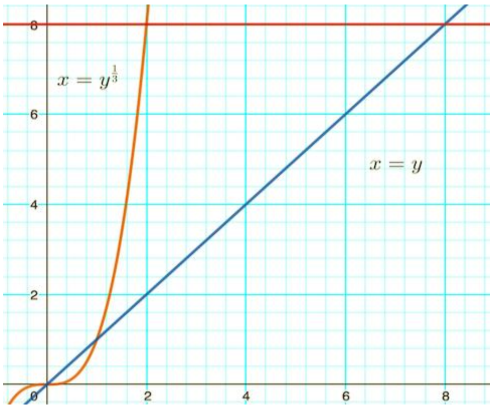
**CÁLCULO VECTORIAL – PAO2 2022**
**SOLUCIÓN Y RÚBRICA EXAMEN FINAL**
**Enero 23 de 2023**

**PRIMER TEMA (30 puntos)**

**a) Al invertir el orden de integración de** $\int_1^2 \int_x^{x^3} f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^8 \int_x^8 f(x,y)\,dy\,dx$ **se obtiene la integral** $\int_1^8 \int_{y^{\frac{1}{3}}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$

**VERDADERO**

La suma de las dos integrales dadas origina la región mostrada en la siguiente figura:




Al considerar el barrido horizontal para que cumplamos con el cambio de orden de integración, notamos que en $x$ va de $x = y^{\frac{1}{3}}$ hasta $x = y$ y en $y$ va de $y = 1$ a $y = 8$, con lo cual, nos queda una sola integral:

$$\int_1^8 \int_{y^{\frac{1}{3}}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe bosquejar una region plana e invertir el orden de integración de integrales dobles. | Inicial | En desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| | No puede bosquejar correctamente la región plana a partir de los límites de integración dados. | Bosqueja correctamente la región plana requerida para visualizar el barrido vertical. | Plantea la integral con barrido vertical pero comete errores en el proceso. | Expresa sin errores la integral doble solicitada con el barrido vertical y comprueba que la proposición es verdadera. |
| | 0-2 | 3-4 | 5-9 | 10 |

**b) Si $\vec{r}$ es el campo vectorial radial $\vec{r}\,(x,y,z)=(x,y,z)$ y $r=\|\vec{r}\|$, entonces $div(r^2\,\vec{r})=6r^2$**

**FALSO**

$$r=\|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$r^2\,\vec{r}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)(x,y,z)$$

$$r^2\,\vec{r}=\left(x(x^2+y^2+z^2),y(x^2+y^2+z^2),z(x^2+y^2+z^2)\right)$$

**luego:**

$$div(r^2\,\vec{r})=\frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y(x^2+y^2+z^2)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z(x^2+y^2+z^2)\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(x^3+xy^2+xz^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+y^3+yz^2)+\frac{\partial}{\partial z}(x^2z+y^2z+z^3)$$

$$=3x^2+y^2+z^2+x^2+3y^2+z^2+x^2+y^2+3z^2=5(x^2+y^2+z^2)=5r^2\neq 6r^2$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Inicial | En desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| El estudiante sabe calcular la divergencia de un campo vectorial. | Obtiene correctamente el valor de $\boldsymbol{r}$ | Determina correctamente la expresión vectorial $\boldsymbol{r^2\,\vec{r}}$ | Plantea la expresión de la divergencia solicitada pero comete errores en su desarrollo. | Expresa sin errores la divergencia solicitada y comprueba que la proposición es falsa. |
| | 0-1 | 2-4 | 5-9 | 10 |

**c) La función $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ tiene un punto de silla en el punto (1,1) de su dominio.**

**FALSO**

Para encontrar los puntos críticos de la función $f$ calculamos su gradiente y lo igualamos a $\vec{0}$ :

$$\nabla f=(4x^3-4y,4y^3-4x)=(0,0)$$

De donde: $y=x^3$ , $x=y^3$ , entonces, $x=x^9$

Los 3 puntos críticos que tiene $f$ son entonces: $(0,0),(1,1),(-1,-1)$

Para clasificar los puntos críticos calculamos la matriz Hessiana:

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\det H = 144\, x^2y^2 - 16$$

En el punto $(1,1)$ el $\det H > 0$ , por lo tanto, representa un mínimo.

