



ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA



"ESTUDIO COMPARATIVO DE DIFERENTES METODOS
DE DISEÑO DE ESTIMADORES DE ESTADO, APLICADO
A UN SISTEMA DE 2do. ORDEN"

TESIS DE GRADO

**Previa a la Obtención del Título de:
INGENIERO EN ELECTRICIDAD**

Especialización: ELECTRONICA

Presentada por:

JOSE L. GONZALEZ DECKER

Guayaquil - Ecuador

1.988


A G R A D E C I M I E N T O

Al ING. CARLOS VILLAFUERTE PERA
Director de Tesis, por su ayuda
y colaboración para la realiza-
ción de este trabajo.

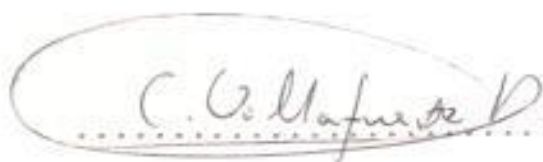
Al ING. JAVIER URQUIZO CALDERON
Miembro del Tribunal de Tesis,
por su ayuda y colaboración pa-
ra la realización de este tra-
bajo.

DEDICATORIA

A HIS PADRES



.....
ING. HERNAN GUTIERREZ V.
PRESIDENTE DEL TRIBUNAL
DECANO DE LA FACULTAD DE
INGENIERIA ELECTRICA



.....
ING. CARLOS VILLAFUERTE F.
DIRECTOR DE TESIS
SUB-DECANO DE LA FACULTAD
DE INGENIERIA ELECTRICA



.....
ING. EDGAR IZQUIERDO O.
MIEMBRO PRINCIPAL DEL TRI-
BUNAL



.....
ING. JAVIER URQUIZA C.
MIEMBRO PRINCIPAL DEL TRI-
BUNAL

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en esta tesis, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).


José Luis González Decker

RESUMEN

Se establecerán los conceptos necesarios que faciliten la exposición de la naturaleza del problema en tiempo discreto. Se hará un estudio de lo que es un estimador y también se estudiará sistemas usando estimadores. Se establecerán conceptos fundamentales y condiciones importantes de un estimador y del sistema a ser estudiado (un servomecanismo lineal DC de 2° orden), tales como la estabilidad, controlabilidad, observabilidad, etc. Se analizará el Control de Lazo Cerrado del sistema con Observador incluyendo diagramas y se establecerán las ecuaciones que definen al Controlador.

Se introducirá el concepto de lo que es un Filtro de Kalman como un estimador de estados fijando definiciones importantes y ecuaciones que lo definan. Se obtendrán ecuaciones de los parámetros que nos servirán para comparar estimadores.

También se hará una introducción al observador tipo Luenberger y se establecerán conceptos, ecuaciones del Observador y de los parámetros para la comparación de los Estimadores.

Siguiendo los lineamientos de los Estimadores anteriores se discutirán conceptos, métodos y resultados del observador Estocástico.

Finalmente, se hará una recapitulación de los Observadores estudiados, se definirá el sistema al cual se le estimará los estados y se hará la discusión de las ventajas y desventajas entre los observadores. En los apéndice se incluirán programas para la simulación digital del modelo de la planta y de los observadores, además los gráficos y tablas resultantes de dicha simulación, que ayuden a la comparación de los Observadores.

INDICE GENERAL

	F&g.
RESUMEN	VI
INDICE GENERAL	VIII
INDICE DE FIGURAS	XII
INDICE DE TABLAS	XIV
INDICE DE SIMBOLOS	XV
INTRODUCCION	XXIII
1. GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS LINEALES	25
1.1. Introducción: Sistemas Discretos en el tiempo	25
1.2. Descripción en forma de variables de estado de Sistemas lineales	27
1.3. Descripción de Sistemas lineales de tiempo discreto	29
1.4. Solución de ecuaciones de estado en diferencias	37
1.5. Estabilidad de Sistemas discretos	41
1.6. Controlabilidad de Sistemas Lineales Discretos	42
1.7. Observabilidad de Sistemas Lineales Discretos	44

