espol Escuela Superior Politécnica del Litoral

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: **Elvis Aponte-Rosa María Díaz -David De Santis - Heydi Roa**-– Fecha: 22 de noviembre del 2021. Horario: 11:00 – 13:00

PAUTA DE CORRECCIÓN Y RÚBRICAS

Tema1a (15 puntos)

Considere el plano $\pi_1: 3x + 2y - z + 13 = 0$ y el punto $P_1(2, -1,3)$. Identifica las coordenadas del punto que pertenezca al plano π_1, que esté más cerca del punto P_1.

solución

El vector normal del plano será el vector director de la recta que pasará por el punto P_1 . La ecuación de la recta será

$$L = \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad , t \epsilon \mathbb{R}$$

La intersección de la recta con el plano generará un punto el cuál será el punto en el plano más cercano al punto P_1.

Remplazando los datos de la recta en el plano

$$3(2 + 3t) + 2(-1 + 2t) - (3 - t) + 13 = 0$$

$$6 + 9t - 2 + 4t - 3 + t + 13 = 0$$

$$14t + 14 = 0$$

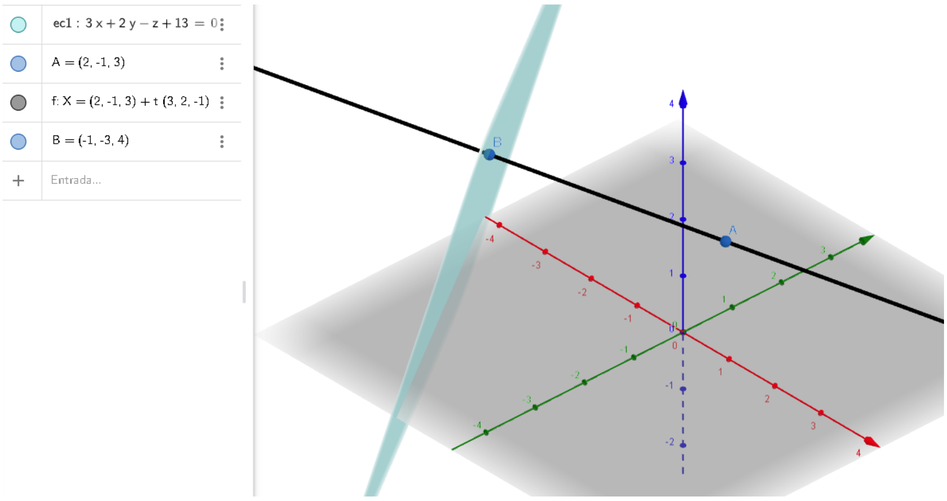
$$t = -1$$

Por lo tanto, el punto del plano más cercano al punto P_1, es

$$x = 2 + 3(-1) = -1$$
$$y = -1 + 2(-1) = -3$$
$$z = 3 - (-1) = 4$$

$$P(-1, -3,4)$$

Gráfico no necesario para resolver el ejercicio, solo para corroborar los resultados



Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce los conceptos relacionados con la geometría tridimensional.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No reconoce la información RELEVANTE de la recta y el plano en R^3	Identifica el vector normal al plano y reconoce que es el vector de la recta perpendicular al plano que atraviesa el punto dado	Plantea la ecuación de la recta utilizando el punto dado, pero no determina la intersección de esa recta con el plano	Determina el punto intersección de la recta con el plano y concluye que es el punto más cercano al punto dado
	0	1-4	5-10	11-15

Tema1b (15 puntos)

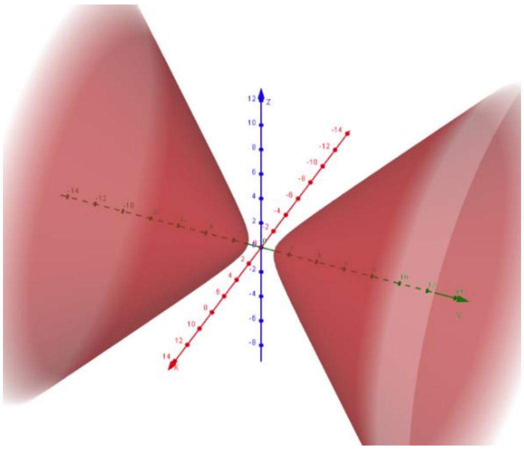
Para la función f: $R^3 \to R$ dada por $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, grafique los conjuntos de nivel CNα, donde α ∈ {−1, 0, 2}.

solución

Cuando $\propto = -1$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 = -1$$
$$-x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

