ELABORACIÓN Y ANÁLISIS DE CURVAS: "MOMENTO FLECTOR VS. CURVATURA" PARA SECCIONES TRANSVERSALES DE COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO DISEÑADAS SEGÚN EL CÓDIGO ACI 318-2002

Daniel Toro Castillo[1], Ottón Lara Montiel[2]

RESUMEN

En el proceso del diseño estructural es importante conocer la relación Momento-Curvatura de las secciones de los elementos estructurales, con el objetivo de saber cual es la capacidad de ductilidad de curvatura y la máxima capacidad a flexión del elemento, para luego hacer una comparación entre estos valores y las demandas obtenidas en el diseño sismo-resistente de una estructura.
El presente trabajo es un estudio de la relación Momento-Curvatura. Consiste en la elaboración y análisis de curvas momento flector vs. curvatura para diferentes secciones transversales de columnas de concreto reforzado, las mismas que han sido diseñadas según las disposiciones especiales de diseño sísmico que contiene el Código ACI 318-2002.
Además, a partir de las curvas Momento-Curvatura se han elaborado gráficas Razón de Ductilidad de Curvatura-Carga Axial y Rotación Plástica-Carga Axial. Todas estas curvas ayudarán al diseñador a tener una idea del comportamiento global de una estructura a partir del comportamiento local de sus columnas.

ABSTRACT

In the process of the structural design it is important to know the Moment-Curvature relationship of the structural element sections in order to know what the curvature ductility capacity and the flexion capacity of the element are. These values can then be compared with the demands obtained from the seismic design of the structure.
This investigation is an analysis of the Moment-Curvature relationship. It consists on the elaboration and the analysis of Moment-Curvature curves for different sections of reinforced concrete columns that have been designed based on the special provisions of seismic design of the ACI 318-2002 code.
Additionally, from the Moment-Curvature curves, Curvature Ductility Ratio-Axial Load curves and Plastic Rotation-Axial Load curves have been prepared. All of these curves will help the designer to have an idea of the global behavior of the structure based on the local behavior of its columns.

INTRODUCCION

La ductilidad es la capacidad que tiene un elemento de sufrir grandes deformaciones bajo cargas cercanas a la falla. Si un elemento posee poca capacidad de ductilidad de curvatura, lo más probable es que presente una falla de tipo frágil cuando la estructura ingrese al rango no lineal. Este tipo de falla no es deseable en estructuras sismo-resistentes. Un valor alto de ductilidad de curvatura hace que la edificación dé amplia advertencia de falla en el

---

[1] Ingeniero Civil, 2006; e-mail: danieltorocastillo@yahoo.com
[2] Director de Tesis, Ingeniero Civil, Instituto Tecnológico de Monterrey, 1968, Maestría EEUU, Universidad de California,Berkeley, 1977. Profesor de ESPOL desde 1983., email: sismica@sic.com.ec.

rango no lineal; además, hará posible la redistribución de momentos y la disipación de energía.

La ductilidad del elemento se mide por medio de la relación Momento-Curvatura ($M-\phi$) calculando la razón de ductilidad de curvatura (μ_ϕ), que es el cociente entre el valor de la curvatura última (ϕ_u) y la curvatura cedente (ϕ_y) (ambos valores obtenidos a través de la curva momento-curvatura). Este parámetro (razón de ductilidad de curvatura), en definitiva determina la capacidad de rotación plástica (θ_P) que va a tener la columna frente a un incremento de momentos flectores, caso que se presenta en un sismo.

Los gráficos Momento-Curvatura de una sección transversal de columna de concreto reforzado alcanzan su importancia al ser una forma de observar el desempeño de dicho elemento y de medir su ductilidad cuando esté sujeto a cargas, en este caso momentos flectores que se incrementan hasta llegar a la falla (comportamiento monotónico) combinados con cargas axiales.

