ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2018	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Argüello G., Avilés J., Baquerizo G., Chóez M., Díaz R., Laveglia F., Mejía M., Ramos P., Ramos M., Ronquillo C., Toledo X.
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	25/junio/2018

SOLUCIÓN y RÚBRICA

1) (5 PUNTOS) Suponga que $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función lineal tal que $f'(x) = 2$ y $f(-3) = 11$, determine su regla de correspondencia.

Solución:

Al ser una función lineal, su regla de correspondencia tiene la forma:

$$f(x) = ax + b\ ;\ \ a, b \in \mathbb{R}$$

De cuya expresión se deduce que $f'(x) = a$. Puesto que $f'(x) = 2$, concluimos que $a = 2$.

También se indica que $(-3, 11) \in f$, lo cual permite plantear la siguiente ecuación lineal:

$$11 = (2)(-3) + b \qquad \rightarrow \qquad b = 11 + 6 = 17$$

Por lo tanto, la función lineal que satisface las condiciones dadas es:

$$\boxed{f(x) = 2x + 17\ ;\ \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce sobre derivadas de funciones polinomiales.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No determina bien las constantes a y b de la función lineal.	Deriva bien pero no identifica el valor de la constante a.	Determina bien las dos constantes a y b, pero no puede escribir la regla de correspondencia.	Obtiene correctamente la regla de correspondencia de la función lineal.
	0	1	2 – 4	5

2) **(6 PUNTOS) Demuestre, de ser posible, que $\boldsymbol{y = 2\,x^3\,ln(x)}$ satisface la relación:**

$$\boldsymbol{x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0}$$

Solución:

Obtenemos la primera derivada:

$$y' = 2\,[x^3\,ln(x)]'$$
$$y' = 2\,\left[3x^2 \cdot ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x}\right]$$
$$y' = 2x^2\,(3\,ln(x) + 1)$$

Obtenemos la segunda derivada:

$$y'' = [2x^2\,(3\,ln(x) + 1)]'$$
$$y'' = 2[x^2\,(3\,ln(x) + 1)]'$$
$$y'' = 2\left[2x\,(3\,ln(x) + 1) + x^2\,\left(\frac{3}{x} + 0\right)\right]'$$
$$y'' = 2\,(6x\,ln(x) + 2x + 3x)$$
$$y'' = 2x\,(6\,ln(x) + 5)$$

Reemplazamos:

$$x^2[2x\,(6\,ln(x) + 5)] - 5x[2x^2\,(3\,ln(x) + 1)] + 9[2x^3\,ln(x)] = 0$$
$$12x^3\,ln(x) + \cancel{10x^3} - 30x^3\,ln(x) - \cancel{10x^3} + 18x^3\,ln(x) = 0$$
$$0 = 0$$

$\therefore$ La función dada satisface la relación.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre derivadas de orden superior.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No realiza bien la primera derivada.	**Deriva bien la primera vez, pero se equivoca en la segunda derivada.**	**Realiza bien la primera derivada y la segunda derivada, pero se equivoca en la verificación de la relación.**	**Obtiene correctamente las derivadas, verifica que se cumple la relación y adicionalmente concluye.**
	0	**1 – 2**	**3 – 4**	**5 – 6**

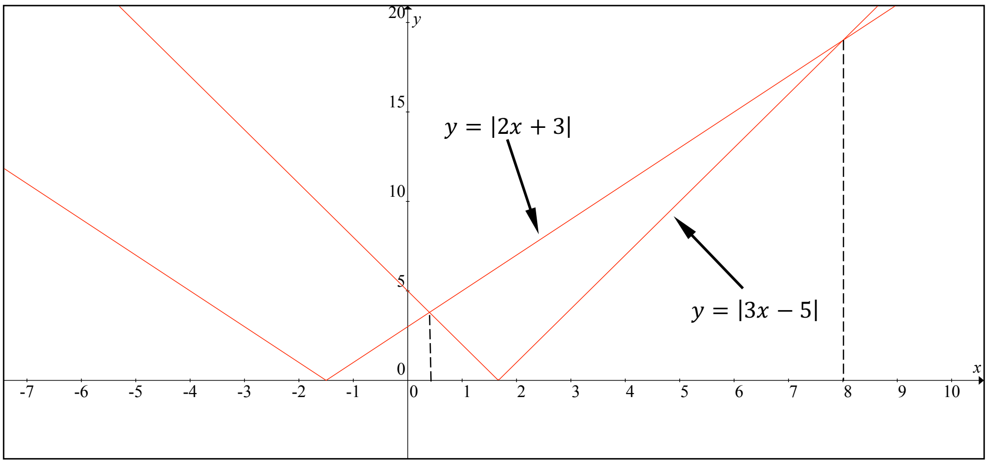
3) (5 PUNTOS) Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |3x-5| - |2x+3| > 0\}$, obtenga su conjunto derivado A'.