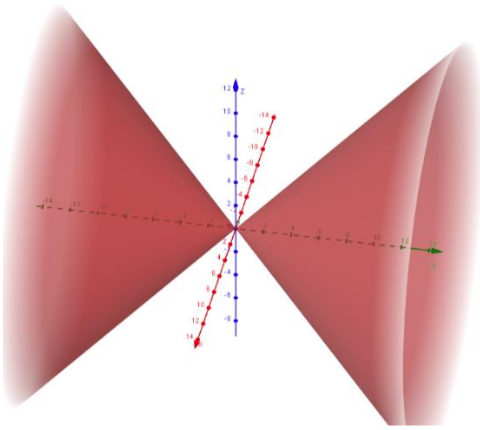
Tenemos un hiperboloide de 2 hojas con centro en el origen, que abre hacia el eje y a partir de los puntos y=1,-1



Cuando $\propto = 0$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 = 0$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

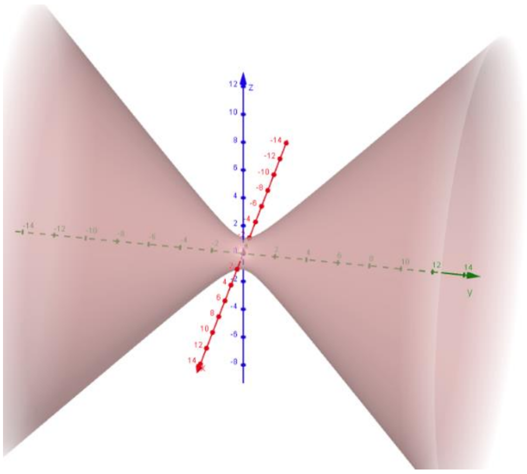
Tenemos un cono con centro en el origen, que abre hacia el eje y



Cuando $\propto = 1$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 = 1$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

Tenemos un hiperboloide de una hoja con centro en el origen, que abre hacia el eje y, con una circunferencia de radio uno cuando y=0



Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce el concepto de conjuntos de nivel, así como graficar superficies cuadráticas	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No conoce el concepto de conjuntos de nivel por lo que no puede desarrollar el ejercicio	El estudiante reconoce el concepto de superficie de nivel, pero no reconoce los gráficos de las superficies cuadráticas	El estudiante conoce las superficies cuadráticas, pero grafica una o alguna de las superficies de manera incorrecta, considerando: Ejes de apertura de las superficies, trazas, ente otros	El estudiante plantea correctamente los conjuntos de nivel, y grafica todas las gráficas de manera correcta
	0	0-4	5-10	11-15

Tema1 c (15 puntos)

Determine el dominio y grafique la región en el plano XY

$$f(x, y) = \ln(3 - x^2 - 18y^2)$$

solución

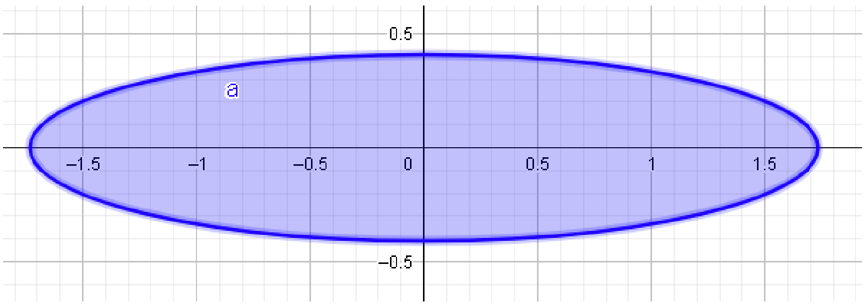
Dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3 - x^2 - 18y^2 \geq 0\ \}$$

El gráfico es una elipse

$$x^2 + 18y^2 \leq 3$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{6})^2} \leq 1$$



Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe identificar el dominio de una función de varias variables y la puede graficar en el plano XY	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe identificar el dominio de una función de varias variables	Identifica el dominio de la función de varias variables, pero no sabe como graficarlo en el plano XY	Identifica el dominio de la función de varias variables, e intenta graficar el dominio de la función de varias variables en el plano XY pero lo hace incorrectamente	Identifica el dominio de la función de varias variables, y grafica el dominio de la función de varias variables en el plano XY correctamente
	0	0-4	5-10	11-15

Tema 1d (15 puntos)

Determine la ecuación de superficie que se genera al girar la curva $z^2 = 6x$, alrededor del eje x.

solución

Si aplicamos la definición de superficies de revolución, $y^2 + z^2 = f(x)^2$ (1) cuando la curva expresada como $z = f(x)$ (2) gira con respecto al eje x. Considerando que nuestra función $z = f(x) = +\sqrt{6x}$ (3) entonces al remplazar (3) en (1) podemos darnos cuenta de que obtenemos la ecuación $y^2 + z^2 = 6x$, que es un paraboloide elíptico con centro en el origen y abre con respecto al eje x hacia el infinito positivo

Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
0	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe como plantear una superficie de revolución	Plantea la ecuación de superficie de revolución, pero no la aplica correctamente	Plantea la ecuación de superficie de revolución, la aplica correctamente pero no logra relacionar el resultado con la superficie cuadrática	Plantea la ecuación de superficie de revolución, la aplica correctamente y logra relacionar el resultado con la superficie cuadrática concluyendo correctamente
	0	0-4	5-10	11-15

Tema 2ª (20 puntos)

Determine si la función $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ tiene límite en (0,0)

Solución

Se reescribe la función multiplicando y dividiendo por la conjugada de $\sqrt{x^2+y^2+1}-1$, entonces se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{(x^2+y^2+1)-1} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2$$

Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante es capaz de identificar la aplicación de operaciones e identidades algebraicas para hallar el límite de la función	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la identidad adecuada a usar para hallar el límite de la función (pero intenta algo)	Logra identificar el método para aplicar, conjugado o cambio de variables, pero deja inconcluso	Identifica y aplica correctamente El método, pero comete errores	Identifica, aplica e identifica correctamente el método y llega al resultado correcto
	0-2	3-9	10-14	15-20

Tema 2 b (20 puntos)

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(2^{x}-1\right)\cdot \operatorname{Sen}(y)}{xy} & ,\text{si } xy\neq 0\\ \ln(2) & ,\text{ si } xy=0\end{cases}$$

¿Es continua en (0,0)?

Solución

Se debe demostrar primero que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \ln(2)$, entonces se tiene que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2^x-1).Sen(y)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2^x-1)}{x}.\frac{Sen(y)}{y}$$
$$= \lim_{x\to(0)} \frac{(2^x-1)}{x}.\lim_{y\to(0)} \frac{Sen(y)}{y}$$

Usando la regla de L'Hopital se obtiene:

$$\lim_{x\to(0)} \frac{\ln(2)\,2^x}{1}.(1) = \ln(2)$$

Por lo tanto $f(x,y)$ es continua en (0,0).

Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante es capaz de aplicar elementos de límites y el concepto de continuidad	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra identificar la identidad adecuada a usar para hallar el límite de la función (pero intenta algo)	Logra identificar que propiedades puede aplicar, pero falla en la ejecución	Identifica correctamente las propiedades y aplica bien pero no llega al resultado correcto	Identifica correctamente las propiedades y aplica bien y llega al resultado correcto.
	0-2	3-9	10-14	15-20

Tema 2 c (20 puntos)

1. Dada la función $\boldsymbol{f(x,y)} = \begin{cases} \frac{(x^2y)}{(x^2+y^2)}\ ; si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad ; si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

(b) Calcular la derivada direccional en el punto (0, 0). según el vector u = (1,0) y el vector u = (0,1) y según el vector v = (1,1).

solución

$$f_x(0,0) = \mathrm{Lim}_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \mathrm{Lim}_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$ **(derivada direccional en (1,0))**

$$f_y(0,0) = \mathrm{Lim}_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \mathrm{Lim}_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$ **(derivada direccional en (0,1))**

Usando la definición de diferenciabilidad

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(00)} \frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - f_x(0,0)\cdot\Delta x - f_y(0,0)\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} == \lim_{(\Delta x.\Delta u)\to(0,0)} \frac{\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x \Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)}{\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right]^{1+\frac{1}{2}}} = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \varphi\in[0,2\pi]}} \frac{\rho^3\left(\cos^2\varphi\right)^2(\mathrm{sen}\,\varphi)}{\rho^3}$$

Se tiene que el límite depende de φ. Por lo tanto, la función no es diferenciable en el origen

Como la función no es diferenciable no se puede aplicar la definición de gradiente, por lo que la derivada direccional se calcula aplicando la definición de derivada direccional.

$$D_{-f}\, f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(0 + t\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 + t\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\left(t\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 t\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(t\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(t\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}}}{t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante es capaz de identificar el concepto de derivada direccional y su fórmula cuando la función es diferenciable	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar correctamente (pero intenta algo)	Calcula las derivadas parciales en (0,0)	Aplica correctamente la fórmula de diferenciabilidad, pero no concluye.	Aplica correctamente la fórmula de diferenciabilidad y concluye correctamente y además encuentra los valores de la derivada direccional
	0-2	3-9	10-14	15-20

Tema 3ª (15 puntos)

Demuestre que la función $f(x, y, z) = e^{3x+4y}\cos(5z)$ es una solución de la ecuación de Laplace tridimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3x+4y}\cos(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 9e^{3x+4y}\cos(5z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4e^{3x+4y}\cos(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16e^{3x+4y}\cos(5z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -5e^{3x+4y}\operatorname{sen}(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -25e^{3x+4y}\cos(5z)$$