Este estudio tiene como objetivo la elaboración y el análisis de curvas Momento-Curvatura para diferentes secciones transversales de columnas de concreto reforzado. Cada una de estas curvas se diferencian por parámetros como las dimensiones (cuadradas con lado desde 30cm. hasta 90cm. y circulares con diámetro desde 30cm.hasta 90cm.), el porcentaje de carga axial (P/P_0=0, 0.1, 0.2 y 0.3), el porcentaje de acero de refuerzo longitudinal (ρ=1%, 2% y 3%), el diámetro del acero de refuerzo transversal (de 10mm, 12mm y 14mm, dependiendo de las dimensiones de la columna) y la separación de los estribos o las espirales (7.5cm y 10cm). Siendo:

P = Carga Axial en la Columna
$P_0 = 0.85\, f'_c\, A_g$
f'_c = Esfuerzo máximo a compresión del concreto no confinado
A_g = Área total de la sección transversal
ρ = Porcentaje de acero de refuerzo longitudinal

DESARROLLO DE LAS CURVAS

Existen algunas formas de calcular el Diagrama Momento-Curvatura, todas éstas se basan en los mismos principios: compatibilidad de deformaciones, equilibrio de fuerzas y equilibrio de momentos. Además, deben estar definidas la relaciones constitutivas (relaciones esfuerzo-deformación) del concreto y del acero de refuerzo.

Las curvas se han desarrollado con el programa XSECTION Versión 2.11 (Seyed, 1995). Este programa utiliza, para definir las relaciones constitutivas, el modelo de Mander (1988) para el concreto confinado y el modelo de Park (1975) para el acero de refuerzo. El modelo de Mander (1988) toma en cuenta el efecto de confinamiento del concreto mediante refuerzo transversal debidamente dispuesto. A su vez el modelo de Park (1975) para el acero de refuerzo toma en cuenta la característica de endurecimiento por deformación.

El esfuerzo máximo a compresión del concreto no confinado (f'_c) empleado para generar las curvas es de 28 MPa. y el esfuerzo de cedencia del acero de refuerzo (f_y) es de 420 MPa.

Además, a partir de los diagramas Momento-Curvatura se han generado diagramas Razón de Ductilidad de Curvatura (μ_ϕ) vs. Porcentaje de Carga Axial (P / P_0) y diagramas Rotación Plástica (θ_P) vs. Porcentaje de Carga Axial para cada sección de columna.

TIPOS DE CURVAS

En el presente estudio se han elaborado y analizado más de seiscientas cincuenta curvas Momento vs. Curvatura, alrededor de noventa curvas Razón de Ductilidad de Curvatura vs. Carga Axial y cerca de noventa curvas Rotación Plástica vs. Carga Axial.

Las columnas, cuyas curvas se presentan en este estudio, han seguido las Disposiciones Especiales para el Diseño Sísmico que presenta el Código ACI 318-2002 en su Capítulo 21.

En las figuras 1, 2 y 3 se presentan los tres tipos de curvas (Momento vs. Curvatura, Razón de Ductilidad de Curvatura vs. Carga Axial y Rotación Plástica vs. Carga Axial) que se han generado en el presente estudio, tomando como ejemplo una columna de 50cm. de diámetro.