1.8.	Vectores estocásticos de tiempo discreto	46
II.	RELACIONES ENTRE CONTROLABILIDAD, OBSERVABILIDAD Y RECONSTRUCCION DE ESTADO	50
2.1.	Revisión de conceptos relacionados con Controlabilidad, Observabilidad y Reconstrucción de estado	50
2.1.1.	Propiedades de los modelos de variables de estado	53
2.2.	Problema de la regulación de lazo cerrado	54
2.3.	Naturaleza del problema de estimación de estado	59
2.4.	Diseño matemático del Reconstructor de estados	63
2.5.	Diseño del compensador de salida realimentada que regule la respuesta de lazo cerrado: colocación de polos	66
III.	OBSERVADORES TIPO FILTRO DE KALMAN	74
3.1.	Introducción al Filtrado de Kalman	74
3.1.1.	Descripción de Sistemas y ruido	

	estadístico	76
3.2.	Problema del filtro lineal óptimo y discreto	83
3.3.	Predicción de una etapa del Filtro de Kalman	87
3.4.	Filtrado de Kalman discreto	92
IV.	OBSERVADORES TIPO LUENBERGER	98
4.1.	Introducción al Observador tipo Luenberger	98
4.2.	Observación de una Funcional Lineal particular	114
4.3.	Observador para Sistemas con disturbios no medibles	129
V.	OBSERVADORES DEL TIPO ESTIMADOR ESTOCÁSTICO	136
5.1.	Introducción a la Estimación Estocástica	136
5.2.	Ganancias óptimas del Observador Estocástico	144
5.2.1.	Sistemas y observadores dinámicos	144

5.2.2.	Ecuaciones de Covariancia del error	147
5.2.3.	Genancias óptimas	147
VI.	DISEÑO DE UN SERVOMECANISMO DC (2º. ORDEN)	150
6.1.	Introducción	151
6.2.	Descripción del Sistema	152
6.3.	Diseño, Análisis y Simulación Digital ...	163
6.4.	Discusiones	169
VII.	173
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	173
	APENDICES	175
	APENDICE A: PROGRAMAS	176
	APENDICE B: GRAFICAS Y TABLAS	232
	APENDICE C: MANUAL DEL USUARIO	253
	BIBLIOGRAFIA	254

INTRODUCCION

La solución al problema de diseño de un regulador continuo usando realimentación de variables de estado depende de la disponibilidad de todos los estados del sistema lineal, ya sea por medición directa o por algún esquema de reconstrucción de estados.

El propósito de este trabajo es analizar diferentes métodos alternativos de reconstrucción de estados, como son: el Observador de Luenberger, el Filtro de Kalman y el estimador Estocástico; para sistemas en los que existe una combinación de mediciones de las variables de entrada y salida libres de y contaminadas con ruido. El análisis se aplicará a un sistema SISE (Simple Ingreso Simple Egreso) discreto, lineal e invariante en el tiempo, de 2º orden, un servomecanismo DC.

Se establecerán los conceptos teóricos que faciliten el estudio de los sistemas estimadores de estado, definiremos los observadores y los analizaremos para fijar las condiciones que debe cumplir el sistema al cual estimaremos los estados, se definirá el sistema (planta) al cual se le estimará los estados, y finalmente estudiaremos el sistema en conjunto, se hará la discusión respectiva de cada observador y obtendremos las conclusiones necesarias.

En apéndices se incluirán tablas y gráficas adicionales, además de programas que puedan ayudar a la comparación de los observadores de estado.

CAPITULO I

"GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS LINEALES"

1.1. Introducción: Sistemas Discretos en el tiempo.

En un sistema lineal continuo en el tiempo se considera que las variables de entrada, salida, estado, etc. pueden ser observadas en todo instante.

