

Año: 2025	Período: Primero
Materia: Análisis funcional	Profesora: Mireya R. Bracamonte P.
Evaluación: Primera	Tiempo de duración: 120 minutos
Fecha: 30 de Junio de 2025	Calificación obtenida : /50

COMPROMISO DE HONOR

Yo, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material no permitido en el examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

En calidad de estudiante de ESPOL, asumo el compromiso de combatir la mediocridad y actuar con total honestidad. Por consiguiente, rechazo la práctica de copiar tanto en mis propios trabajos como en permitir que otros lo hagan.

Firma:..... Número de matrícula:

Instrucciones:

1. Antes de comenzar, verifique que el examen esté completo y que no haya páginas faltantes o errores de impresión. Si encuentra algún problema, notifíquelo al supervisor del examen de inmediato.
2. Administre su tiempo de manera efectiva para completar todas las preguntas dentro del límite de tiempo establecido.
3. Recuerde seguir las instrucciones específicas.
4. Trabaje de manera concentrada y evite distracciones durante todo el período de examen.
5. Mantenga un comportamiento adecuado y respetuoso en todo momento durante el examen. Cualquier violación de las normas de conducta puede resultar en consecuencias disciplinarias.

Parte I: (10 puntos) A continuación se presenta una lista de afirmaciones, indique si la afirmación es verdadera o falsa (No tiene que justificar su respuesta).

1. $C[-1, 1]$ con la norma $\|f\| := \int_{-1}^1 |f(x)| dx$ es un espacio de Banach.
2. Si X es un espacio semi-normado entonces las operaciones de X como espacio vectorial son continuas.
3. El subespacio c_{00} de ℓ^∞ es de Banach.
4. $C^1[a, b]$ con la norma del supremo es un espacio de Banach.
5. Si Y es un subespacio de un espacio de Banach X . Entonces Y es completo
6. Todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach
7. El dual de ℓ^1 es c_0
8. Si x es un elemento de un espacio de Hilbert H entonces existe un único $y \in K$ tal que $\|x - y\| = \min\{\|x - z\| : z \in K\} = \text{dist}(x, K)$.
9. Si X es un espacio normado, entonces X^* es un espacio de Banach.
10. Si $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ es compacta en un espacio normado X , entonces X necesariamente tiene dimensión finita.

Parte II: Desarrollo. A continuación, se presentan varios problemas que requieren de su análisis y solución detallada. La presentación y el rigor de los detalles son fundamentales para una mejor calificación.

- 10 1. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado, y sea $T : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal continua y subreyectiva. Supongamos que existe una constante $C > 0$, tal que para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $Tx = y$, y $\|x\| \leq C\|y\|$. Determine si Y es un espacio de Banach.

- 10 2. Se define $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ por $Tx(t) = t \int_0^t x(s) ds$. Determine si $T^{-1} : \text{Ima}(T) \rightarrow C[0, 1]$ existe y es un operador acotado.

- 10 3. Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados (definidos sobre un campo \mathbb{K}) y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal continuo. Se define

$$R : X/\ker(T) \rightarrow Y \quad \text{por} \quad R[x] := Tx.$$

Determinar si R :

- (a) está bien definido.
- (b) es inyectivo.
- (c) es un operador lineal.
- (d) es continuo.

- 10 4. Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados (definidos sobre un campo \mathbb{K}) y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado. Se define

$$T^t : Y^* \rightarrow X^* \quad \text{por} \quad T^t y^* = y^* T.$$

Determine si T^t es un operador lineal continuo.