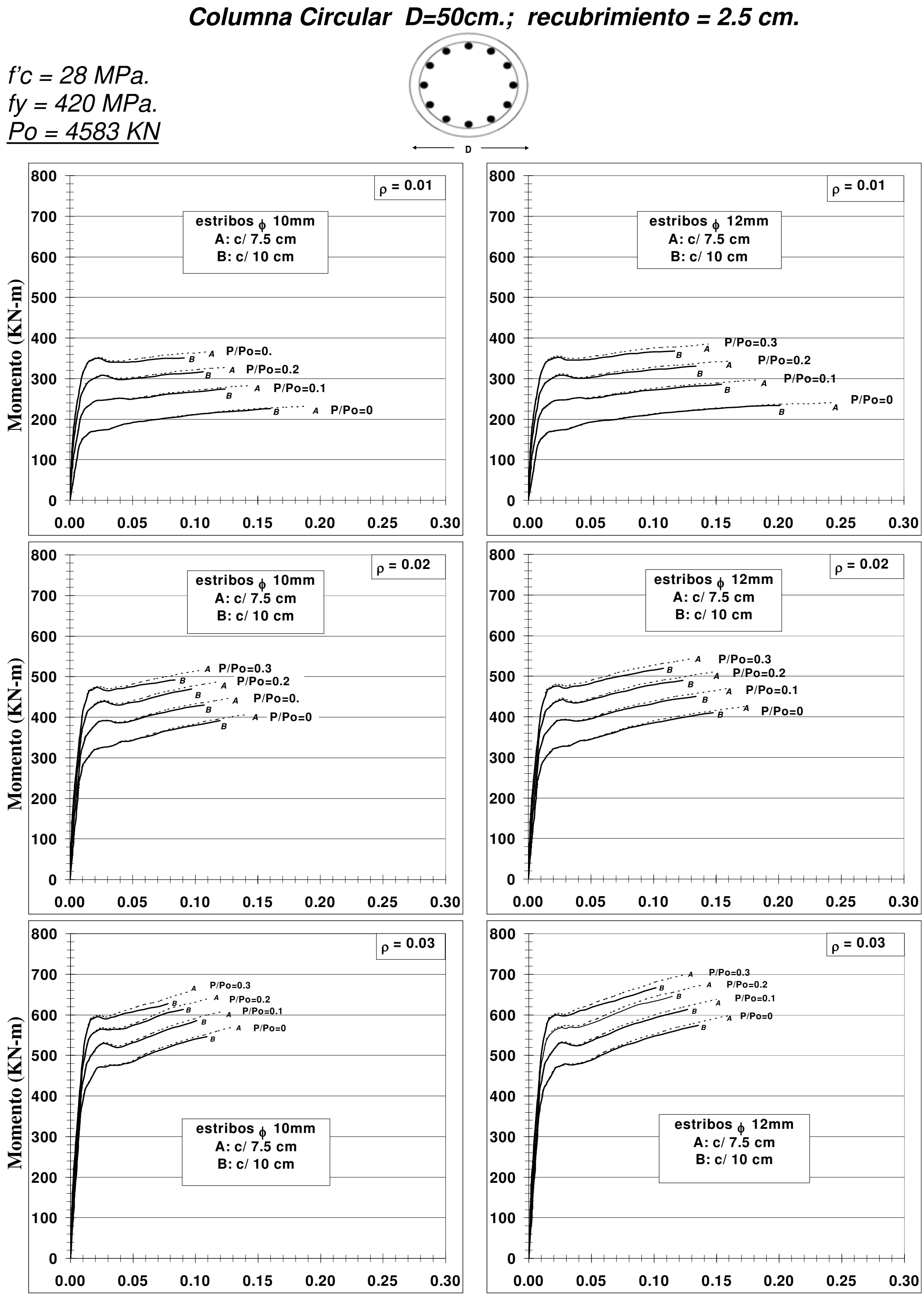
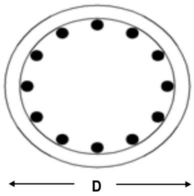


Figura 1.- Curvas Momento vs. Curvatura

Columna Circular D=50cm.; recubrimiento = 2.5 cm.

