Estadística Matemática

Primera Evaluación

19 de noviembre de 2018

Nombre:____

1. Suponga que Z es una variable aleatoria con distribución de probabilidades $P(Z = 1) = P(Z = 3) = 0.25$ y $P(Z = 2) = 0.5$. Además, sea X una variable aleatoria con distribución condicional, dado $Z = j$, binomial con $n = 10$ y $p = j/4$, tal que

$$P(X = x|Z = j) = \binom{10}{x} \left(\frac{j}{4}\right)^{x} \left(1 - \frac{j}{4}\right)^{10-x}$$

   a. (10 puntos) Halle la distribución marginal de X, es decir $P(X = x)$ (SUGERENCIA: distribución marginal de X es la suma de la distribución conjunta sobre los valores de Z)

   b. (10 puntos) Halle la probabilidad condicional de $Z = 3$ dado que $X = 8$ (SUGERENCIA: teorema de bayes)

2. La distribución de Pareto tiene densidad

$$g(y) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{y^{\alpha+1}}, y > \beta.$$

Suponga que X tiene una distribución uniforme continua entre 0 y 1. Defina $Y = x^p$.

a. (10 puntos) Halle la distribución Y cuando $p > 0$

b. (10 puntos) Demuestre que cuando $p < 0$, la distribución de Y es Pareto

3. Suponga que X_n tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda = n$

   a. (10 puntos) Usando funciones generadoras de momentos, demuestre que

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0,1)$$

   b. (10 puntos) Demuestre que

$$\sqrt{X_n} - \sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} W \sim N\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

   (SUGERENCIA: La serie de Taylor truncada de $\sqrt{x}$ alrededor de a, es $\sqrt{x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$. Utilice este resultado para aproximar $\sqrt{X_n}$ alrededor de n y utilice luego el resultado del literal anterior)

4. (20 puntos) Usando funciones generadoras de momentos, demuestre que si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independiente con $X_i \sim \chi^2(\nu_i)$, entonces $Y = X_1 + \cdots + X_n$ también tiene distribución χ^2. Determine también los grados de libertad de Y.

5. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son iid con media μ y varianza σ^2. Sean

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{y} \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

a. (5 puntos) Demuestre que $\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$

b. (5 puntos) Demuestre que $\mathrm{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

c. (10 puntos) Demuestre que $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$