Reemplazamos las expresiones anteriores en la ecuación de Laplace,

$$9e^{3x+4y}\cos(5z) + 16e^{3x+4y}\cos(5z) - 25e^{3x+4y}\cos(5z) = 0$$

$$25e^{3x+4y}\cos(5z) - 25e^{3x+4y}\cos(5z) = 0$$

$$0 = 0$$

La función f es una solución de la ecuación de Laplace

Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce como obtener derivadas parciales de primer y segundo orden.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo obtener derivadas parciales de primer ni segundo orden. (pero intenta algo)	Obtiene las derivadas parciales de primer orden, pero se equivoca al encontrar las derivadas de segundo orden	Obtiene las derivadas parciales de primer orden y segundo orden solicitadas, pero se equivoca al reemplazar los datos en la ecuación	Obtiene las derivadas parciales de primer orden y segundo orden solicitadas, reemplaza en la ecuación dada y concluye que la función f satisface la ecuación de Laplace
	0	0-4	5-10	11-15

Tema3b (15 puntos)

Demuestre que la función $w(x,t) = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$ es una solución de la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Solución

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -5sen(3x + 3ct)(3) + e^{x+ct}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -5cos(3x + 3ct)(9) + e^{x+ct}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -5sen(3x + 3ct)(3c) + ce^{x+ct}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -5cos(3x + 3ct)(9c^2) + c^2\, e^{x+ct}$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación de onda,

$$-45c^2 cos(3x + 3ct) + c^2\, e^{x+ct} = c^2[-45cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}]$$

La función w si satisface la ecuación de onda.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce como obtener derivadas parciales de primer y segundo orden.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo obtener derivadas parciales de primer ni segundo orden. (pero intenta algo)	Obtiene las derivadas parciales de primer orden, pero se equivoca al encontrar las derivadas de segundo orden	Obtiene las derivadas parciales de primer orden y segundo orden solicitadas, pero se equivoca al reemplazar los datos en la ecuación	Obtiene las derivadas parciales de primer orden y segundo orden solicitadas, reemplaza en la ecuación dada y concluye que la función w satisface la ecuación de onda
	0	0-4	5-10	11-15

Tema3c (15 puntos)

Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)\,sen(\,xy)}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Determine si f es diferenciable en (0,0)

Solución

Vamos a demostrar que f no es diferenciable utilizando la definición de diferenciabilidad. Primero, encontramos las derivadas parciales en (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0{,}0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senh\;sen(0)}{h^3}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0{,}0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0\;sen(0)}{h^3}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Calculamos el siguiente límite:

$$\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{lim}\frac{|f(h_1,h_2)-f(0{,}0)-(0{,}0)\cdot(h_1,h_2)|}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}=\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{lim}\frac{\dfrac{|senh_1\,Sen(\,h_1h_2)|}{{h_1}^2+{h_2}^2}}{\sqrt{{h_2}^2+{h_2}^2}}$$

Demostramos que este límite no existe usando rutas. Ruta $h_1=h_2$

$$\underset{h1\to 0}{lim}\frac{|senh_1|\,Sen\left({h_1}^2\right)}{2{h_1}^2\sqrt{2{h_1}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\underset{h1\to 0}{lim}\frac{|senh_1|\,Sen\left({h_1}^2\right)}{{h_1}^2|h_1|}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\underset{h\to 0}{lim}\frac{|senh_1|}{|h_1|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0$$

Este límite no es cero. Por lo tanto, la función no es diferenciable en (0,0)

Rúbrica

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo plantear la definición de diferenciabilidad en un punto, sabe calcular las derivadas parciales y demuestra la existencia del límite	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo plantear la definición de diferenciabilidad en un punto. (pero intenta algo)	Plantea la definición de diferenciabilidad en un punto y encuentra las derivadas parciales, pero tiene problemas al reemplazar los datos en la fórmula de diferenciabilidad	Plantea la definición de diferenciabilidad en un punto y encuentra las derivadas parciales, reemplaza los datos en la fórmula de diferenciabilidad, pero se equivoca en encontrar el límite	Plantea la definición de diferenciabilidad en un punto y encuentra las derivadas parciales, encuentra el límite y concluye que la función no es diferenciable
	0	0-4	5-10	11-15

Tema 3d (15 puntos)

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^8}{\left(x^2-y\right)^2+x^8} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Determine si existen las derivadas parciales en (0,0)

b) Determine si la función es diferenciable en (0,0)

solución

a) Analicemos la existencia de derivadas parciales en el origen,

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^8}{h^4+h^8}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{1+h^4}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

luego f(x, y) admite derivadas parciales en (0,0)

b) La función no es continua en $(0,0)$ ya que los límites según la recta $y=x$ y la parábola $y=x^2$ son, respectivamente,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^8}{\left(x^2-x\right)^2+x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{x^2-2x^3+x^4+x^8}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{\left(x^2-x^2\right)^2+x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{x^8}=1$$

Al ser distintos los valores obtenidos, la función no tiene límite doble en (0,0), y por lo tanto no es continua y por ende no es diferenciable en (0,0)

Observación: También puede demostrar la no diferenciabilidad directamente de la definición.