f'c = 28 MPa.
fy = 420 MPa.
Po = 4583 KN



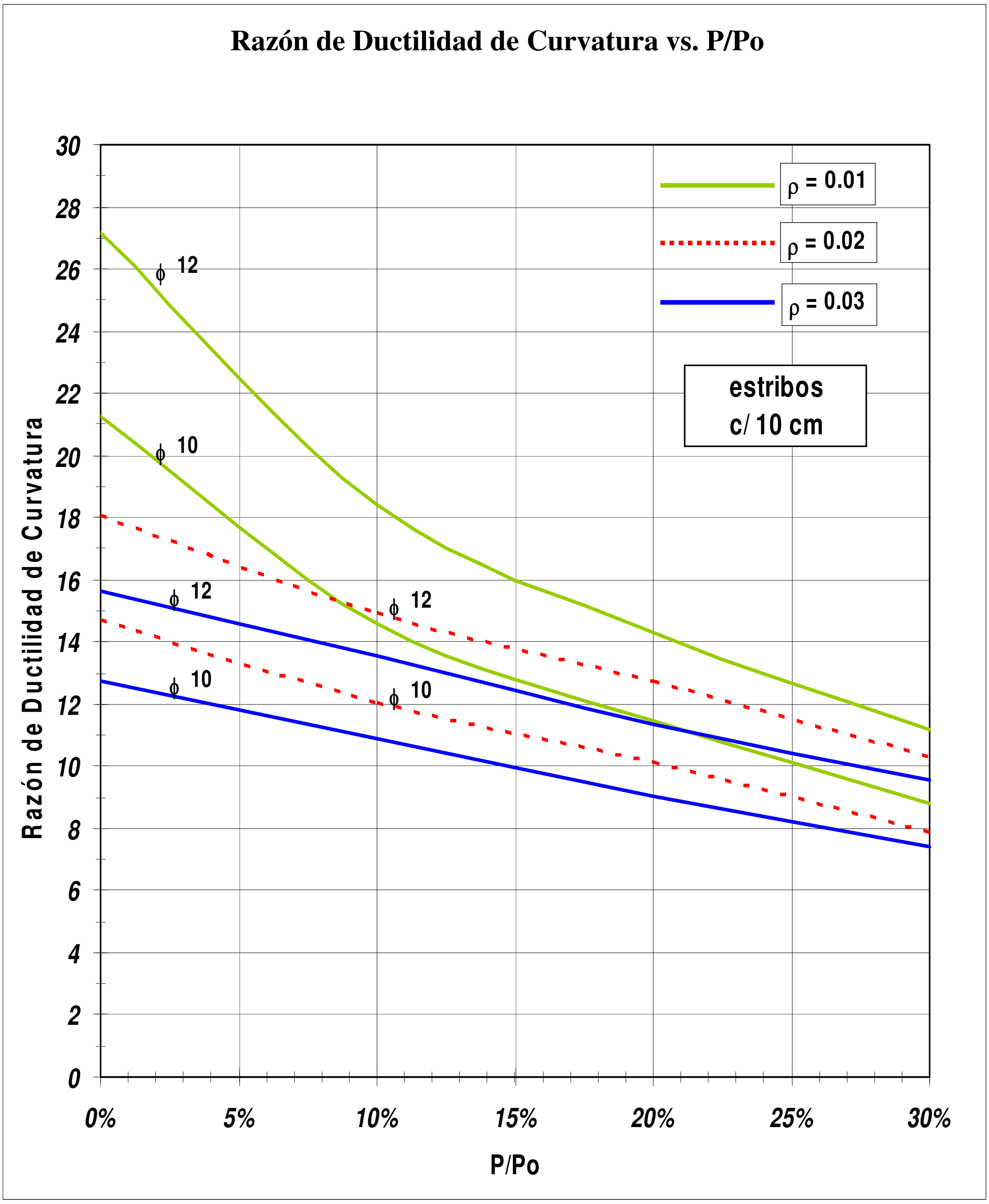
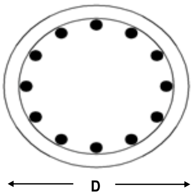


Figura 2.- Curvas Razón de ductilidad de curvatura vs. Carga Axial

Columna Circular D=50 cm. ; recubrimiento = 2.5 cm.

