Facultad de
Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: **2025**

MATERIA: **Álgebra lineal**

EVALUACIÓN: Tercera

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

PERIODO: **SEGUNDO TERMINO**

PROFESORES: Córdova Nelson, Delgado Erwin Guale Ángel, Laveglia Franca, Mancero Isaac, Martin Carlos, Ramírez John, Valdiviezo Janet, Vielma Jorge.

FECHA: 05 de febrero de 2026

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora alguna o cualquier instrumento de comunicación ajena al desarrollo del examen. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"*Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar*".

FIRMA: ________________________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ___________________ ***PARALELO:*** _______

1. ***(20 Puntos)***

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales sobre el campo de los reales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = b_1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b_2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_4 = b_3 \end{cases}$$

Califique **justificadamente** cada una de las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas

a. Si el sistema es homogéneo tiene infinitas soluciones
b. Sean $X, Y \in \mathbb{R}^4$ soluciones del sistema de ecuaciones, entonces $X + Y$ también es una solución del sistema de ecuaciones.
c. Sean $X, Y \in \mathbb{R}^4$ soluciones del sistema de ecuaciones, entonces $\frac{1}{2}(X + Y)$ también es una solución del sistema de ecuaciones.
d. Si se elimina la variable x_4, el sistema es consistente.

2. *(20 Puntos)*

Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = -1 \right\}$ un subespacio vectorial del espacio ($\mathbb{R}^3$,$\oplus$,$\odot$).

con las operaciones:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1+}a_2 + 2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + 2\lambda - 2 \\ \lambda b \\ \lambda c - \lambda + 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Determine si el conjunto $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para el subespacio H.

3. (20 Puntos)

Sea

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a la transformación lineal $T: P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ respecto a las bases

$$\beta_1 = \{1, x\} \ \ (base\ de\ P_1(\mathbb{R})) \ \ y \ \ \beta_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \ \ (base\ de\ \mathbb{R}^2).$$

a. Demuestre que T es un isomorfismo.

b. Determine la matriz de T^{-1} respecto a las bases β_2 y β_1.

c. Halle la regla de correspondencia de T^{-1}.

4. (20 Puntos)

Sea $M_{2x2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de orden 2 con las operaciones convencionales y sea T: $M_{2x2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2x2}(\mathbb{R})$, dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Determine la proyección de $v = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ sobre el núcleo de la transformación.

5. (20 Puntos)

Sea $A_{3\times3}$ una matriz real simétrica. Si el conjunto:

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ a + 2b \ - \ c = 0 \right\}$$

es el espacio característico asociado a $\lambda_1 = 2$, valor propio de la matriz A. Entonces:

a. Determine si A es diagonalizable.

b. Si el otro valor propio de A es $\lambda_2 = -3$, encuentre el respectivo espacio característico.

c. Halle, de ser posible, una matriz que diagonalize ortogonalmente a la matriz A.