AÑO: 2025

MATERIA: **Álgebra lineal**

EVALUACIÓN: Tercera

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

PERIODO: **PRIMER TERMINO**

PROFESORES: Bracamonte Mireya, Cabezas José, Córdova Nelson, Laveglia Franca, Marchan Elimar, Martín Carlos, Pastuizaca María Nela, Ramírez John, Valdiviezo Janet.

FECHA: 11 de septiembre de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora alguna o cualquier instrumento de comunicación ajena al desarrollo del examen. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: _____

NÚMERO DE MATRÍCULA: _____

PARALELO: _____

1. (18 Puntos)

A continuación, encontrará 3 afirmaciones, donde debe determinar si estas son verdaderas o falsas. En cada caso debe justificar su elección, bien sea presentando alguna demostración, contraejemplo o cálculo.

- a. Si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente en un K -espacio vectorial V , de dimensión n , entonces el conjunto de sus correspondientes vectores de coordenadas respecto a cualquier base β también lo es.
- b. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K . Sean H y W dos subespacios de V . Si $H \cap W = \{0_V\}$ entonces $H + W = V$.
- c. Para cada vector v y cada subespacio W de un K -espacio vectorial V se tiene que $v - \text{proy}_W v$ es ortogonal a todo vector en W .

2. (20 Puntos)

Sea $V = \mathbb{R}^4$. Se definen los siguientes subconjuntos de V :

$$U = \{v \in V / Av = 0_{\mathbb{R}^2}\}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$W = \{w \in V / w = Bt \text{ para algún } t \in \mathbb{R}^2\}, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a. Demuestre que U es un subespacio vectorial de V .
- b. Determine $U \cap W$.

3. (20 Puntos)

Considere el subespacio $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^3$, en caso de que sea posible, construya una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ en $P_2(\mathbb{R})$, tal que:

$$\text{Ker}(T) = H^\perp, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 1, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x - 1.$$

4. (22 Puntos)

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- ¿Es la matriz A diagonalizable ortogonalmente? Justifique su respuesta.
- Determine la multiplicidad algebraica de cada uno de los valores característicos de A y describa los correspondientes espacios característicos.
- Si la respuesta en el literal a. es verdadera, encuentre la matriz Q tal que $Q^t A Q$ sea una matriz diagonal.

5. (20 Puntos)

Se define la función $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Demuestre que esta función define un producto interno sobre el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$.