f'c = 28 MPa.
fy = 420 MPa.
Po = 4583 KN



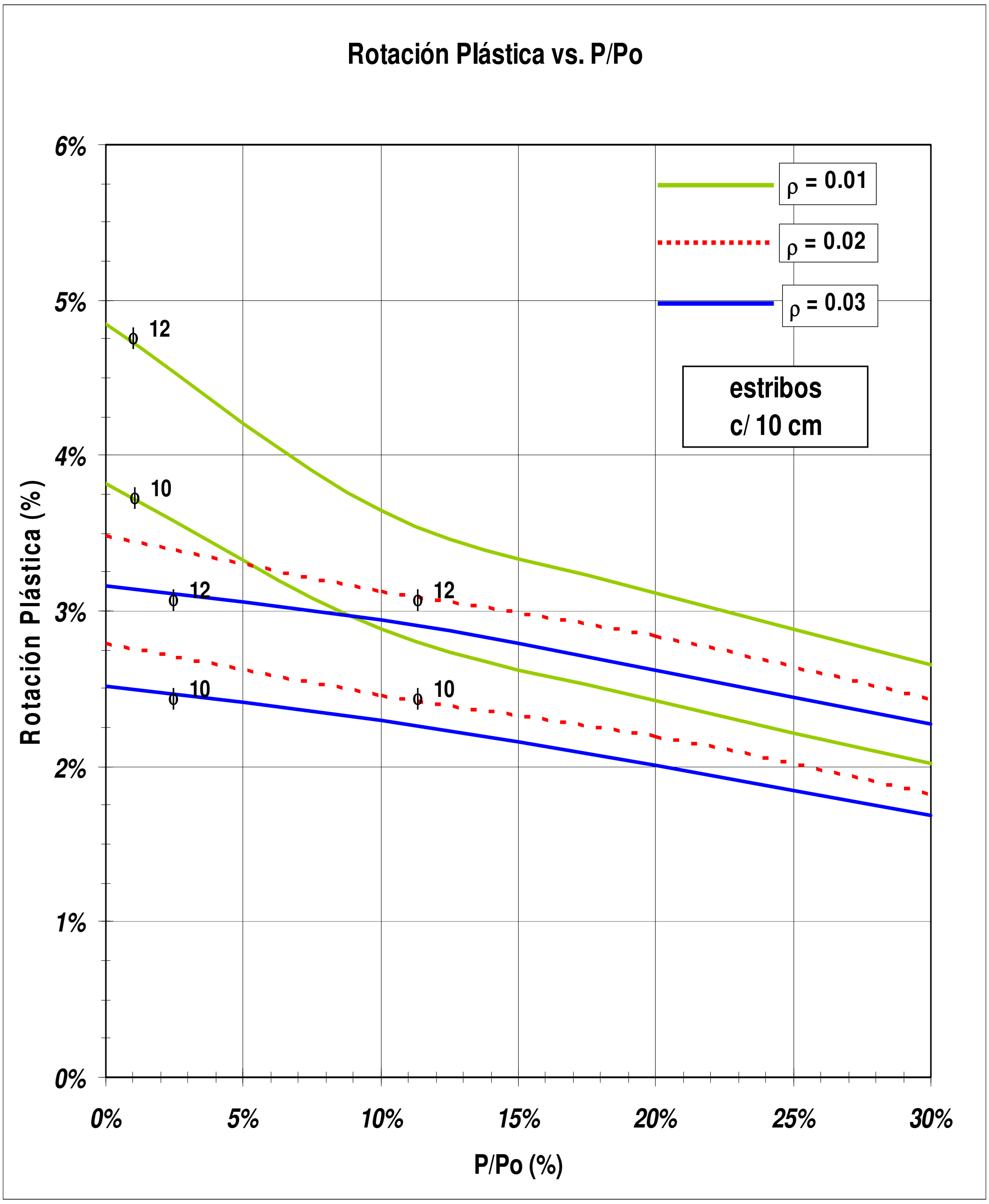


Figura 3.- Curvas Rotación Plástica vs. Carga Axial

VALORES DE RAZÓN DE DUCTILIDAD DE CURVATURA Y DE ROTACIÓN PLÁSTICA OBTENIDOS A PARTIR DE LAS CURVAS

COLUMNAS CUADRADAS

Para columnas cuadradas bajo cargas axiales del 10% de P_0 ó menores con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron razones de ductilidad de curvatura de **10 a 28** usando estribos de 10mm. de diámetro separados cada 10cm.; y razones de ductilidad de curvatura de **12 a 33** usando estribos de 12mm. de diámetro separados cada 10 cm. Asimismo para columnas bajo cargas axiales del 10% al 30% con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron razones de ductilidad de curvatura de **6 a 17** usando estribos de 10mm. de diámetro separados cada 10cm.; y razones de ductilidad de curvatura de **7 a 22** usando estribos de 12mm. de diámetro separados cada 10cm.

Para columnas cuadradas bajo cargas axiales del 10% de P_0 ó menores con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron rotaciones plásticas de **2% a 4.75%** usando estribos de 10mm. de diámetro separados cada 10cm.; y rotaciones plásticas de **2.25% a 5.75%** usando estribos de 12mm. de diámetro separados cada 10 cm. Asimismo para columnas bajo cargas axiales del 10% al 30% con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron rotaciones plásticas de **1.3% a 3.25%** usando estribos de 10mm. de diámetro separados cada 10cm.; y rotaciones plásticas de **1.6% a 4.25%** usando estribos de 12mm. de diámetro separados cada 10cm.