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo plantear la definición de diferenciabilidad en un punto, sabe calcular las derivadas parciales y demuestra la existencia del límite	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo plantear la definición de diferenciabilidad en un punto.	Plantea las derivadas parciales, pero tiene problemas al reemplazar los datos y se equivoca	Plantea las derivadas parciales correctamente reemplaza los datos en la fórmula de diferenciabilidad, pero se equivoca en encontrar el límite	Calcula correctamente las derivadas parciales y demuestra la no diferenciabilidad
	0	0-4	5-10	11-15

Tema4a (15 puntos)

Encuentre el plano tangente y la recta normal a la superficie

$$f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2) - z$$

$en\ el\ punto\ P(1,0,0)$

Solución

El vector normal del plano tangente a la superficie es el gradiente.

$$\nabla f = (\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, -1)$$

$$\nabla f(1,0,0) = (2,0,-1)$$

Ecuación del plano tangente,

$$2(x-1) + 0(y-0) - 1(z-0) = 0$$

$$2x - z - 2 = 0$$

Ecuación de la recta normal, el vector director de esta recta es el gradiente

$$x = 1 + 2t,\ \ y = 0, z = -t, t \in R$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo encontrar el gradiente, la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No identifica el vector gradiente	Encuentra el vector gradiente, lo evalúa en el punto, pero tiene problemas al encontrar la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal	Encuentra el vector gradiente, lo evalúa en el punto, encuentra la ecuación del plano tangente, pero tiene problemas para encontrar la ecuación de la recta normal	Encuentra el vector gradiente, lo evalúa en el punto, encuentra la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal
	0	0-4	5-10	11-15

Tema 4b (15 puntos)

Encuentre el plano tangente y la recta normal a la superficie

$$f(x,y,z) = \cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$$

$en\ el\ punto\ P(0,1,2)$

Solución

El vector normal del plano tangente a la superficie es el gradiente.

$$\nabla f = (-sen(\pi x)\pi - 2xy + ze^{xz}, -x^2 + z, xe^{xz} + y)$$

$$\nabla f(0,1,2) = (2,2,1)$$

Ecuación del plano tangente,

$$2(x-0) + 2(y-1) + 1(z-2) = 0$$

$$2x + 2y + z - 4 = 0$$

Ecuación de la recta normal, el vector director de esta recta es el gradiente

$$x = 2t,\ \ y = 1 + 2t, z = 2 + t, t \in R$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo encontrar el gradiente, la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No identifica el vector gradiente	Encuentra el vector gradiente, lo evalúa en el punto, pero tiene problemas al encontrar la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal	Encuentra el vector gradiente, lo evalúa en el punto, encuentra la ecuación del plano tangente, pero tiene problemas para encontrar la ecuación de la recta normal	Encuentra el vector gradiente, lo evalúa en el punto, encuentra la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal
	0	0-4	5-10	11-15

Tema 4c (15 puntos)

La superficie de una montaña admite aproximadamente el modelo:

$$f(x,y)=500-0.01x^2-0.04y^2$$

Si un montañero se encuentra en el punto (50, 300, 4390)

a) ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez posible?

b) ¿Qué valor toma la mayor rapidez posible?

Solución

a) Debe tomar la dirección dada por el vector

$$\overrightarrow{\nabla f}(50,300)=\left(\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{(50,300)}=(-0.02\text{x},-0.08\text{y})_{(50,300)}=(-1,-24)$$

b) La máxima rapidez posible es la norma del gradiente

$$\|(-1,24)\|=\sqrt{1^2+24^2}=\sqrt{577}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo encontrar el gradiente e interpretar la máxima derivada direccional	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No identifica el vector gradiente	Encuentra el vector gradiente, lo evalúa en el punto, pero tiene problemas al encontrar el vector	Encuentra el vector gradiente correctamente pero no puede interpretar la máxima rapidez	Encuentra el vector gradiente y calcula su gradiente e interpreta que ese valor es la máxima rapidez
	0	0-4	5-10	11-15

Tema 5ª (20 puntos)

Use la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales indicadas, cuando $x = 1, y = 2, t = 0$.