En el caso de computadoras digitales, estas muestrean el valor de las variables en instantes discretos de tiempo, que si son tomados lo suficientemente cercanos, proporcionan una aproximación satisfactoria a las respuestas del sistema continuo bajo estudio. Aun si el sistema no es digital las observaciones sólo pueden ser hechas periódicamente.

Los sistemas discretos pueden ser clasificados en:

1. Sistemas inherentemente discretos, tales como

computadoras digitales, donde tiene sentido considerar al sistema en instantes discretos de tiempo, puesto que es irrelevante lo que suceda entre dichos instantes discretos de tiempo.

2. Sistemas discretos, que resultan de considerar sistemas continuos en el tiempo, solamente en instantes discretos de tiempo. Cuando se analiza sistemas continuos en el tiempo en una computadora digital o cuando el sistema continuo en el tiempo es interconectado a sistemas inherentemente discretos en el tiempo tales como los controladores digitales, entonces se obtiene como conjunto un sistema discreto.

La teoría de sistemas lineales discretos en el tiempo es muy similar a la de sistemas lineales continuos en el tiempo y aun sus resultados. La teoría de control óptimo lineal y discreto en el tiempo es de interés por su aplicación en control por computadora.

El estudio se dirigirá a sistemas lineales porque muchos sistemas son lineales o aproximadamente lineales, y porque las herramientas matemáticas disponibles para el estudio de sistemas discretos en el ti-

empo está restringida a sistemas lineales.

Se mostrará que para sistemas lineales en que una computadora digital es un elemento, las ecuaciones lineales en diferencias resultan naturales, lo que motiva al estudio de ecuaciones lineales en diferencias.

1.2. Descripción en forma de variables de estado de Sistemas lineales discretos.

Para esta descripción, debemos definir que: las variables de estado de un sistema, son el conjunto mínimo de variables $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, tales que el conocimiento de estas variables $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$, en cualquier instante inicial $t_0 \geq 0$ mas la información sobre las entradas (excitación) aplicadas posteriormente ($t > 0$) al sistema son suficientes para determinar el estado futuro del sistema.*

A continuación revisaremos la teoría de sistemas lineales discretos en el tiempo, debido a que hay sistemas en los que no es importante observar sus propiedades en todos los instantes de tiempo, sino en

una secuencia de instantes t_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, donde suele ser posible caracterizar las propiedades del sistema por cantidades definidas solamente en esos instantes. Para estos sistemas el equivalente de la ecuación diferencial de estado es la ecuación de estado en diferencias

$$x(i+1) = f[x(i), u(i), i], \quad (1)$$

donde $x(i)$ es el estado y $u(i)$ es la entrada en el tiempo t_i . Asumimos que la salida en el tiempo t_i es dada por la ecuación de salida

$$y(i) = g[x(i), u(i), i], \quad (2)$$

Los sistemas lineales discretos en el tiempo son descritos por ecuaciones de estado en diferencias de la forma

$$x(i+1) = A(i)x(i) + B(i)u(i), \quad (3)$$

donde $A(i)$ y $B(i)$ son matrices dependientes de i . Con la correspondiente ecuación de salida

$$y(i) = C(i)x(i) + D(i)u(i), \quad (4)$$

Si las matrices A, B, C, y D son independientes de i, el sistema es invariante en el tiempo.

1.3. Descripción de Sistemas lineales de tiempo discreto.

Cuando una computadora digital es usada para controlar una planta continua en el tiempo, se tiene un sistema que es la interconexión de uno discreto y otro continuo. Esto motiva la necesidad de tener un sistema que sirva de interface entre los dos sistemas: el discreto y el continuo. Tales interfaces entre sistemas son los convertidores de continuo a discreto y viceversa.

