

Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal

Examen de mejoramiento

5 de febrero de 2021

1. (20 puntos) Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad t > 0.$$

Use el hecho de que $\varphi_1(t) = t^2$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

2. (20 puntos) Sea $V = \mathbb{M}_{2 \times 2}$ es el espacio vectorial de las matrices reales 2×2 . Sean

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a - b - c - d = 0 \right\}$$

y

$$W = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Halle una base para $H + W$.

3. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T(x, y, z) = (2x + y + z, y - 3z)$.
- a) (10 puntos) Halle la matriz de T respecto a las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1, -1), (2, 3)\}$.
- b) (10 puntos) Halle $\mathcal{N}(T)$, $\mathcal{I}m(T)$, $\dim \mathcal{N}(T)$ y $\dim \mathcal{I}m(T)$.
4. (20 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 8y_1 - 6y_2. \end{aligned}$$

5. a) (10 puntos) Halle la transformada de Laplace de

$$f(t) = e^{-2t} \cos^2 3t.$$

- b) (10 puntos) Determine la transformada inversa de Laplace

$$F(s) = \frac{s + 5}{s^2 - 2s - 3}.$$