i) $\frac{\partial U}{\partial r}$ ii) $\frac{\partial U}{\partial s}$ iii) $\frac{\partial U}{\partial t}$ vi) $\frac{\partial U}{\partial x}$. Donde:

$$U(r, s) = \sqrt{r^3 + s^2},\ \ r(x, y, t) = y + x\cos(\,t^2) \quad \text{y} \quad s(x, y, t) = x^2 + ysen(t).$$

Solución.

i) $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{3r^2}{2\sqrt{r^3+s^2}}$. Pero si $x = 1, y = 2, t = 0$, entonces, $r = 3$, $s =$ 1. Luego $\frac{\partial U}{\partial r}(3,1) = 27/4\sqrt{7}$.

ii) $\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{s}{\sqrt{r^3+s^2}}$. Pero si $x = 1, y = 2, t = 0$, entonces, $r = 3$, $s =$ 1. Luego $\frac{\partial U}{\partial s}(3,1) = 1/2\sqrt{7}$.

iii) Tenemos que $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}$

También $\frac{\partial s}{\partial t} = y\cos(t)$, $\frac{\partial r}{\partial t} = -x2tsen(t)$. Así $\frac{\partial s}{\partial t}(1,2,0) = 2$, $\frac{\partial r}{\partial t}(1,2,0) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial U}{\partial t}(1,2,0) = \frac{\partial U}{\partial s}(3,1)\frac{\partial s}{\partial t}(1,2,0) + \frac{\partial U}{\partial r}(3,1)\frac{\partial r}{\partial t}(1,2,0) = 1/\sqrt{7}.$$

iv) Tenemos que $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$

También $\frac{\partial s}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\,t^2)$. Así $\frac{\partial s}{\partial x}(1,2,0) = 2$, $\frac{\partial r}{\partial x}(1,2,0) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(1,2,0) = \frac{\partial U}{\partial s}(3,1)\frac{\partial s}{\partial x}(1,2,0) + \frac{\partial U}{\partial r}(3,1)\frac{\partial r}{\partial x}(1,2,0) = 1/\sqrt{7}$$

Rúbrica:

El estudiante debe ser capaz de emplear la regla de la cadena para obtener derivadas de funciones de varias variables.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante determina la función derivada correspondiente al literal i) y hace la evaluación.	El estudiante determina la función derivada correspondiente al literal ii) y hace la evaluación.	El estudiante determina, usando las derivadas de los literales i) y ii), la función derivada correspondiente al literal iii) y hace la evaluación.	El estudiante determina, usando las derivadas de los literales i) y ii), la función derivada correspondiente al literal iv) y hace la evaluación.
	0-2	3-9	10-14	15-20

Tema 5b (20 puntos)

Supongamos que la función $f(x,y)$ dada es derivable al menos dos veces.

Si $z=f(x,y)$, donde $x=e^r\cos\theta,\quad y=e^r\sin\theta$.

Encuentre:

i) $\partial^2 z/_{\partial x^2}\quad e^{-2r}\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right)\right]$

ii) $\partial^2 z/_{\partial \theta^2}$.

Y demuestre que

$$\left(\partial^2 z/_{\partial x^2}\right)+\left(\partial^2 z/_{\partial y^2}\right)\ = e^{-2r}\ \left[\left(\partial^2 z/_{\partial r^2}\right)+\left(\partial^2 z/_{\partial \theta^2}\right)\ \right]$$

Solución.

Procedemos a realizar cálculo directo.

i) Se calcula $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(e^r\cos\theta\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(e^r\sin\theta\right)$.
Luego,

$$\partial^2 z/_{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(e^r\, cos\,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(e^r\, sin\,\theta)\right)=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^r\cos\theta)^2+\frac{\partial f}{\partial x}e^r\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e^{2r}\sin\theta\cos\theta)$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^r\sin\theta)^2+\frac{\partial f}{\partial y}(e^r\sin\theta)$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(e^{2r}\cos\theta\sin\theta)$$

$$=\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^r\cos\theta)^2\ +\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^r\sin\theta)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e^{2r}\sin\theta\cos\theta)$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}e^r\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(e^r\sin\theta).$$

ii) $\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}$ ($-e^r \, sin\,\theta$) + $\frac{\partial f}{\partial y}$ ($e^r \cos\theta$). Luego,