Un convertidor de continuo a discreto, es un muestreador, figura 1.1, un dispositivo con una función continua $f(t)$, $t \geq t_0$, como entrada, y una secuencia de números reales $f^*(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, en tiempos t_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, como salida; donde la siguiente relación se cumple:

$$f^*(i) = f(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

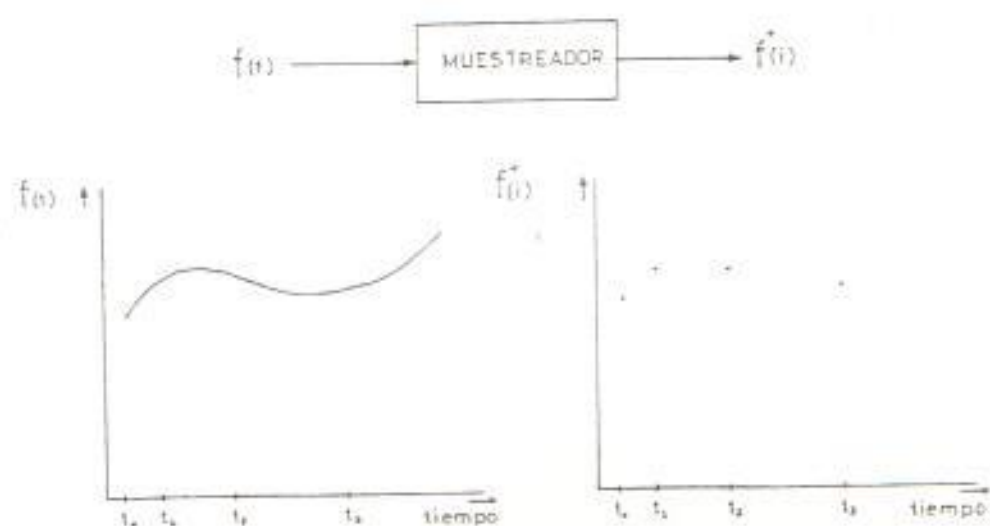


Figura 1.1 Conversión: continua a discreta

La secuencia de instantes de tiempo $t_i, i = 0, 1, 2, \dots$ con $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, es dada. El super índice $*$ se usa para distinguir secuencias de las correspondientes funciones continuas en el tiempo.

Un convertidor de discreto a continuo, es un dispositivo que acepta una secuencia de números $f^*(i), i = 0, 1, 2, \dots$, en instantes $t_i, i = 0, 1, 2, \dots$ con $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, y que produce una función continua $f(t), t \geq t_0$; un convertidor de este tipo es el retenedor de orden cero, figura 1.2, que es descrito por la relación