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe determinar si una función escalar de dos variables posee puntos de silla. | Inicial | En desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| | Obtiene el gradiente de $f$ y lo iguala con el vector cero. | Determina los tres puntos críticos correspondientes. | Obtiene la matriz hessiana de $f$ y su respectivo determinante. | Clasifica los puntos críticos y determina que en (1,1) existe un mínimo, comprobando que la proposición es FALSA. |
| | 0-2 | 3-5 | 5-8 | 9-10 |

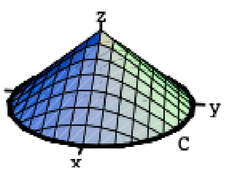
**SEGUNDO TEMA (25 puntos):**

**Calcule la circulación del campo $\vec{a} = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$ a lo largo del circuito limitado por $z = 0$ y $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$**

**a) Utilizando integrales de línea (12 puntos)**

Para calcular la circulación del campo, buscamos una parametrización de la curva dada. En este caso,

$$C : \begin{cases} z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \\ z = 0 \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$




Así pues,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{a}\, ds &= \int_0^{2\pi} (2\cos t, 8\cos^3 t, -24\cos t\,\mathrm{sen}^2 t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\,\mathrm{sen}\, t\cos t + 16\cos^4 t)\, dt = 12\pi. \end{aligned}$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Inicial | En desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| El estudiante sabe calcular la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva suave C, utilizando el método tradicional. | Con la ayuda de un bosquejo de las superficies dadas, parametriza la curva limitada por ellas. | Obtiene las expresiones dx, dy, dz., y plantea la integral de línea respectiva. | Desarrolla la integral de línea del campo vectorial a lo largo de la curva parametrizada. | Calcula sin errores la integral de línea solicitada llegando a obtener el valor $12\,\pi$. |
| | 0-3 | 4-6 | 7-11 | 12 |

**b) Utilizando el teorema de Stokes (13 puntos).**

Si queremos aplicar el teorema de Stokes, llamamos $S$ al interior del círculo limitado por la curva $C$ y calculamos el rotacional del campo vectorial. Como

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ x - z & x^3 + yz & -3xy^2 \end{vmatrix} = (-6xy - y, -1 + 3y^2, 3x^2),$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_C \overrightarrow{a}\, ds &= \iint_S \operatorname{rot} \overrightarrow{a}\, dS \\ &= \iint_S (-6xy - y, -1 + 3y^2, 3x^2) \cdot (0,0,1)\, dxdy = \iint_S 3x^2\, dxdy. \end{aligned}$$

Resolvemos la integral mediante un cambio a coordenadas polares, $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, con $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$. Como el jacobiano de la transformación es $J = u$, resulta:

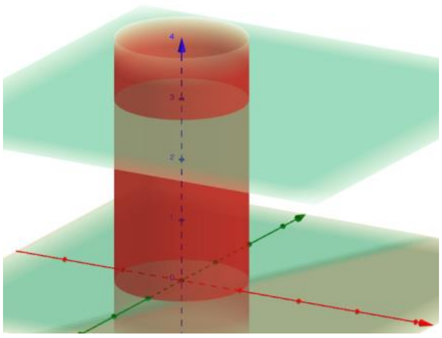
$$\iint_S 3x^2\, dxdy = \int_0^2 du \int_0^{2\pi} 3u^3 \cos^2 v\, dv = 12\pi.$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe calcular la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva suave C, utilizando el teorema de Stokes. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | Calcula el rotacional del campo vectorial dado. | Plantea el teorema de Stokes por medio de la respectiva integral de superficie, llevando el integrando a su expresión final en cartesianas. | Cambia a coordenadas polares y plantea la integral doble respectiva, pero comete errores en su desarrollo. | Calcula sin errores la integral doble en coordenadas polares llegando a obtener el valor $12\,\pi$. |
| | 0-3 | 4-7 | 8-12 | 13 |

