Facultad de
Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: 2019	PERIODO: SEGUNDO
MATERIA: **CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES**	PROFESOR:
EVALUACIÓN: SEGUNDA EVALUACIÓN	
TIEMPO DE DURACIÓN: 2 Horas	FECHA: ENERO 27 DE 2020

COMPROMISO DE HONOR

Yo, …… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que NO puedo usar calculadora; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: __________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** __________________ ***PARALELO:*** ________

PRIMER TEMA (6 puntos)

Dada la curva definida por $\vec{r}(t) = (\cos t, sen\, t, t-1); t \in R$, determine el o los puntos de la curva tales que su plano osculador en dicho(s) puntos(s) pase por el origen.

$$\overrightarrow{r'}(t) = (-sent, cost, 1)$$

$$\overrightarrow{r''}(t) = (-cost, -sent, 0)$$

El vector Binormal está dado por: $\vec{B} = \overrightarrow{r'}(t)\ X\ \overrightarrow{r''}(t) = (sent, -cost, 1)$

La ecuación del plano osculador en el punto $(cost, sent, t-1)$ es:

$$\big((x, y, z) - (cost, sent, t-1)\big) \cdot (sent, -cost, 1) = 0$$

La condición para que este plano pase por el origen es:

$$(cost, sent, t-1)\ \cdot (sent, -cost, 1) = 0$$

$$t - 1 = 0 \ \ \rightarrow t = 1$$

Entonces el punto corresponde a:

$\vec{r}(1) = (cos\ 1, sen\ 1, 0)$

Por lo tanto, el único punto de la curva para el cual el plano osculador pasa por el origen es el punto $(cos\ 1, sen\ 1, 0)$.

Rúbrica:

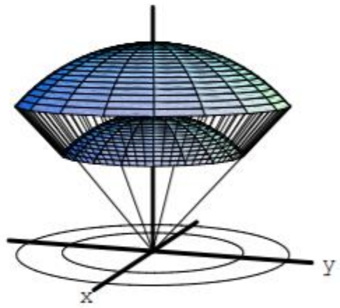
Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo determinar una condición para un plano osculador con base en los conceptos asociados a la derivada.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No obtiene los vectores velocidad y aceleración.	Obtiene los vectores velocidad y aceleración, pero no puede definir el vector binormal de manera correcta.	Obtiene los vectores velocidad el vector binormal, pero tiene problemas para establecer la ecuación del plano osculador o la condición de su punto que pasa por el origen.	Obtiene los vectores velocidad el vector binormal, la ecuación del plano osculador, establece la condición de su punto que pasa por el origen y obtiene este punto.
	0	1-2 puntos	3-5 puntos	6 puntos

SEGUNDO TEMA (7 puntos)

Dado el casquete esférico limitado por: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$; $x^2 + y^2 = z^2$; con $0 < a < b$ y $z \geq 0$:

- **a) Dibuje el sólido respectivo.**
- **b) Determine los límites de integración en coordenadas esféricas.**
- **c) Plantee la integral triple para el cálculo de volumen del sólido.**
- **d) Calcule el volumen del casquete esférico.**

Solución



Si escribimos el volumen en coordenadas esféricas, de acuerdo a la figura tenemos:

$$\begin{array}{lll} x = r\cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi & & a \leq r \leq b \\ y = r\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi & \text{donde} & 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \ . \\ z = r\cos\varphi & & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{array}$$