$$f(t) = f^*(i), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$



Figura 1.2 Conversion: discreta a continua

La figura 1.3 muestra una interconexión de sistemas discretos y continuos

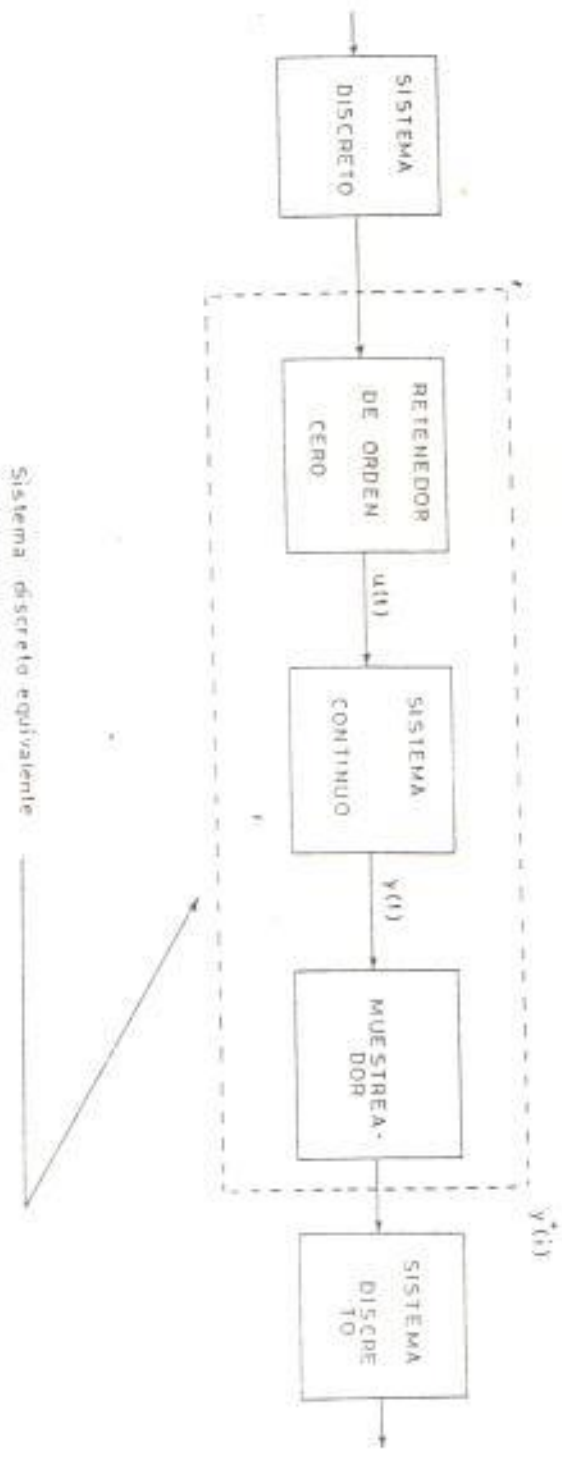


Figura 1.3 Interconexión de sistemas discretos y continuos

Para analizar este sistema, figura 1.3, se puede representar el sistema continuo, junto con los convertidores de discreto a continuo y viceversa, por medio de un sistema equivalente discreto. Para esto, suponemos que el convertidor discreto a continuo puede ser encontrado en un caso específico, y que este sistema es el retenedor de orden cero y que el convertidor de continuo a discreto es un muestreador.

Assumimos que el sistema continuo de la figura 1.3 es lineal con ecuación diferencial de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (7)$$

y ecuación de salida

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (8)$$

Debido al retenedor de orden cero

$$u(t) = u(t_i), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

La solución de la ecuación diferencial de estado (7),

evaluada en el instante t_{i+1} y con estado inicial $x(t_i)$ está dada por:

$$x(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i)x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, t)B(t)dt u(t), \quad (10)$$

donde $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transición del sistema (7); esta ecuación de estado en diferencias es del tipo (3).

En la derivación de la ecuación de salida correspondiente, permitiremos la posibilidad de que los instantes en los que es muestreada la salida no coincidan con los instantes en los que la entrada es ajustada. Así, la salida asociada con el i -ésimo intervalo de muestreo, es

$$y(t_i), \quad t_i \leq t_i' < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

$$y(t_i) = D(t_i)\Phi(t_i, t_i)x(t_i) + \int_{t_i}^{t_i'} \Phi(t_i, t)B(t)dt u(t) + D(t_i)u(t_i). \quad (12)$$

Reemplazando $x(t_i)$ por $x^*(i)$, $u(t_i)$ por $u^*(i)$, y $y(t_i)$ por $y^*(i)$, obtenemos

$$\begin{aligned}x^*(i+1) &= A_e(i)x^*(i) + E_e(i)u^*(i) \\y^*(i) &= C_e(i)x^*(i) + D_e(i)u^*(i)\end{aligned}\quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

donde

$$A_e(i) = \delta(t_{i+1}, t_i),$$

$$E_e(i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t_{i+1}, t) B(t) dt,$$

$$C_e(i) = C(t_i) \delta(t_i, t_i),$$

$$D_e(i) = C(t_i) \int_{t_i}^{t_i} \delta(t_i, t) B(t) dt + D(t_i) \quad (14)$$

El sistema discreto definido por (13) tiene un camino directo aunque el sistema continuo no lo tiene porque $D_e(i)$ puede ser diferente de cero aun si $D(t_i) = 0$. El camino directo está ausente, si $D(t) \equiv 0$ y los instantes t_i coinciden con los instantes t_i , es decir, $t_i = t_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Esta situación se ilustra en la figura 1.4