COLUMNAS CIRCULARES

Para columnas circulares bajo cargas axiales del 10% de P_0 ó menores con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron razones de ductilidad de curvatura de **11 a 23** usando espirales de 10mm. de diámetro separadas cada 10cm.; razones de ductilidad de curvatura de **11 a 29** usando espirales de 12mm. de diámetro separadas cada 10 cm.; y razones de ductilidad de curvatura de **13 a 32** usando espirales de 14mm. de diámetro separadas cada 10 cm. Asimismo para columnas bajo cargas axiales del 10% al 30% con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron razones de ductilidad de curvatura de **7.5 a 16** usando espirales de 10mm. de diámetro separadas cada 10cm.; razones de ductilidad de curvatura de **7 a 20** usando espirales de 12mm. de diámetro separadas cada 10cm.; y razones de ductilidad de curvatura de **9 a 21** usando espirales de 14mm. de diámetro separadas cada 10cm.

Para columnas circulares bajo cargas axiales del 10% de P_0 ó menores con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron rotaciones plásticas de **2.3% a 4.10%** usando espirales de 10mm. de diámetro separadas cada 10cm.; rotaciones plásticas de **2.25% a 5.25%** usando espirales de 12mm. de diámetro separadas cada 10 cm.; y rotaciones plásticas de **2.60% a 5.50%** usando espirales de 14mm. de diámetro separadas cada 10cm. Asimismo para columnas bajo cargas axiales del 10% al 30% con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron rotaciones plásticas de **1.75% a 3.25%** usando espirales de 10mm. de diámetro separadas cada 10cm.; rotaciones plásticas de **1.60% a 4.25%** usando espirales de 12mm. de diámetro separadas cada 10cm.; y rotaciones plásticas de **2.10% a 4.25%** usando espirales de 14mm. de diámetro separadas cada 10cm.

CONCLUSIONES

1) Los parámetros que tienen efectos significativos en la ductilidad de curvatura de las columnas son: el nivel de carga axial, la relación volumétrica del acero de confinamiento (esto incluye las dimensiones del núcleo confinado, el diámetro de la varilla de acero transversal, el espaciamiento del acero transversal) y el porcentaje de acero de refuerzo longitudinal.

2) De los diagramas Momento vs. Curvatura para secciones cuadradas y circulares se concluye lo siguiente:

- A medida que aumenta el porcentaje de acero longitudinal (ρ) en la sección, la capacidad para resistir momentos flectores aumenta, mientras que la curvatura última (ϕ_u) disminuye. Esto se debe a que un incremento en el área de acero longitudinal aumenta las fuerzas internas de tensión en la sección haciendo que el momento flector resistente también aumente. Por otro lado, un aumento en el área de acero longitudinal hace que para lograr el equilibrio de fuerzas y momentos en la sección, la longitud del eje neutro (kd) aumente y por lo tanto la curvatura disminuya.
- Conforme aumenta la carga axial en la columna (para valores de P/P_0 entre 0 y 0.30) la capacidad de resistir momentos flectores aumenta mientras que la curvatura última (ϕ_u) disminuye. Esto se debe a que un aumento en la carga axial externa aumenta las fuerzas internas en la sección para satisfacer las ecuaciones de equilibrio, esto hace que el momento flector resistente también aumente. Este incremento en las fuerzas internas provoca que la longitud del eje neutro aumente y disminuya la curvatura.
- Al incrementar el diámetro de las varillas del acero de refuerzo transversal (i.e., de 10mm. a 12mm. ó de 12mm. a 14mm.), para un mismo porcentaje de acero longitudinal y un mismo nivel de carga axial, se tiene un aumento en los valores de curvatura última (ϕ_u) mientras que la capacidad para resistir momentos flectores no experimenta variaciones significativas. Esto se debe a que el valor de ρ_s (relación volumétrica del acero de confinamiento), variable que depende del área de refuerzo transversal, de las dimensiones de la sección y de la separación de los estribos o espirales; es además directamente proporcional a la deformación última del concreto confinado (ε_{cu}). Por lo tanto conforme el diámetro de las varillas del acero de refuerzo transversal aumenta el valor de ρ_s también aumenta junto con los valores de ε_{cu} y ϕ_u.
- Adicionalmente, si el espaciamiento de estribos aumenta (i.e., de 7.5cm. a 10cm.), la curvatura última (ϕ_u) disminuye mientras que la capacidad para resistir momentos flectores no experimenta variaciones significativas. Esto es debido al valor de ρ_s (relación volumétrica del acero de confinamiento) tal como se explicó anteriormente.
- Al incrementar las dimensiones de la sección transversal, la capacidad de resistir momentos flectores también se incrementa, en tanto que la curvatura última (ϕ_u)

disminuye. Esto es debido al valor de ρ_s (relación volumétrica del acero de confinamiento) tal como se explicó anteriormente.

