

RUBRICA DEL SEGUNDO EXAMEN DE CÁLCULO VECTORIAL PAO 2 2025-2026

TEMA 1: Sea $F(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$.

(a) Encuentre una función potencial f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule la integral de línea: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \sin t)\mathbf{i} + (e^t \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Solución: Para la parte (a):

Como $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ con $P(x, y) = 3 + 2xy$, $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$, buscamos f tal que $f_x = P$, $f_y = Q$. Integrando $f_x = 3 + 2xy$ respecto de x , obteniendo: $3x + x^2y + g(y)$, donde $g(y)$ depende sólo de y . Derivamos respecto de y : $f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$. Por tanto, una función potencial es: $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3$. Hasta 5 puntos.

Para la parte (b): Como $\mathbf{F} = \nabla f$ en R^2 , la integral de línea es independiente de la trayectoria y es:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(\pi)) - f(\mathbf{r}(0)).$$

Primero hallamos los extremos: $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \sin t, e^t \cos t \rangle$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= \langle e^0 \sin 0, e^0 \cos 0 \rangle = \langle 0, 1 \rangle, \\ \mathbf{r}(\pi) &= \langle e^\pi \sin \pi, e^\pi \cos \pi \rangle = \langle 0, -e^\pi \rangle. \end{aligned}$$

Evaluamos $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(\pi)) &= f(0, -e^\pi) = 3(0) + 0^2(-e^\pi) - (-e^\pi)^3 = e^{3\pi}. \\ f(\mathbf{r}(0)) &= f(0, 1) = 3(0) + 0^2(1) - 1^3 = -1. \end{aligned}$$

Hasta 8 puntos.

Por tanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1.$$

Hasta 10 puntos.

TEMA 2: Hallar la masa de una lámina cuya densidad viene dada por $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, y cuya superficie tiene la forma de un helicoide descrito por la parametrización:

$$\mathbf{r}(u, \theta) = (u \cos \theta)\mathbf{i} + (u \sin \theta)\mathbf{j} + \theta \mathbf{k},$$

con dominio: $D = \{(u, \theta) : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq \theta \leq 6\pi\}$.

Solución: La masa de una lámina sobre una superficie S está dada por:

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS.$$

Usando la parametrización en la expresión de la densidad y el cálculo de los vectores tangentes, se obtiene:

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u^2 \cos^2 \theta + u^2 \sin^2 \theta} = u.$$

$$\mathbf{r}_u = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \mathbf{r}_\theta = (-u \sin \theta, u \cos \theta, 1).$$

Hasta 4 puntos.

Resultando en la norma del producto cruz:

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + u^2} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Hasta 6 puntos.

Plantea la integral respectiva y procede a su resolución:

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(x, y, z) dS = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = \iint_D u \sqrt{1 + u^2} dA \\ &= \int_0^{6\pi} \int_0^2 u \sqrt{1 + u^2} du d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{6\pi} \left[\frac{2}{3} (1 + u^2)^{3/2} \right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \int_0^{6\pi} d\theta = 2(5\sqrt{5} - 1)\pi. \end{aligned}$$

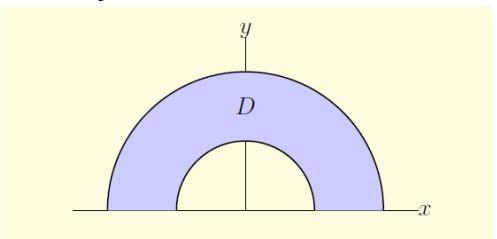
Hasta 10 puntos.

TEMA 3: Usando el Teorema de Green, hallar el trabajo realizado por el campo de fuerza:

$$\mathbf{F}(x, y) = (\sinh x - y^3, y^2 + x^3)$$

al mover una partícula a lo largo de la curva cerrada C , orientada positivamente, que encierra la región semianular:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4\}.$$



Solución: El trabajo realizado por el campo a lo largo de la curva C está dado por:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P dx + Q dy,$$

Donde:

$$P(x, y) = \sinh x - y^3, \quad Q(x, y) = y^2 + x^3.$$

Por el teorema de Green, la integral de línea puede expresarse como una integral doble sobre la región D:

$$W = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Hasta 3 puntos.