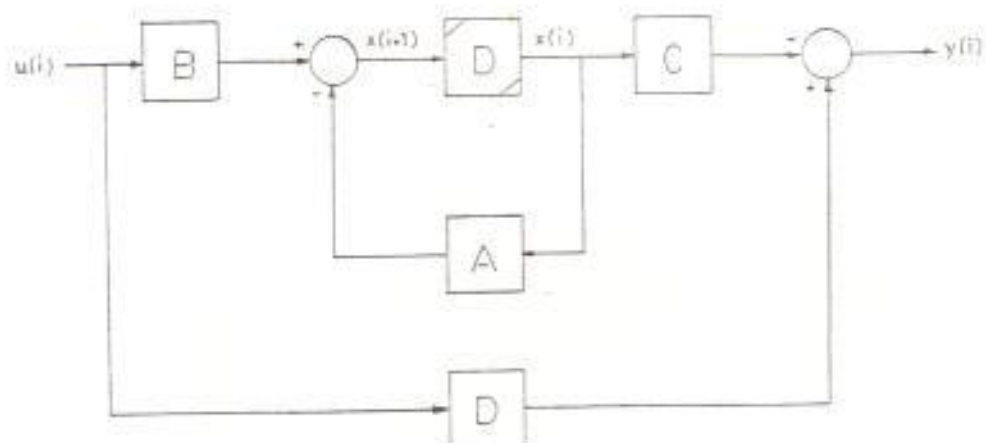


Figura 1.4 Diagrama de bloques de un sistema discreto

En el caso de instantes de muestreo igualmente espaciados

$$t_{i+1} - t_i = \Delta \quad (15)$$

$$t_i - t_{i-1} = \Delta \quad (16)$$

el sistema (7), (8), y (13) es invariante en el tiempo. Reemplazando (15) y (16) en (14) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
 A_s &= e^{A\Delta}, & E_s &= \left[\int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-t)} dt \right] B, \\
 C_s &= Ce^{A\Delta}, & D_s &= C \left[\int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-t)} dt \right] B + D,
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

donde Δ es el periodo de muestreo y $1/\Delta$ es la razón de muestreo.

1.4. Solución de ecuaciones de estado en diferencias.

Para obtener la solución de las ecuaciones de estado en diferencias, procedamos de la siguiente forma:

Consideramos la ecuación de estado en diferencias

$$x(i+1) = A(i)x(i) + B(i)u(i), \tag{18}$$

cuya solución puede ser expresada como

$$x(i) = \Phi(i, i_0)x(i_0) + \sum_{j=i_0}^{i-1} \Phi(i, j+1)B(j)u(j),$$

i ≥ i₀ + 1 (19)

donde $\Phi(i, i_0)$, $i \geq i_0$, es la matriz

$$\Phi(i, i_0) = \begin{cases} A(i-1)A(i-2) \dots A(i_0) & \text{para } i \geq i_0+1, \\ I & \text{para } i = i_0. \end{cases}$$

(20)

La matriz de transición $\bar{a}(i, i_0)$ es la solución de la ecuación en diferencias homogénea

$$\begin{aligned} \bar{a}(i+1, i_0) &= A(i)\bar{a}(i, i_0), & i \geq i_0 \\ \bar{a}(i_0, i_0) &= I. \end{aligned} \quad (21)$$

Si $A(i)$ no depende de i :

$$\bar{a}(i, i_0) = A^{i-i_0}, \quad (22)$$

la salida del sistema es:

$$y(i) = C(i)x(i). \quad (23)$$

Además, si el estado inicial es cero, es decir, $x(i_0) = 0$, en base a (19) se puede escribir:

$$y(i) = K(i, j)u(j), \quad i \geq i_0, \quad (24)$$

donde

$$K(i, j) = \begin{cases} C(i)\bar{a}(i, j+1)B(j) & \text{para } j \leq i-1, \\ 0 & \text{para } j = i. \end{cases}$$