3) De los diagramas Razón de Ductilidad de Curvatura vs. Porcentaje de Carga Axial para secciones cuadradas y circulares se concluye lo siguiente:

- A medida que aumenta el porcentaje del acero de refuerzo longitudinal (ρ) en la sección, la razón de ductilidad de curvatura (μ_ϕ) disminuye. Esto es debido a la disminución de la curvatura última (ϕ_u) conforme aumenta ρ (como ya se explicó anteriormente), ya que $\mu_\phi = \phi_u / \phi_y$, siendo ϕ_y la curvatura cedente.
- Conforme aumenta el porcentaje de carga axial (P / P_0) se reduce la razón de ductilidad de curvatura de la columna. Además, si se aumenta el diámetro de los estribos o las espirales (de 10mm. a 12mm. o de 12mm. a 14mm.) la razón de ductilidad de curvatura también aumenta para un mismo porcentaje de acero de refuerzo longitudinal (ρ).
- Los valores de razón de ductilidad de curvatura de las columnas decrecen conforme aumentan las dimensiones de la sección transversal. Esto se debe principalmente al valor de ρ_s (relación volumétrica del acero de confinamiento), variable directamente proporcional a la deformación última del concreto confinado (ε_{cu}). Conforme las dimensiones de la sección aumentan el valor de ρ_s disminuye considerablemente.

4) De los diagramas Rotación Plástica (θ_P) vs. Porcentaje de Carga Axial (P / P_0) para secciones cuadradas y circulares se concluye lo siguiente:

- A medida que aumenta el porcentaje del acero de refuerzo longitudinal (ρ) en la sección, la rotación plástica (θ_P) disminuye. Esto es debido a la disminución de la curvatura última (ϕ_u) conforme aumenta ρ (como ya se explicó anteriormente), ya que $\theta_P = (\phi_u - \phi_y) L_P$, siendo L_P la longitud de la rótula plástica.
- Conforme aumenta el porcentaje de carga axial (P / P_0) se reduce la rotación plástica de la columna (θ_P). Además, si se aumenta el diámetro de los estribos o las espirales (de 10mm. a 12mm. o de 12mm. a 14mm.) la rotación plástica también aumenta para un mismo porcentaje de acero de refuerzo longitudinal (ρ).
- En todas las columnas bajo una carga axial menor al 10 % de P_0 con porcentajes de acero de refuerzo longitudinal de 1%, 2% y 3%, se obtuvieron valores de rotación plástica mayores al **2%**, que es el valor de deriva admisible establecida por el Código IBC 2003 para Edificios Grupo I, mientras que para columnas bajo una carga axial entre el 10% y el 30 % el obtener valores de rotación plástica mayores al 2% está condicionado a los valores del porcentaje de carga axial (P / P_0), al porcentaje de refuerzo longitudinal (ρ) y al diámetro de las varillas de los estribos. Los diseñadores deberán prestar especial atención al diseño de la base de las columnas del primer entrepiso, que durante un sismo severo experimentarían comportamiento inelástico, a fin de garantizar valores de rotación plástica mayores ó iguales al 2%, ya que en estos sitios la formación de articulaciones plásticas es muy probable.

REFERENCIAS

1. Toro, D., “Elaboración y análisis de curvas Momento flector vs. Curvatura para secciones transversales de columnas de concreto reforzado diseñadas según el Código ACI 318-2002”, Tesis de Grado de Ingeniero Civil, Escuela Superior Politécnica del Litoral, 2006.
2. Park, R., Paulay, T., “Estructuras de concreto reforzado”, Primera Edición, México, Editorial Limusa, 1979.
3. Paulay, T., Priestley, M.J.N., “Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings”, First Edition, New York, John Wiley & Sons, 1992 .
4. Priestley, M.J.N., Seible, F., Calvi, G.M., “Seismic Design and Retrofit of Bridges”, First Edition, New York, John Wiley & Sons, 1996.
5. Lara, O. “Demanda de Ductilidad global vs. Ductilidad local disponible en estructuras de hormigón armado”, Guayaquil, Escuela Superior Politécnica del Litoral, 1985.

Daniel Toro Castillo
Egresado

Ing. Otton Lara Montiel
Director de Tesis de Grado