$$
\begin{aligned}
\partial^2 z/_{\partial^2\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(-e^r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(e^r\cos\theta)\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-e^r\sin\theta)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(-e^r\cos\theta)\\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-e^{2r}\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^r\cos\theta)^2\\
&- \frac{\partial f}{\partial y}e^r\sin\theta \; + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-e^{2r}\cos\theta\sin\theta)\\
&= \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-e^r\sin\theta)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^r\cos\theta)^2\\
&+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-e^{2r}\sin\theta\cos\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}(e^r\cos\theta)\\
&- \frac{\partial f}{\partial y}e^r\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial^2 z/_{\partial^2 r}\right) + \left(\partial^2 z/_{\partial^2\theta}\right) \;=\; \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^r\cos\theta)^2 \;+ \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^r cos\theta)^2 +\\
&2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e^{2r}\sin\theta\cos\theta) + \tfrac{\partial f}{\partial x}e^r\cos\theta + \tfrac{\partial f}{\partial y}(e^r\sin\theta) \; +\\
&\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-e^r\sin\theta)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^r\sin\theta)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-e^{2r}\sin\theta\cos\theta) -\\
&\tfrac{\partial f}{\partial x}(e^r\cos\theta) \; - \tfrac{\partial f}{\partial y}e^r\sin\theta \;=\; \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^r\cos\theta)^2 \;+\; \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-e^r\sin\theta)^2 +\\
&\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^r cos\theta)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^r\sin\theta)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e^{2r}\sin\theta\cos\theta) -\\
&2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-e^{2r}\sin\theta\cos\theta) + \tfrac{\partial f}{\partial x}e^r\cos\theta - \tfrac{\partial f}{\partial x}(e^r\cos\theta) +\\
&\tfrac{\partial f}{\partial y}(e^r\sin\theta) \; - \tfrac{\partial f}{\partial y}e^r\sin\theta \;=
\end{aligned}
$$

$$e^{2r}\;\left[\left(\partial^2 z/_{\partial^2 x}\right) + \left(\partial^2 z/_{\partial^2 y}\right)\;\right]$$

Por lo tanto,

$$\left(\partial^2 z/_{\partial^2 x}\right) + \left(\partial^2 z/_{\partial^2 y}\right) \;= e^{-2r}\;\left[\left(\partial^2 z/_{\partial^2 r}\right) + \left(\partial^2 z/_{\partial^2\theta}\right)\;\right]$$

Rúbrica:

	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de emplear la regla de la cadena para obtener las derivadas de funciones de varias variables y verificar ecuaciones.	El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal i).	El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal i) y **al literal ii)**	El estudiante determina las derivadas correspondientes a los literales i) y ii), **para así plantear la suma que arribara en la igualdad a verificar**	El estudiante determina las derivadas correspondientes a los literales i) y ii), para así plantear la suma **la que como consecuencia hace notar que la igualdad planteada es válida**. **Finalmente concluye**.
	0-2	3-9	10-14	15-20

Tema 5c (20 puntos)

Si $\boldsymbol{w = f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}, x = s\,sen\,t\,, y = s\,cos\,t\,, z = s\,tan\,t,}$ demuestre que $\frac{\partial w}{\partial s} = 2s\sec^2 t e^{s^2\sec^2 t}$

Solución

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} =$$

$$= \left[2xe^{x^2+y^2+z^2}\right](\operatorname{sen} t) + \left[2ye^{x^2+y^2+z^2}\right](\cos t) + \left[2ze^{x^2+y^2+z^2}\right](\tan t)$$

$$= 2e^{x^2+y^2+z^2}[x\operatorname{sen} t + y\cos t + z\tan t]$$

$$= 2e^{s^2\operatorname{sen}^2 t + s^2\cos^2 t + s^2\tan^2 t}\left[s\operatorname{sen}^2 t + s\cos^2 t + s\tan^2 t\right]$$

$$= 2se^{s^2\left(1+\tan^2 t\right)}\left[1+\tan^2 t\right] = 2s\sec^2 t e^{s^2\sec^2 t}$$

Es decir: $\frac{\partial w}{\partial s} = 2s\sec^2 t e^{s^2\sec^2 t}$

El estudiante debe ser capaz de emplear la regla de la cadena para obtener las derivadas de funciones de varias variables y verificar ecuaciones.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante escribe la fórmula identificando correctamente las variables, pero no aplica bien.	El estudiante determina las derivadas correspondientes, pero no desarrolla o deja inconcluso	El estudiante determina las derivadas correspondientes	
	0-2	3-9	10-14	15-20

Tema 6a. (15 puntos)

Determine y utilice la aproximación lineal en $(0, b)$, con $b \in \mathbb{R}$, para estimar el valor de; $i)$ $f(0.3, b)$, ii) $f(0.3, 0.3)$, donde:

$$f(x,y) = yLn\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + y^2.$$

Solución.

La fórmula de aproximación lineal en (a, b) es:

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Hacemos los cálculos referentes a tal fórmula con $a = 0$.

$f_x(a,b) = \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}$, así $f_x(0,b) = b$.

$f_y(a,b) = \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) + 2b$, así $f_y(0,b) = 2b$.

$f(0,b) = b^2$.

Entonces, $L(x,y) = b^2 + b(x) + 2b(y-b)$ es la linealización pedida.