(25)

es la matriz respuesta de pulso del sistema. Para sistemas invariantes en el tiempo K sólo depende de $i - j$. Si el sistema tiene un camino directo, la salida es dada por

$$y(i) = C(i)x(i) + D(i)u(i), \quad (26)$$

donde la salida es de la forma

$$y(i) = \sum_{j=0}^i K(i, j)u(j), \quad i \geq 1, \quad (27)$$

donde

$$K(i, j) = \begin{cases} C(i)\phi(i, j+1)B(j) & \text{para } j \leq i-1, \\ D(i) & \text{para } j = i. \end{cases} \quad (28)$$

Para sistemas lineales discretos e invariantes en el tiempo, resulta útil la diagonalización de la matriz A , por esto consideremos la ecuación de estado en diferencias:

$$x(i+1) = Ax(i), \quad (29)$$

si la matriz A tiene n valores característicos distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con los correspondientes vectores característicos e_1, e_2, \dots, e_n , entonces existe una matriz T $n \times n$, no singular, que transforma a la matriz A $n \times n$ en la matriz Δ $n \times n$, donde:

$$\begin{aligned} T &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \\ \Delta &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{aligned} \quad (30)$$

De donde la matriz transición de la ecuación de estado en diferencias (18) puede ser expresada como

$$\Phi(1, 1_0) = A^{1-1_0} = T\Delta^{1-1_0}T^{-1}, \quad (31)$$

suponiendo que la matriz inversa T^{-1} es representada como:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

donde f_1, f_2, \dots, f_n son vectores fila. De aquí que

la solución de la ecuación de estado en diferencias (29) puede ser expresada como

$$x(i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{i-1} e_{j,i} e_j, \quad (33)$$

donde $e_j = x(i_0)$.

La expresión (33) nos muestra que las propiedades del sistema pueden ser descritas como una composición de movimientos crecientes (para $|\lambda_j| > 1$), sostenidos (para $|\lambda_j| = 1$) o decrecientes (para $|\lambda_j| < 1$), a lo largo de los vectores característicos e_1, e_2, \dots, e_n de la matriz A .

1.5. Estabilidad de Sistemas Discretos.

Revisaremos los conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov: estabilidad asintótica en general y estabilidad-exponencial (tiende a su punto de equilibrio):

El sistema lineal homogéneo discreto e invariante en el tiempo descrito por

$$x(i+1) = Ax(i) \quad (34)$$

es estable en el sentido de Lyapunov si y sólo si:

- i) Todos los valores característicos de A tienen módulo menor o igual que 1.
- ii) Para algún valor característico con módulo igual a 1 y multiplicidad m hay m vectores característicos de la matriz A que le corresponden exactamente.

El sistema considerado en (34) es asintóticamente estable, y por ende exponencialmente estable, si y sólo si, todos los valores característicos de A tienen módulo estrictamente menor que 1.

1.6. Controlabilidad de Sistemas Lineales Discretos.

Estableceremos el concepto de controlabilidad de un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo con matrices A $n \times n$, B $n \times r$, C $m \times n$ y D $m \times r$. Definiendo controlable al estado $x(i)$ a $i = 1$, si existe una función $u(i)$ seccionalmente continua que conduce el sistema a cualquier estado final deseado $x(1)$ en un tiempo finito $(1, - 1_0) \geq 0$. Si para cualquier

estado inicial $x(i_0)$ el sistema es controlable en un intervalo de tiempo finito, entonces se dice que el sistema es completamente controlable.

