Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2025	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Colón Mario Célleri
Evaluación:	Segunda	Fecha:	26 de enero de 2026

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________________, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: __________________________ Número de matrícula: ________________ Paralelo: ________

1. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la única transformación lineal que satisface

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0,0) \\ T(0,1,0) &= (1,1,0) \\ T(0,0,1) &= (1,1,1). \end{aligned}$$

   (a) (4 puntos) Halle la regla de correspondencia de T.

   (b) (4 puntos) Demuestre que T es invertible y halle la regla de correspondencia de T^{-1}.

   (c) (2 puntos) Halle la regla de correspondencia del operador $2T - T^{-1}$.

Solución:

(a) Como se conocen las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la regla de correspondencia de T puede representarse matricialmente como

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(b) La matriz A es invertible, con inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, T es invertible. Además, la regla de correspondencia de T^{-1} es

$$T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(c) La matriz de $2T - T^{-1}$, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es

$$2A - A^{-1} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la regla de correspondencia de $2T - T^{-1}$ es

$$(2T - T^{-1})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_2 + 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Rúbrica:

Halla la regla de correspondencia T	1–3 puntos
Demuestra que T es invertible y halla la regla de correspondencia de T^{-1}	1–4 puntos
Halla la regla de correspondencia de $2T - T^{-1}$	1–3 puntos

2. Sea $T\colon M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ la transformación lineal dada por

$$T(A) = \operatorname{tr}(A) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

donde $\operatorname{tr}(A)$ denota la *traza* de la matriz A.

(a) (5 puntos) Halle una base para la imagen de T.

(b) (5 puntos) Halle una base para el núcleo de T.

Solución:

(a) Vemos que

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Como un conjunto con único vector no nulo siempre es independiente, se sigue que

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

es una base para $\operatorname{Im}(T)$.

(b) Note que $T(A) = 0$ si, y solamente si, $\operatorname{tr}(A) = 0$. Luego, los elementos del núcleo de T son las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el núcleo de T es generado por el conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Tal conjunto también es una base para el núcleo de T. De hecho,

$$\dim N(T) = \dim M_{2\times 2} - \dim \operatorname{Im}(T) = 4 - 1 = 3,$$

de manera que un conjunto generador de $\mathrm{N}(T)$ con tres vectores debe ser una base.

Rúbrica:

Halla una base para $\operatorname{Im} T$	1–5 puntos
Halla una base para $\mathrm{N}(T)$	1–5 puntos

3. (10 puntos) Halle la solución general del sistema de ecuaciones

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} y.$$

Solución:

El polinomio característico de la matriz asociada al sistema es

$$p(\lambda) = 15 + 17\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 = (5-\lambda)(-3+\lambda)(-1+\lambda),$$

de donde se obtienen los valores propios 5, -3 y -1. Los espacios propios correspondientes son

$$E_5 = \text{gen}\{(1,1,1)\},$$

$$E_{-3} = \text{gen}\{(0,-1,1)\},$$

y

$$E_{-1} = \text{gen}\{(-2,1,1)\}.$$

De aquí obtenemos las soluciones l.i.

$$y_1(t) = e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ y_2(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_3(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

y la solución general es por tanto

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{5t} - 2c_3e^{-t} \\ c_1e^{5t} - c_2e^{-3t} + c_3e^{-t} \\ c_1e^{5t} + c_2e^{-3t} + c_2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Calcula correctamente el polinomio característico y los valores propios	1–3 puntos
Calcula correctamente los espacios propios correspondientes	1–4 puntos
Halla la solución general	1–3 puntos

4. (10 puntos) Determine los valores de k que hacen de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

una matriz diagonalizable.

Solución:

Primero, calculamos el polinomio característico:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 0 + k(1-(2-\lambda))$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) + k(\lambda - 1) = (\lambda - 1)[(1-\lambda)(2-\lambda) - k] = 0$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)[\lambda^2 - 3\lambda + (2-k)] = 0.$$

Vemos que los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$$

Luego:

- Si $k > -1/4$ y $k \neq 0$, existen 3 valores propios reales y distintos, de manera que A es diagonalizable.
- Si $k = 0$, hay dos valores propios $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$, con $m_a(1) = 2$. Calculamos la multiplicidad geométrica $m_g(1) = \dim(\mathrm{N}(A - I))$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies m_g(1) = 3 - 1 = 2.$$

  Como $m_a(1) = m_g(1)$, para $k = 0$ A es diagonalizable.
- Si $k = -1/4$, hay dos valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_{2,3} = 3/2$. Esto es, $m_a(3/2) = 2$. Pero,

$$A - \frac{3}{2}I = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -1/4 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies m_g(3/2) = 3 - 2 = 1.$$

  Como $m_g(3/2) < m_a(3/2)$, se tiene que A no es diagonalizable en este caso.

En conclusión, si $k > 1/4$, A es diagonalizable.

5. (10 puntos) Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 3y' + 2y = H(t-1), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

donde H denota la función de Heaviside.

Solución: Aplicamos $\mathcal{L}$ en ambos lados de la ecuación y obtenemos

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, nos queda

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{e^{-s}}{s} \implies Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}.$$

Sea $F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$. Hallemos números reales A, B y C tales que

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}.$$

De hecho, $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ y $C = \frac{1}{2}$, de manera que

$$F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}.$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa y el teorema de la traslación nos da $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)H(t-a)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-s}\} = \left[\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right] H(t-1).$$

Rúbrica:

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1 punto
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1–2 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace y el teorema de la traslación	1–2 puntos
Resuelve el PVI.	1–2 puntos