Recordando que el jacobiano de la transformación es $J = r^2 \operatorname{sen}\varphi$, el volumen se escribe ahora de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b dr \int_0^{\pi/4} d\pi \int_0^{2\pi} r^2 \operatorname{sen}\varphi d\vartheta = \left(\frac{r^3}{3}\Big|_a^b \right) \cdot \left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} \right) \cdot 2\pi \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3). \end{aligned}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo determinar el volumen de un sólido mediante integrales triples, utilizando coordenadas esféricas.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No puede bosquejar el escenario que lo conduce a la obtención del casquete esférico respectivo.	Bosqueja el casquete esférico y plantea coordenadas esféricas, pero comete errores en los límites de integración.	Bosqueja el casquete esférico, plantea coordenadas esféricas y los respectivos límites de integración, pero comete errores al realizar la integral triple.	Bosqueja el casquete esférico, plantea coordenadas esféricas, los respectivos límites de integración y calcula la integral triple, obteniendo el volumen esperado.
	0	1-3 puntos	4-6 puntos	7 puntos

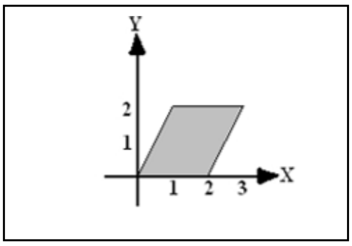
TERCER TEMA (9 puntos)

Utilizando la transformación $x = u + \frac{v}{2}$, $y = v$, evalúe la siguiente integral

$$\boldsymbol{I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+4}{2}} y^3\,(2x - y)e^{(2x-y)^2}\,dxdy}$$

$$0 \le y \le 2$$

$$\frac{y}{2} \le x \le \frac{y+4}{2}$$



Sea $T(u,v) = \left(u + \frac{v}{2}, v\right)$ donde $JT(u,v) = \left|\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$

Las curvas

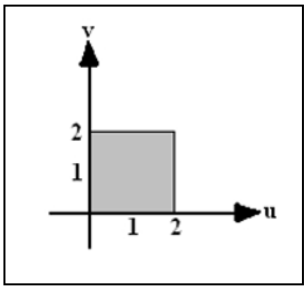
$$y = 0\ ,\ y = 2\ ,\ y = 2x\ ,\ y = 2x - 4$$

$$y = 0\ \rightarrow v = 0$$

$$y = 2 \rightarrow\ v = 2$$

$$y = 2x \rightarrow v = 2\left(u + \frac{v}{2}\right) \rightarrow u = 0$$

$$y = 2x - 4 \rightarrow v = 2\left(u + \frac{v}{2}\right) - 4 \rightarrow u = 2$$



$$I = \int_0^2 \int_0^2 v^3\, 2ue^{(2u)^2} dudv$$

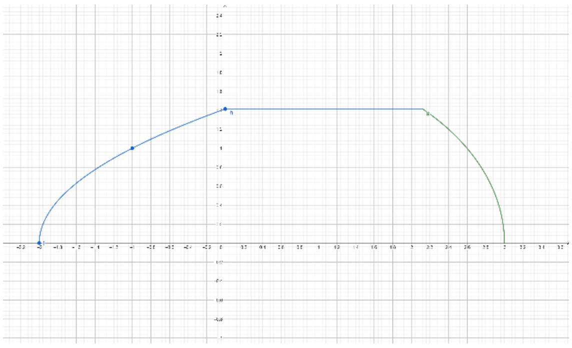
$$= \int_0^2 \int_0^2 v^3\, 2ue^{4u^2} dudv$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^2 v^3 \left(8ue^{4u^2} du\right) dv$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^2 v^3 \left[e^{4u^2}\right]_0^2 dv$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^2 v^3 \left[e^{16} - 1\right] dv$$
$$= \frac{(e^{16} - 1)}{4} \int_0^2 v^3\, dv$$
$$= \frac{(e^{16} - 1)}{4} \left[\frac{v^4}{4}\right]_0^2$$
$$= \frac{(e^{16} - 1)}{4} (4) = e^{16} - 1$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe aplicar cambio de variables a integrales dobles sobre regiones planas.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo abordar el ´problema o no aplica la definición que involucra el jacobiano.	Aplica la definición con el Jacobiano, pero no identifica bien la nueva región de integración.	Aplica bien la definición y ubica correctamente la región de integración, pero no calcula bien la integral.	Aplica bien la definición, ubica correctamente la región de integración y calcula la integral llegando al resultado correcto.
	0	1-3 puntos	4-8 puntos	9 puntos

CUARTO TEMA (9 puntos)

Dada la siguiente integral doble $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2-2}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} y\, dx\, dy$, cambie el orden de integración especificando la o las regiones de R^2 a considerar en el proceso y evalúe la integral doble original (barrido horizontal).