Solución:

Determinemos el conjunto A:

$$\begin{gathered} |3x-5| - |2x+3| > 0 \\ |3x-5| > |2x+3| \\ (3x-5)^2 > (2x+3)^2 \\ 9x^2 - 30x + 25 > 4x^2 + 12x + 9 \\ 5x^2 - 42x + 16 > 0 \\ (x-8)(5x-2) > 0 \\ A = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \left(x < \frac{2}{5}\right) \vee (x > 8)\right\} \end{gathered}$$

Este conjunto también se lo pudo haber obtenido en forma gráfica:



Aplicando la definición, el conjunto derivado es:

$$\boxed{A' = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \left(x \le \frac{2}{5}\right) \vee (x \ge 8)\right\}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre conjuntos derivados.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No puede determinar el conjunto A.	**Tiene problemas con la resolución de inecuaciones.**	**Determina el conjunto A, pero no su conjunto derivado.**	**Determina correctamente el conjunto derivado A′.**
	0	**1 – 3**	**4**	**5**

4) (6 PUNTOS) Considere las funciones $f: X \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g: X \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Justificando su respuesta, establezca si la proposición dada es VERDADERA O FALSA.

"Si $\lim\limits_{x \to c} (f+g)(x)$ existe y $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe, entonces $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ existe."

En caso de ser VERDADERA, demuéstrela; y, en caso de ser FALSA, proporcione un contraejemplo.

Solución:

A continuación se proporciona un posible contraejemplo:

Sean las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Por lo que:

$$(f+g)(x) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Identificamos las proposiciones simples:

a: $\lim\limits_{x \to 0} (f+g)(x)$ existe.
b: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe.
c: $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ existe.

La proposición compuesta es:

$$\underbrace{\left(\underbrace{a}_{1} \wedge \underbrace{\neg b}_{1}\right)}_{1} \to \underbrace{c}_{0} \equiv 0$$

$\therefore$ La proposición dada es FALSA.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante reconoce la característica y las propiedades de la continuidad de funciones de variable real.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Indica que la proposición es verdadera.	**Construye un contraejemplo pero tiene dificultades y lo hace en forma parcial.**	**Construye el contraejemplo pero no concluye que la proposición es falsa.**	**Proporciona un contraejemplo adecuado y concluye que la proposición es falsa.**
	0	**1 – 4**	**5**	**6**

Observación.- El estudiante puede proporcionar otro contraejemplo que evidencie que la proposición es falsa.

5) (7 PUNTOS) Dada la función $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right) \mapsto \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x+4}-2}, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ 4, & x = 0 \\ \dfrac{3^{6x}-3^{2x}}{x\,ln(3)}, & x > 0 \end{cases}$$

Determine si f es continua en $x = 0$.

Solución:

Para que f sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Podemos observar que la función sí se encuentra definida en $x = 0$, pues con base en la regla de correspondencia tenemos que $f(0) = 4$.

Para obtener $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, calculamos los límites laterales:

- Límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{tan(x)}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{cos(x)\left(\sqrt{x+4}-2\right)} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$
$$= \left(\lim_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{cos(x)\left[\left(\sqrt{x+4}\right)^2 - 2^2\right]}\right)\left(\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x+4}+2\right)$$
$$= \left(\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{cos(x)}\right)\left(\lim_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{x}\right)\left(\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x+4}+2\right) = (1)(1)(4) = 4$$

- Límite lateral por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3^{6x}-3^{2x}}{x\,ln(3)} = \frac{1}{ln(3)} \lim_{x \to 0^+} \frac{(3^{6x}-1)-(3^{2x}-1)}{x}$$
$$= \frac{1}{ln(3)}\left[\left(\lim_{x \to 0^+} \frac{3^{6x}-1}{x}\right) - \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{3^{2x}-1}{x}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{ln(3)}[6\,ln(3) - 2\,ln(3)] = \frac{\cancel{ln(3)}}{\cancel{ln(3)}}[6-2] = 4$$

Debido a que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, concluimos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$.

$\therefore$ Puesto que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 4$, la función f es continua en $x = 0$.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce sobre la continuidad de funciones de variable real y cálculo de límites a partir de límites notables.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No plantea la condición de continuidad, ni calcula límites laterales, ni evalúa la función.	Calcula bien solamente uno de los dos límites laterales.	Calcula bien los dos límites laterales, pero no concluye correctamente sobre la función evaluada.	Calcula correctamente los límites laterales, compara con la función evaluada y concluye que es continua.
	0	1 – 3	4 – 6	7

6) (7 PUNTOS) Dada la curva:

$$\boldsymbol{x\, sen(y) + x^3 = arc\, tan(e^y) + x - \frac{\pi}{4}}$$

Determine la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\boldsymbol{P_0(1, 0)}$.

