

## RUBRICA DEL SEGUNDO EXAMEN DE CÁLCULO VECTORIAL PAO 2 2025-2026

**TEMA 1:** Sea  $F(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$ .

(a) Encuentre una función potencial  $f$  tal que  $F = \nabla f$ .

(b) Calcule la integral de línea:  $\int_C F \cdot dr$ , donde  $C$  es la curva dada por

$$r(t) = (e^t \sin t)\mathbf{i} + (e^t \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

**Solución:** Para la parte (a):

Como  $F = \langle P, Q \rangle$  con  $P(x, y) = 3 + 2xy$ ,  $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$ , buscamos  $f$  tal que  $f_x = P$ ,  $f_y = Q$ . Integramos  $f_x = 3 + 2xy$  respecto de  $x$ , obteniendo:  $3x + x^2y + g(y)$ , donde  $g(y)$  depende sólo de  $y$ . Derivamos respecto de  $y$ :  $f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$ . Por tanto, una función potencial es:  $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3$ . Hasta 5 puntos.

Para la parte (b): Como  $F = \nabla f$  en  $R^2$ , la integral de línea es independiente de la trayectoria y es:

$$\int_C F \cdot dr = f(r(\pi)) - f(r(0)).$$

Primero hallamos los extremos:  $r(t) = \langle e^t \sin t, e^t \cos t \rangle$ . Entonces:

$$r(0) = \langle e^0 \sin 0, e^0 \cos 0 \rangle = \langle 0, 1 \rangle,$$

$$r(\pi) = \langle e^\pi \sin \pi, e^\pi \cos \pi \rangle = \langle 0, -e^\pi \rangle.$$

Evaluamos  $f(x, y)$ :

$$f(r(\pi)) = f(0, -e^\pi) = 3(0) + 0^2(-e^\pi) - (-e^\pi)^3 = e^{3\pi}.$$

$$f(r(0)) = f(0, 1) = 3(0) + 0^2(1) - 1^3 = -1.$$

Hasta 8 puntos.

Por tanto,

$$\int_C F \cdot dr = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1.$$

Hasta 10 puntos.

**TEMA 2:** Hallar la masa de una lámina cuya densidad viene dada por  $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y cuya superficie tiene la forma de un helicoides descrito por la parametrización:

$$r(u, \theta) = (u \cos \theta)\mathbf{i} + (u \sin \theta)\mathbf{j} + \theta \mathbf{k},$$

con dominio:  $D = \{(u, \theta) : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq \theta \leq 6\pi\}$ .

**Solución:** La masa de una lámina sobre una superficie  $S$  está dada por:

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS.$$

Usando la parametrización en la expresión de la densidad y el cálculo de los vectores tangentes, se obtiene:

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u^2 \cos^2 \theta + u^2 \sin^2 \theta} = u.$$

$$\mathbf{r}_u = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \mathbf{r}_\theta = (-u \sin \theta, u \cos \theta, 1).$$

Hasta 4 puntos.

Resultando en la norma del producto cruz:

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + u^2} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Hasta 6 puntos.

Plantea la integral respectiva y procede a su resolución:

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(x, y, z) dS = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = \iint_D u \sqrt{1 + u^2} dA \\ &= \int_0^{6\pi} \int_0^2 u \sqrt{1 + u^2} du d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{6\pi} \left[ \frac{2}{3} (1 + u^2)^{3/2} \right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \int_0^{6\pi} d\theta = 2(5\sqrt{5} - 1)\pi. \end{aligned}$$

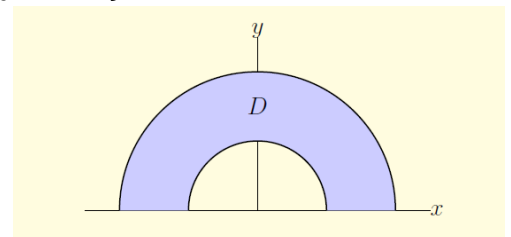
Hasta 10 puntos.

**TEMA 3:** Usando el Teorema de Green, hallar el trabajo realizado por el campo de fuerza:

$$\mathbf{F}(x, y) = (\sinh x - y^3, y^2 + x^3)$$

al mover una partícula a lo largo de la curva cerrada  $C$ , orientada positivamente, que encierra la región semianular:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4\}.$$



**Solución:** El trabajo realizado por el campo a lo largo de la curva C está dado por:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P dx + Q dy,$$

Donde:

$$P(x, y) = \sinh x - y^3, \quad Q(x, y) = y^2 + x^3.$$

Por el teorema de Green, la integral de línea puede expresarse como una integral doble sobre la región D:

$$W = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Hasta 3 puntos.

