Correlación PBCC del grupo control

| PBCC | P1I1 | P1I2 | P1I3 | P1I4 | P1I5 | P1I6 | P1I7 | P1I8 | P1I9 | P1I10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Respuestas Correctas Mp** | 6,86 | 7,13 | 7,26 | 7,30 | 6,94 | 6,67 | 7,40 | 6,87 | 6,68 | 7,06 |
| **Respuestas Incorrectas Mq** | 6,00 | 5,18 | 5,08 | 5,00 | 6,06 | 6,00 | 5,33 | 4,40 | 6,10 | 6,00 |
| **Np** | 21 | 24 | 23 | 23 | 18 | 27 | 20 | 30 | 25 | 17 |
| **Nq** | 14 | 11 | 12 | 12 | 17 | 8 | 15 | 5 | 10 | 18 |
| **NpXNq** | 294 | 264 | 276 | 276 | 306 | 216 | 300 | 150 | 250 | 306 |
| **RAIZ NpXNq** | 17,15 | 16,25 | 16,61 | 16,61 | 17,49 | 14,70 | 17,32 | 12,25 | 15,81 | 17,49 |
| **Índice de discrinación (PBCC)** | 0,24 | 0,52 | 0,60 | 0,63 | 0,26 | 0,16 | 0,59 | 0,50 | 0,15 | 0,31 |

## Anexo 9: Correlación PBCC del grupo tratamiento

| PBCC | P1I1 | P1I2 | P1I3 | P1I4 | P1I5 | P1I6 | P1I7 | P1I8 | P1I9 | P1I10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Respuestas Correctas Mp** | 7,9 | 8,5 | 8,8 | 8,4 | 8,3 | 8,1 | 9,1 | 8,4 | 8,1 | 8,3 |
| **Respuestas Incorrectas Mq** | 6,7 | 5,3 | 5,7 | 4,2 | 6,3 | 5,8 | 6,2 | 4,4 | 6,8 | 5,7 |
| **Np** | 30 | 26 | 22 | 28 | 25 | 28 | 18 | 28 | 25 | 27 |
| **Nq** | 3 | 7 | 11 | 5 | 8 | 5 | 15 | 5 | 8 | 6 |
| **NpXNq** | 90 | 182 | 242 | 140 | 200 | 140 | 270 | 140 | 200 | 162 |
| **RAIZ NpXNq** | 9,49 | 13,49 | 15,56 | 11,83 | 14,14 | 11,83 | 16,43 | 11,83 | 14,14 | 12,73 |
| **Indice de discrinación (PBCC)** | 0,16 | 0,60 | 0,67 | 0,70 | 0,40 | 0,39 | 0,67 | 0,66 | 0,27 | 0,46 |