Solución:

Derivamos en forma implícita:

$$\frac{d}{dx}[x\, sen(y) + x^3] = \frac{d}{dx}\left[arc\, tan(e^y) + x - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{d}{dx}[x\, sen(y)] + \frac{d}{dx}[x^3] = \frac{d}{dx}[arc\, tan(e^y)] + \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}\left[-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$x\, cos(y) \cdot \frac{dy}{dx} + 1 \cdot sen(y) + 3x^2 = \frac{1}{1 + (e^y)^2} \cdot e^y \cdot \frac{dy}{dx} + 1 + 0$$

$$x\, cos(y) \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{e^y}{1 + e^{2y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 - sen(y) - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x\, cos(y) - \frac{e^y}{1 + e^{2y}}\right) = 1 - sen(y) - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - sen(y) - 3x^2}{x\, cos(y) - \frac{e^y}{1 + e^{2y}}}$$

Calculamos el valor de la pendiente:

$$m_T = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = \frac{1 - sen(0) - 3(1)^2}{(1)\,cos(0) - \dfrac{e^0}{1+e^0}} = \frac{1-3}{1-\dfrac{1}{2}} = \frac{-2}{\dfrac{1}{2}} = -4$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 0 = -4(x-1)$$

$$\boxed{y = -4x + 4\,;\ \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar en forma implícita, la regla de la suma y una función trigonométrica inversa; y, puede obtener la ecuación de una recta tangente.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No aplica bien regla o técnica alguna de derivación que está presente en el ejercicio.	**Deriva bien en forma implícita, pero se equivoca al evaluar para calcular la pendiente de la recta tangente.**	**Calcula bien la pendiente de la recta tangente pero se equivoca en la ecuación de la recta.**	**Obtiene correctamente la pendiente de la recta tangente y su ecuación respectiva.**
	0	**1 – 4**	**5 – 6**	**7**

7) (7 PUNTOS) Dada la curva en coordenadas polares $r = 4\ sen(2\theta)$, obtenga:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta_0=\pi/6}$$

Solución:

Para determinar $\frac{dy}{dx}$ a partir de $r = f(\theta) = 4\ sen(2\theta)$, se emplea derivación polar teniendo en cuenta que:

$$x = r\ cos(\theta) = 4\ sen(2\theta)\ cos(\theta)$$

$$y = r\ sen(\theta) = 4\ sen(2\theta)\ sen(\theta)$$

Ahora, por definición:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{d}{d\theta}[4\,sen(2\theta)\,sen(\theta)]}{\frac{d}{d\theta}[4\,sen(2\theta)\,cos(\theta)]}$$

$$=\frac{\cancel{4}\left[\left(4\,sen(2\theta)\right)'\,sen(\theta)+4\,sen(2\theta)\,cos(\theta)\right]}{\cancel{4}\left[\left(4\,sen(2\theta)\right)'\,cos(\theta)-4\,sen(2\theta)\,sen(\theta)\right]}$$

$$=\frac{8\,cos(2\theta)\,sen(\theta)+4\,sen(2\theta)\,cos(\theta)}{8\,cos(2\theta)\,cos(\theta)-4\,sen(2\theta)\,sen(\theta)}$$

$$=\frac{2\,cos(2\theta)\,sen(\theta)+sen(2\theta)\,cos(\theta)}{2\,cos(2\theta)\,cos(\theta)-sen(2\theta)\,sen(\theta)}$$

Evaluando:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6}=\frac{2\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6}=\frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\frac{5}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6}=\frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar una ecuación polar, funciones trigonométricas y la regla de la cadena.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce sobre derivación polar.	**Realiza bien, o la derivada polar del numerador o la del denominador.**	**Realiza bien la primera derivada (con las expresiones simplificadas) pero se equivoca al evaluar.**	**Conoce la técnica de derivación polar, la regla de la cadena, los valores de las funciones trigonométricas y obtiene el resultado correcto.**
	0	**1 – 3**	**4 – 6**	**7**

8) (7 PUNTOS) Obtenga $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2}$ para la curva dada en forma paramétrica:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \dfrac{2at}{1+t^2}} \\ \boldsymbol{y(t) = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}} \end{cases} ;\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$$

Solución:

Por derivación paramétrica, la primera derivada $\frac{dy}{dx}$ se calcula así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}\right)}{\frac{d}{dt}\left(\frac{2at}{1+t^2}\right)} = \frac{\frac{(1+t^2)\cdot a(-2t) - a(1-t^2)\cdot(2t)}{\cancel{(1+t^2)^2}}}{\frac{(1+t^2)(2a) - 2at(2t)}{\cancel{(1+t^2)^2}}}$$

$$= \frac{-2at - \cancel{2at^3} - 2at + \cancel{2at^3}}{2a + 2at^2 - 4at^2} = \frac{-4at}{2a - 2at^2}$$

$$= \frac{-4\cancel{a}t}{2\cancel{a}(1-t^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2t}{1-t^2}$$

Evaluando:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = -\frac{2(2)}{1-2^2} = \cancel{-}\frac{4}{\cancel{-}3}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = \frac{4}{3}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre derivadas de ecuaciones paramétricas y la regla de derivación del cociente.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce sobre derivación paramétrica.	**Realiza bien, o la derivada paramétrica del numerador o la del denominador.**	**Realiza bien la primera derivada (con las expresiones simplificadas) pero se equivoca al evaluar.**	**Sabe la técnica de derivación paramétrica, evalúa correctamente y obtiene el resultado solicitado.**
	0	**1 – 3**	**4 – 6**	**7**