Así, el trabajo queda expresado como:

$$W = \iint_D 3(x^2 + y^2) dA.$$

Hasta 5 puntos

Trabajando en coordenadas polares, resulta:

$$W = 3 \int_0^\pi \int_2^4 r^2 r dr d\theta = 3 \int_0^\pi \int_2^4 r^3 dr d\theta.$$

Hasta 7 puntos.

Resuelve correctamente la integral doble obteniendo finalmente,  $W = 180\pi$ . Hasta 10 puntos.

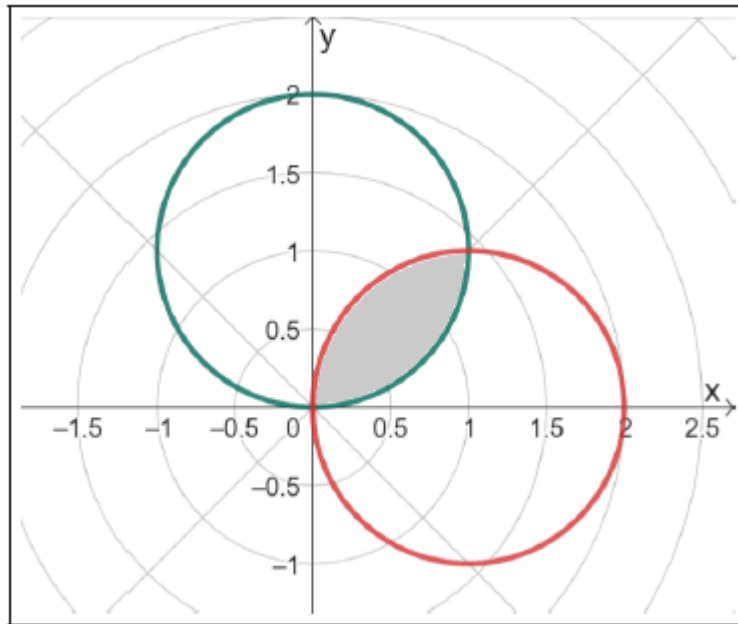
**TEMA 4:** Sea R la región del plano limitada por las curvas:  $r = 2 \cos \theta$  y  $r = 2 \sin \theta$ , en el primer cuadrante.

(a) Realice un bosquejo claro de la región R.

(b) Plantee la integral en coordenadas polares que permita calcular el área de R.

(c) Calcule el área de la región.

**Solución:** La gráfica respectiva se muestra a continuación:



Hasta 3 puntos.

Luego, plantea la integral respectiva (también es posible plantear una sola integral doble).

$$A_R = \iint_R dA = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sin\theta} r \, dr \, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r \, dr \, d\theta.$$

Hasta 6 puntos. Finalmente procede a la resolución de la integral doble, resultando en:

$$A_R = \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$A_R = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Hasta 10 puntos.

**TEMA 5:** Dada la función:  $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy$ , y el conjunto:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq 12 + 3x\},$$

obtenga y clasifique los puntos críticos de  $g(x, y)$  en el interior de  $K$ .

**Solución:** Los puntos críticos de  $g$  satisfacen que  $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ . Como

$$\partial g/\partial x = x^2 - y, \partial g/\partial y = y^2 - x,$$

Hasta 3 puntos.

Entonces, debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0, \\ y^2 - x &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene  $y = x^2$ . Sustituyendo en la segunda:

$$(x^2)^2 - x = 0 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0.$$

Luego,  $x = 0$ ;  $x = 1$ . Por lo tanto, los puntos críticos son  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Hasta 6 puntos.

Notemos que  $(0, 0) \in \text{int}(K)$  ya que  $0 < 12$  y también  $(1, 1) \in \text{int}(K)$  pues  $1 < 15$ . Y el determinante de la Hessiana es  $D(x, y) = 4xy - 1$ .

En  $(0, 0)$ :  $D(0, 0) = 4(0)(0) - 1 = -1 < 0$ , por lo que  $(0, 0)$  es un punto de silla.

En  $(1, 1)$ :  $D(1, 1) = 4(1)(1) - 1 = 3 > 0$ ,  $\partial^2 g/\partial x^2(1, 1) = 2 > 0$ , por lo que  $(1, 1)$  es un mínimo local. Hasta 10 puntos.