$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{2} \\ y^2 - 2 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

- De la primera ecuación:

$$x = y^2 - 2 \Rightarrow y = \sqrt{x+2}\,; y \geq 0$$

- De la segunda ecuación:

$$x = \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,; y \geq 0$$

Cuando $y = \sqrt{2}$, $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$, pero solo el punto $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ pertenece a la región. Para realizar el cambio de integración debemos considerar la siguiente región:

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ donde

$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, y = \sqrt{x+2}, -2 \leq x \leq 0\right\}$

$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, y = \sqrt{2},\ \ 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{2}\right\}$

$D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2},\ \frac{3}{2}\sqrt{2} \leq x \leq 3\right\}$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2-2}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} y\, dx\, dy = \int_{-2}^{0} \int_0^{\sqrt{x+2}} y\, dy\, dx + \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} y\, dy\, dx + \int_{\frac{3}{2}\sqrt{2}}^{3} \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{9-x^2}} y\, dy\, dx$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2-2}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} y\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} y\left[\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2} - y^2 + 2\right] dx\, dy$$

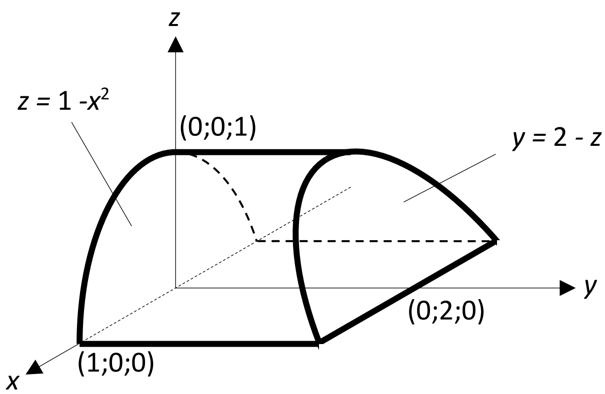
$$= -\frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{y^4}{4} + y^2\Big]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(2)^{\frac{3}{2}} - 1 + 2 + \frac{1}{2}(4)^{\frac{3}{2}} = 5 - \sqrt{2}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe cómo determinar una región de integración para cualquier orden de integración y cómo resolver una integral doble.	No sabe cómo Identificar la región de integración dada para luego realizar el cambio en los diferenciales. Comete errores y no llega a ningún dominio efectivo.	Interpreta el dominio de la integral dado pero comete errores y no llega a determinar la región usando el cambio de integración.	Interpreta el dominio de la integral dada y realiza el cambio en el orden de integración correctamente, pero no resuelve la integral.	Interpreta el dominio de la integral dada, realiza el cambio en el orden de integración correctamente y resuelve la integral llegando al resultado correcto
	0	1-3 puntos	4-8 puntos	9 puntos

QUINTO TEMA (9 puntos)

Siendo $\vec{F} = \left(xy,\ y^2 + e^{xz^2}, sen(xy)\right)$, utilizando el teorema de Gauss calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds}$ a través de la superficie frontera de la región Q acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$



div **F** = $y + 2y = 3y$

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E 3y dV$$

$$= 3 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{2-z} y dy dz dx = 3 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \frac{(z-2)^2}{2} dz\, dx$$

$$= 3 \int_{-1}^{1} \frac{1}{6} (-x^6 - 3x^4 - x^3 + 7x)\, dx = \frac{184}{35}$$

Rúbrica:

