

AÑO: 2025

MATERIA: Álgebra lineal

EVALUACIÓN: Segunda

TIEMPO DE DURACIÓN: 120 minutos

PERIODO: SEGUNDO TERMINO

PROFESORES: Córdova Nelson, Delgado Erwin
Guale Ángel, Laveglia Franca, Mancero Isaac,
Martin Carlos, Ramírez John, Valdiviezo Janet,
Vielma Jorge.

FECHA: 22 de enero de 2026

COMPROMISO DE HONOR

Yo, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora alguna o cualquier instrumento de comunicación ajena al desarrollo del examen. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: _____

NÚMERO DE MATRÍCULA: _____

PARALELO: _____

1. (18 Puntos)

A continuación, encontrará 3 afirmaciones, donde debe determinar si estas son verdaderas o falsas. En cada caso debe justificar su elección, bien sea presentando alguna demostración, contraejemplo o cálculo.

- a. Sean V un espacio vectorial real dotado de un producto interno y $v, w \in V$, tal que $\langle v, w \rangle = 0$, entonces $\|v\| \leq \|v + \alpha w\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- b. Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios de la matriz $A \in M_{n \times n}$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2$ es valor propio de A .
- c. Si $T: \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ es una transformación lineal tal que $T(p)(x) = xp'(x) - p(x)$, entonces T es un isomorfismo.

2. (22 Puntos)

Sean V un espacio vectorial real, $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y $T: V \rightarrow \mathbb{P}_1$ una transformación lineal tal que $v_2 - v_1 \in \text{Ker}(T)$, $T(v_3 + v_1) = x + 1$ y $T(v_1 + v_2) = 4x + 2$.

- a. Verificar que $\{v_2 - v_1, v_3 + v_1, v_1 + v_2\}$ es una base de V .
- b. Determine la regla de correspondencia de T para un vector $av_1 + bv_2 + cv_3$ usando la base del literal anterior.

3. (22 Puntos)

En el espacio vectorial real $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se define el producto interno

$$\langle p(x), q(x) \rangle = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + 3a_2 b_2$$

donde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

Dado el subespacio $H = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 / p(-x) = p(x)\}$ y el vector $r(x) = 1 - x + x^2$,

- a. Determine $\text{proy}_H r(x)$.
- b. Encuentre el subespacio H^\perp .
- c. Determine una base ortonormal para H^\perp .

4. (22 Puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Determine si la matriz A es diagonalizable, en caso afirmativo, calcule matriz P que cumple $P^{-1}AP = D$.

5. (16 Puntos)

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, demuestre que T es inyectiva si y sólo si

$$Ker(T) = \{O_V\}$$