**TERCER TEMA (15 puntos)**

**Utilizando el teorema de Gauss, calcule el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$ a través de la superficie cerrada que limita el cilindro $x^2 + y^2 \leq R^2$ con $0 \leq z \leq 3$**



$$\int_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx dy dz,$$

siendo $V \subset \mathbb{R}^3$ el volumen limitado por la superficie $S$. En primer lugar calculamos la divergencia de $F$

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = z - 2y + x.$$

La forma más conveniente de realizar la integral en el conjunto $V$ es hacer un cambio a coordenadas cilíndricas, ya que por ser $V$ un cilindro el recinto de integración en estas variables es un rectángulo, es decir,

$$\rho \in ]0, R[\,, \quad \varphi \in ]0, 2\pi[\,, \quad z \in ]0, 3[.$$

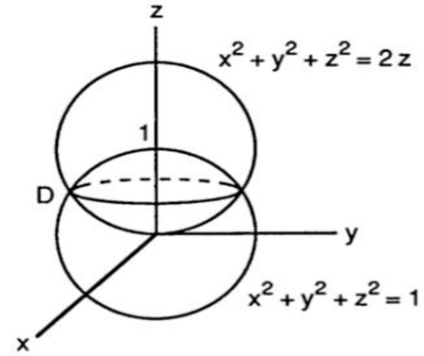
Entonces,

$$\int_S F \cdot n\, dS = \iiint_V \mathrm{div} F\, dxdydz = \iiint_V (z - 2y + x)\, dxdydz =$$
$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^3 (z - 2\rho \sin\varphi + \rho\cos\varphi)\rho\, dz d\varphi d\rho =$$
$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} (\frac{9}{2}\rho - 6\rho^2 \sin\varphi + 3\rho^2 \cos\varphi) d\varphi d\rho = \int_0^R 9\pi\rho d\rho = \frac{9}{2}\pi R^2$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe calcular el flujo de un campo vectorial a través de una supercicie cerrada utilizando el teorema de Gauss. | Inicial | En desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| | Calcula la divergencia del campo vectorial dado. | Plantea el teorema de Gauss por medio de la respectiva integral de volumen, en coordenadas cartesianas. | Reconoce que lo mejor es cambiar la integral triple a coordenadas cilíndricas y plantea la integral respectiva, pero comete errores en su desarrollo. | Calcula sin errores la integral triple en coordenadas cilíndricas llegando a obtener el valor deseado. |
| | 0-3 | 4-7 | 8-14 | 15 |

**CUARTO TEMA ( 20 puntos)**
**Utilizando integrales triples y un cambio a coordenadas cilíndricas calcule el volumen común a los interiores de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$**



El casquete superior de $x^2+y^2+z^2=1$ es $z=+\sqrt{1-\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{y^2}}$

La esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ es $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ (completando cuadrados), por lo tanto el casquete inferior es $z=1-\sqrt{1-x^2+y^2}$

Entonces, el casquete superior es la frontera superior de D y el casquete inferior es la frontera inferior de D.

Procedemos a determinar la proyección sobre el plano XY de la intersección de ambas esferas:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \rightarrow \; x^2+y^2=1-z^2 \;\rightarrow\; 1-z^2+(z-1)^2=1 \rightarrow\; z=\frac{1}{2}$$

Como ambas esferas se cortan en $z=\frac{1}{2}$, la proyección de su intersección será: $x^2+y^2=\frac{3}{4}$

Describimos la región tridimensional D en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x=r\cos(\theta) \\ y=r\,sen(\theta) \\ z=z \end{cases} ; J(r,\theta,z)=r \;\rightarrow\; 0\le r\le\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; 0\le\theta\le 2\pi \; ; 1-\sqrt{1-r^2} \le z\le\sqrt{1-r^2}$$