Luego,

i) $f(0.3,\ b) \approx b^2 + b(0.3)$.

ii) $f(0.3, 0.3) \approx b^2 + 0.3\,b + 2b(0.3-b)$

Capacidades deseadas	Desempeño	Desempeño	Desempeño	Desempeño
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe cómo aproximar una función de dos variables con la fórmula de la linealización y usarla para calcular el valor aproximado de esta función en un punto dado.	**El estudiante escribe la fórmula de la linealización y determina las derivadas que esta requiere**.	El estudiante escribe la fórmula de la linealización y determina las derivadas que esta requiere. **Según el enunciado, evalúa cada término de la formula y así la reescribe**	El estudiante escribe la fórmula de la linealización y determina las derivadas que esta requiere. Según el enunciado, evalúa cada término de la formula y así la reescribe, **para luego estimar el valor pedido en i)**.	El estudiante escribe la fórmula de la linealización y determina las derivadas que esta requiere. Según el enunciado, evalúa cada término de la formula y así la reescribe, para luego estimar el valor pedido en i). **Finalmente, estima el valor pedido en ii).**
	0	0-4	5-10	11-15

Tema6b (15 puntos)

Sea una función diferenciable $f(x, y, z(x, y)) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$, tal que $f(x, y, z(x, y)) = k$ es una superficie que define implícitamente a z.

$5 = f(1,1, z(1,1))$, considerando que $z(x, y)\ es\ una\ funcion\ positiva$, determine el gradiente $\nabla z(1,1)$.

Solución

De la condición $5 = f(1,1, z(1,1))$ fácilmente se obtiene que $z(1,1) = 1$. Ya que $z(x, y)\ es\ una\ funcion\ positiva$.

Además: $z_x = -\frac{f_x}{fz} = \frac{-2x}{6z} = -\frac{x}{3z}$; $z_y = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{-4y}{6z} = -\frac{2y}{3z}$.

Luego, $\nabla z(1,1) = \left(z_x(1,1), z_y(1,1)\right) = -\frac{1}{3}(1,2)$.

Capacidades deseadas	**Desempeño**	**Desempeño**	**Desempeño**	**Desempeño**
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo obtener las derivadas parciales de manera implícita de una función de dos variables.	El estudiante a treves de despejes obtiene una condición inicial y además plantea las fórmulas de la derivada implícita.	El estudiante a treves de despejes obtiene una condición inicial y además plantea las fórmulas de la derivada implícita. **Determina los factores de la fórmula**.	El estudiante a treves de despejes obtiene una condición inicial y además plantea las fórmulas de la derivada implícita. Determina los factores de la fórmula. **Para así plantear la ecuación del gradiente**.	El estudiante a treves de despejes obtiene una condición inicial y además plantea las fórmulas de la derivada implícita. Determina los factores de la fórmula. Para así plantear la ecuación del gradiente **y finalmente evalúa para obtener el gradiente.**
	0	0-4	5-10	11-15

Tema6c (15 puntos)

Sea una función diferenciable $f(x,y,z(x,y)) = x^3 + 3y^3 + z^2 - 1$, tal que $7 = f(1,1,z(1,1))$, considerando que $z(x,y)\ es\ una\ función\ positiva$, determine la derivada direccional en el punto $(1,1)$ en dirección del vector $(1,1)$.

Solución

De la condición 7= $f(1,1,z(1,1))$ fácilmente se obtiene que $z(1,1) = 2$. Ya que $z(x,y)\ es\ una\ funcion\ positiva$.

Además: $z_x = -\frac{f_x}{fz} = \frac{-3x^2}{2z}$; $z_y = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{-9y^2}{2z}$.

Luego, $\nabla z(1,1) = \left(z_x(1,1), z_y(1,1)\right) = -\frac{3}{4}(1,3)$. Finalmente, el valor de la derivada direccional es $\nabla z(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = -\frac{3}{4}(1,3)\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = -\ \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Capacidades deseadas	Desempeño	Desempeño	Desempeño	Desempeño
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe cómo obtener las derivadas parciales de manera implícita de una función de dos variables.	El estudiante a treves de despejes obtiene una condición inicial y además plantea las fórmulas de la derivada implícita.	El estudiante a treves de despejes obtiene una condición inicial y además plantea las fórmulas de la derivada implícita. **Determina los factores de la fórmula**.	El estudiante a treves de despejes obtiene una condición inicial y además plantea las fórmulas de la derivada implícita. Determina los factores de la fórmula. **Para así plantear la ecuación de la derivada direccional**.	El estudiante a treves de despejes obtiene una condición inicial y además plantea las fórmulas de la derivada implícita. Determina los factores de la fórmula. Para así plantear la ecuación de la derivada direccional **y finalmente evalúa para obtener el valor solicitado.**
	0	0-4	5-10	11-15