Así, el trabajo queda expresado como:

$$W = \iint_D 3(x^2 + y^2) dA.$$

Hasta 5 puntos

Trabajando en coordenadas polares, resulta:

$$W = 3 \int_0^\pi \int_2^4 r^2 r dr d\theta = 3 \int_0^\pi \int_2^4 r^3 dr d\theta.$$

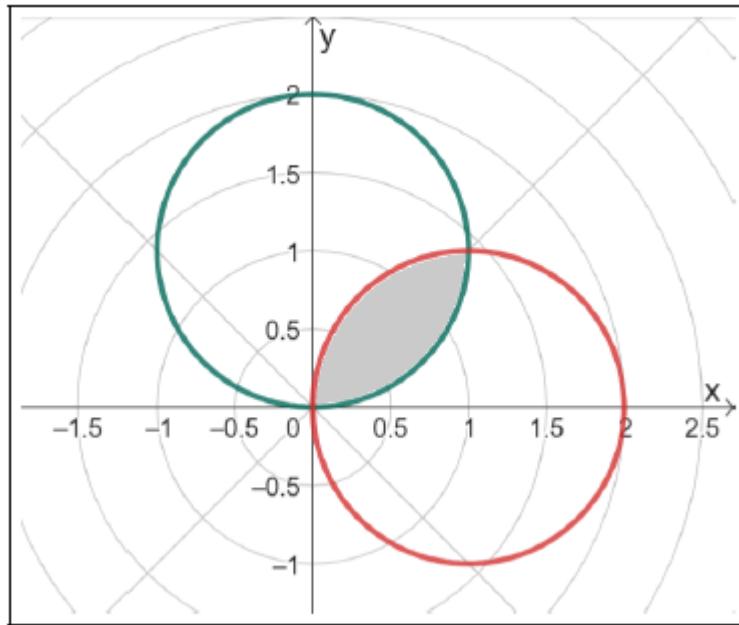
Hasta 7 puntos.

Resuelve correctamente la integral doble obteniendo finalmente, $W = 180\pi$. Hasta 10 puntos.

TEMA 4: Sea R la región del plano limitada por las curvas: $r = 2 \cos \theta$ y $r = 2 \sin \theta$, en el primer cuadrante.

- (a) Realice un bosquejo claro de la región R.
- (b) Plantee la integral en coordenadas polares que permita calcular el área de R.
- (c) Calcule el área de la región.

Solución: La gráfica respectiva se muestra a continuación:



Hasta 3 puntos.

Luego, plantea la integral respectiva (también es posible plantear una sola integral doble).

$$A_R = \iint_R dA = \int_0^{\pi/4} \int_{r=0}^{2\sin\theta} r dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2\cos\theta} r dr d\theta.$$

Hasta 6 puntos. Finalmente procede a la resolución de la integral doble, resultando en:

$$A_R = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$A_R = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Hasta 10 puntos.

TEMA 5: Dada la función: $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy$, y el conjunto:

$$K = \{(x, y) \in R^2; y^2 \leq 12 + 3x\},$$

obtenga y clasifique los puntos críticos de $g(x, y)$ en el interior de K .

Solución: Los puntos críticos de g satisfacen que $\nabla g(x, y) = (0, 0)$. Como

$$\partial g/\partial x = x^2 - y, \partial g/\partial y = y^2 - x,$$

Hasta 3 puntos.

Entonces, debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned}x^2 - y &= 0, \\y^2 - x &= 0.\end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene $y = x^2$. Sustituyendo en la segunda:

$$(x^2)^2 - x = 0 \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0.$$

Luego, $x = 0$; $x = 1$. Por lo tanto, los puntos críticos son $(0, 0), (1, 1)$. Hasta 6 puntos.

Notemos que $(0, 0) \in \text{int}(K)$ ya que $0 < 12$ y también $(1, 1) \in \text{int}(K)$ pues $1 < 15$. Y el determinante de la Hessiana es $D(x, y) = 4xy - 1$.

En $(0, 0)$: $D(0, 0) = 4(0)(0) - 1 = -1 < 0$, por lo que $(0, 0)$ es un punto de silla.

En $(1, 1)$: $D(1, 1) = 4(1)(1) - 1 = 3 > 0$, $\partial^2 g/\partial x^2(1, 1) = 2 > 0$, por lo que $(1, 1)$ es un mínimo local. Hasta 10 puntos.