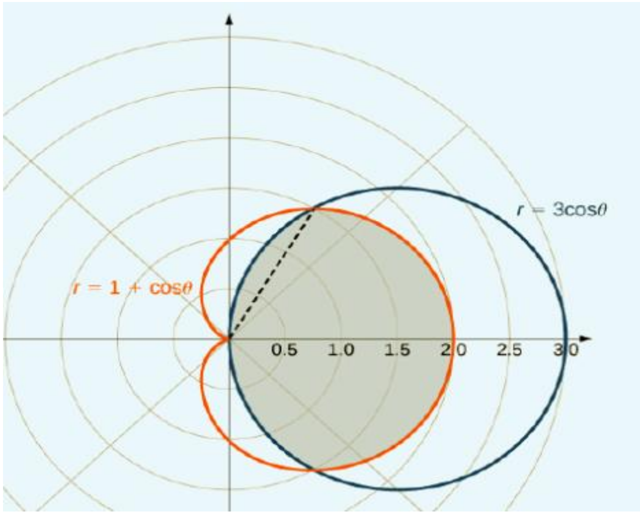
$$V=\iiint_D dx\,dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(2r\sqrt{1-r^2}-r\right)dr=$$

$$V=2\pi\left[-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{5}{12}\,u^3$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe calcular el volumen limitado por dos superficies con un cambio de coordenadas conveniente. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | Realiza un bosquejo adecuado del escenario para poder visualizar el volumen solicitado. | Determina las ecuaciones que representan las fronteras superior e inferior de los casquetes producto de la intersección de las dos esferas y realiza la proyección de la curva intersección sobre el plano XY. | Obtiene la expresión de la proyección sobre el palno XY y plantea el cambio a coordenadas cilíndricas pero comete errores en su desarrollo. | Calcula sin errores la integral triple en coordenadas cilíndricas llegando a obtener el valor requerido de volumen. |
| | 0-4 | 5-12 | 13-19 | 20 |

**QUINTO TEMA (10 puntos)**
**Utilizando integrales dobles calcule el área limitada por las curvas $\boldsymbol{r = 3\,cos(\theta)}$ y $\boldsymbol{r = 1 + cos(\theta)}$**




Una vez bosquejados en el plano polar, tanto la circunferencia como el cardioide, podemos a partir de reconocer la simetría de la gráfica hallar los puntos de intersección:

$$3\cos(\theta) = 1 + \cos(\theta)$$

De dpnde obtenemos que uno de los puntos de intersección es $\theta = \frac{\pi}{3}\,rad$

Entonces, el área por encima del eje polar consta de dos partes, con una parte definida por el cardioide de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{3}\,rad$ y otra parte definida por el círculo de $\theta = \frac{\pi}{3}\,rad$ a $\theta = \frac{\pi}{2}\,rad.$

Por simetría, el área total es el doble del área por encima del eje polar, por lo tanto nos queda:

$$A = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\,cos\theta} r\,dr\,d\theta\right] =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16} + \frac{3\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16}\right) = 2\left(\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$A = \frac{5\pi}{4}\,u^2$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe calcular el área de la superficie limitada por dos curvas polares utiizando integrales dobles. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | Reconoce que las curvas involucradas son una circunferencia y un cardioide, y bosqueja la región solicitada, producto de su intersección. | Trabaja algebraicamente la igualdad de las expresiones para obtener los puntos de intersección de las curvas y por ende los límites de integración respectivos. | Aprovecha la condición de simetría, plantea la suma de las dos integrales dobles requeridas, pero comete errores en su desarrollo. | Calcula sin errores las dos integrales dobles, multiplica la suma de sus valores por 2 para cumplir con la simetría y obtiene el valor solicitado del área de la superficie. |
| | 0-2 | 3-5 | 6-9 | 10 |