

Año:	2025	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Colón Mario Céller
Evaluación:	Tercera	Fecha:	9 de febrero de 2026

### **COMPROMISO DE HONOR**

Yo, \_\_\_\_\_, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.**

“Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar”.

Firma: \_\_\_\_\_ Número de matrícula: \_\_\_\_\_ Paralelo: \_\_\_\_\_

1. Un proceso químico de segundo orden implica la interacción (colisión) de una molécula de una sustancia  $P$  con una molécula de una sustancia  $Q$  para producir una molécula de una nueva sustancia  $Y$ ; esto se denota por  $P + Q \rightarrow Y$ . Supóngase que  $p$  y  $q$ , con  $p \neq q$ , son las concentraciones iniciales de  $P$  y  $Q$ , respectivamente, y sea  $y(t)$  la concentración de  $Y$  en el tiempo  $t$ . Entonces  $p - y(t)$  y  $q - y(t)$  son las concentraciones de  $P$  y  $Q$  en el tiempo  $t$ , respectivamente, y la velocidad a la que ocurre la reacción está dada por la ecuación

$$y' = k(p - y)(q - y),$$

donde  $k$  es una constante positiva.

- (a) (16 puntos) Si  $y(0) = 0$ , halle explícitamente  $y(t)$ , para todo  $t$ .  
(b) (4 puntos) ¿Qué ocurre con la concentración de  $Y$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

2. Se sabe que la función  $y_1(t) = e^t$  es solución de la ecuación diferencial

$$(1-t)y'' + ty' - y = 0, \quad 0 < t < 1.$$

(a) (6 puntos) Halle otra solución  $y_2$  linealmente independiente de  $y_1$ . *Sugerencia:* Es posible hallar tal solución por simple inspección.

(b) (6 puntos) Calcule el wronskiano  $W[y_1, y_2]$  de las funciones  $y_1$  y  $y_2$  de la parte (a).

(c) (8 puntos) Use los resultados de las partes (a) y (b) para hallar la solución general de ecuación diferencial

$$(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2 e^{-t}, \quad 0 < t < 1.$$

3. Sea  $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$  definida por

$$T(A) = AB - A^t,$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) (6 puntos) Demuestre que  $T$  es una transformación lineal.
- (b) (8 puntos) Encuentre una base para el núcleo de  $T$ .
- (c) (6 puntos) Encuentre todas las matrices  $A \in M_{2 \times 2}$  que satisfacen

$$T(A) = -A.$$

4. (20 puntos) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + 3y_2, & y_1(0) &= 1 \\y_2' &= 4y_1 + 2y_2 & y_2(0) &= -1.\end{aligned}$$

5. (20 puntos) Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + 4y = \sin t + H(t - \pi) \sin(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$