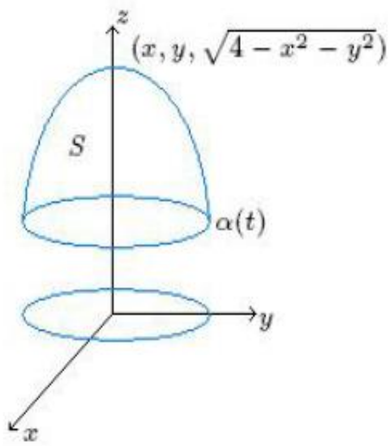
Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo aplicar el teorema de la divergencia para evaluar el efecto de un campo vectorial al atravesar una superficie.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No bosqueja correctamente el escenario planteado ni plantea correctamente el teorema respectivo.	Bosqueja correctamente la superficie cerrada, plantea el teorema de Gauss, pero tiene problemas en el cálculo de la divergencia del campo o en los límites de la integral triple.	Bosqueja correctamente la superficie cerrada, plantea el teorema de Gauss, calcula la divergencia del campo, pero tiene problemas para definir los límites de la integral triple o en el cálculo de integral.	Bosqueja correctamente la superficie cerrada, plantea el teorema de Gauss, calcula la divergencia del campo, define correctamente los límites de la integral triple y la evalúa obteniendo la respuesta deseada.
	0	1-3 puntos	4-8 puntos	9 puntos

SEXTO TEMA (10 puntos)

Compruebe el teorema de Stokes para $\int_C (y-2x)\,dx + (yz^2)\,dy - (y^2z)\,dz$, siendo C la curva dada por las ecuaciones $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) = (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2})$$

de esta forma $S = r(D)$ donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < 3\}$



se tiene que el vector normal es

$$N(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

Y el rotacional es $rotF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-2x & yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = (-4yz, 0, -1)$

$$\therefore \int\int_S rotF \cdot N dxdy = \int\int_D (-4xy-1)dxdy =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} (-4xy-1)dxdy \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -2x^2y - x \Big|_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -2(3-y^2)y - \sqrt{3-y^2} - \left[-2(-\sqrt{3-y^2})\right] y - \sqrt{3-y^2} == \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -2\sqrt{3-y^2} = -2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-y^2}dy =$$

$$-2\pi\frac{(\sqrt{3})^2}{2} = -3\pi$$

Para comprobar Stokes calculamos la integral curvilinea.

$\int_\alpha (y-2x)dx + yz^2dy - y^2zdz$ Siendo $\alpha = r \circ \gamma$, $\gamma(t) = (\sqrt{3}cos(t), \sqrt{3}sen(t))$

$\therefore \alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha(t) = r(\gamma(t)) = (\sqrt{3}cos(t), \sqrt{3}sen(t), 1)$

$\therefore$ la integral vale

$$\int_\alpha (y-2x)dx + yz^2dy - y^2zdz = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}sen(t) - 2\sqrt{3}cos(t), \sqrt{3}sen(t), -3sen^2(t)) \cdot (-\sqrt{3}sen(t), \sqrt{3}cos(t), 0) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-3sen^2(t) + 9sen(t)cos(t)dt = -3\pi$$

<u>Rúbrica:</u>

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo resolver una integral de línea de manera conceptual y aplicando el teorema de Stokes.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No puede plantear el problema de forma conceptual, parametrizando C, ni sabe como aplicar el teorema de Stokes.	Desarrolla parcialmente el método conceptual y aplicando el teorema de Stokes, pero comete errores en su desarrollo.	Desarrolla correctamente uno de los dos métodos, pero comente errores en el desarrollo del otro, sin lograr concluir la verificación respectiva.	Desarrolla correctamente los dos métodos y llega a las mismas respuestas, verificando de esta forma el teorema de Stokes.
	0	1-4 puntos	5-9 puntos	10 puntos