Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas — espol	**Escuela Superior Politécnica del Litoral** **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas**
	Materia: Matemáticas Discretas **Fecha:** 06/02/2026
	Profesores: Cristhian Hernández, Ebner Pineda
	Periodo y Año: II PAO 2025
	Estudiante:
	Matrícula:
	Paralelo:

EXAMEN DE TERCERA EVALUACIÓN

COMPROMISO DE HONOR

Al leer este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o una esferográfica, que los temas voy a desarrollarlos en forma ordenada, que a lo sumo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen, y, NO USARÉ calculadora alguna o cualquier instrumento de comunicación ajeno al desarrollo del examen. No debo consultar libros, ni notas, ni apuntes adicionales a las que se proporcionen para esta evaluación.

Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leído y al estar de acuerdo con la declaración.

____

"Como estudiante de la ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

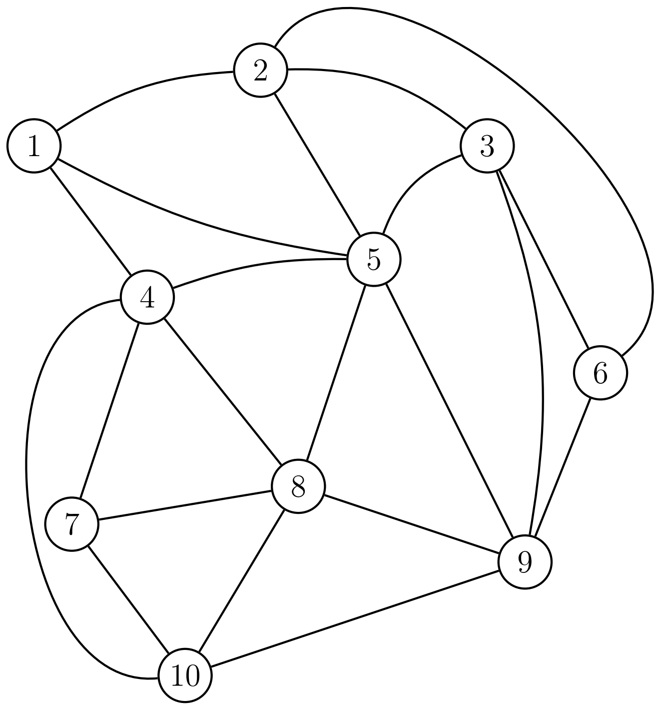
1. (20 puntos) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. Debe justificar formalmente su respuesta.

   (a) Todo grafo bipartito completo posee ciclo de Hamilton. (5 puntos).

(b) Si k es una constante entera positiva y $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ es una función tal que $f(n) = (n+1)^k - n^k$, entonces $f(n) = \Theta(n^k)$ (5 puntos).

(c) En un árbol de n vértices, es posible que todos los vértices tengan grado mayor o igual a 2. (10 puntos).

2. (20 puntos) Dado el siguiente grafo:



utilizando el orden de vértices $10, 8, 4, 7, 9, 5, 2, 1, 6, 3$, encuentre un árbol de expansión con el método de búsqueda en profundidad.

3. (20 puntos) Sea $f : X \subseteq \mathbb{Z} \mapsto Y \subseteq \mathbb{Z}$ una función tal que:

$$f(n) = \frac{n^2 + 1}{n + 1}.$$

(a) Determine el conjunto X con mayor cardinalidad tal que f esté bien definida. Es decir, debe encontrar X tal que $f(n) \in \mathbb{Z}$ para toda $n \in X$.
Ejemplo: $1 \in X$ pero $2 \notin X$. (15 puntos).

(b) Determine el conjunto Y que hace que f sea sobreyectiva (5 puntos).

4. (20 puntos) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_1 > 0$ y para todo $n \geq 2$ se tiene que

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Usando inducción fuerte, demuestre que para todo $n \geq 2$, $a_n > 0$.

5. (20 puntos) Considere el conjunto de fichas de Scrabble **distintas** (pese a que se repitan las letras, los subíndices hacen que las fichas sean diferentes) definido por:

$$A = \{T_1, A_1, C_1, T_2, A_2, C_2\}.$$

Sea S el conjunto de todas las permutaciones posibles (en forma de cadena) de los elementos de A. Por ejemplo: $T_2A_1C_1T_1A_2C_2 \in S$, $C_2A_1T_2T_1A_2C_1 \in S$. Se define la relación R sobre S de la siguiente forma:

$$xRy \iff \text{al borrarle los subíndices a } x \text{ y a } y\text{, las cadenas resultantes son idénticas.}$$

Ejemplo: $T_2A_1C_1T_1A_2C_2 \; R \; T_2A_1C_2T_1A_2C_1$ pero $T_2A_1C_1T_1A_2C_2 \not R \; C_2A_1T_2T_1A_2C_1$.
Suponga que R es una relación de equivalencia.

(a) Determine la clase de equivalencia $[A_2C_1T_2A_1C_2T_1]$, indique su cardinalidad y argumente si existe o no una clase de equivalencia con cardinalidad distinta. (10 puntos).

(b) Determine la cardinalidad del conjunto cociente S/R (10 puntos).