O en forma alternativa, definiendo completamente controlable la salida si existe una función seccionalmente continua $u(i)$ que conduce la salida $y(i_0)$ a $i = i_1$ a cualquier salida final $y(i_1)$ para un intervalo finito $(i_1 - i_0) \geq 0$.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal de orden n , discreto e invariante en el tiempo, descrito por las ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i) \end{aligned} \quad (35)$$

sea completamente controlable es que la matriz de controlabilidad P $n \times n$ definida por:

$$P = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B), \quad (36)$$

tenga rango n .

Además, se desprende de esta definición que: un sis-

tema puede ser descompuesto en una parte controlable y en otra no controlable. El subespacio controlable de un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo es el subespacio lineal consistente de los estados que pueden ser alcanzados desde el estado cero dentro de un número finito de pasos.

El sistema (35) es estabilizable si su subespacio inestable está contenido en su subespacio controlable.

1.7. Observabilidad de Sistemas lineales discretos.

Estableceremos el concepto de observabilidad (reconstructibilidad) de las variables de estado, a través de mediciones en la salida, para un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo descrito por (35). Definiendo observable al estado $x(i_0)$, si existe un tiempo finito $(i_1 \geq i_0)$, tal que el conocimiento de $u(i)$ para $i_0 \leq i < i_1$ y $y(i)$ para $i_0 \leq i \leq i_1$ son suficientes para determinar $x(i_0)$. Si cada estado $x(i_0)$ es observable para un tiempo finito $(i_1 \geq i_0)$, entonces se dice que el sistema es completamente observable.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal de orden n , discreto e invariante en el tiempo; descrito por las ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned}x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i); \end{aligned} \quad (37)$$

sea completamente observable es que la matriz de observabilidad Q $m \times nm$, definida por:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

tenga rango n .

Si cada estado $x(i)$ es observable para un tiempo finito, se dice que el sistema es completamente observable, o también, que el par (A, C) es completamente observable. Al afirmar que el par (A, C) es completamente reconstruible (observable); se quiere decir que el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas (37) es completamente observable.

De la definición de controlabilidad y observabilidad, se desprende que

- i. Controlabilidad del par (A, B) implica observabilidad del par (A', B') .
- ii. Observabilidad del par (A, B) implica controlabilidad del par (A', B') .

Además, un sistema puede ser descompuesto en una parte observable y en otra no observable. Donde el subespacio no observable es el espacio nulo de la matriz Q .

1.8. Vectores estocásticos de tiempo discreto.

El vector de la secuencia infinita de vectores de variables estocásticas de la forma $v(i)$, $i = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, es caracterizado por todas las distribuciones de probabilidad conjuntas

$$P(v(1) \leq v_1, v(2) \leq v_2, \dots, v(i) \leq v_i)$$

(39)

para toda v_1, v_2, \dots, v_n real, para todo entero i_1, i_2, \dots, i_n y para todo entero m .

El proceso estocástico vectorial de tiempo discreto es estacionario si:

$$\begin{aligned} P(v(i_1) \leq v_1, v(i_2) \leq v_2, \dots, v(i_n) \leq v_n) \\ = P(v(i_1 + k) \leq v_1, v(i_2 + k) \leq v_2, \\ \dots, v(i_n + k) \leq v_n) \end{aligned} \quad (40)$$

para toda v_1, v_2, \dots, v_n real, para todo entero i_1, i_2, \dots, i_n y para todo entero m y k .

Si las distribuciones conjuntas (39) son distribuciones Gaussianas multidimensionales el proceso es Gaussiano. Luego, considerando al proceso vectorial estocástico de tiempo discreto $v(i)$, podemos definir a la media del proceso como

$$m = E\{v(i)\}, \quad (41)$$

a la matriz del momento de segundo orden de las distribuciones conjuntas como

$$C_v(i, j) = E\{v(i)v'(j)\}, \quad (42)$$

a la matriz de covarianza del proceso como

$$R_v(i, j) = E\{[v(i) - m][v(j) - m]'\} \quad (43)$$

y a la matriz de varianzas del proceso como

$$Q = E\{[v(i) - m][v(i) - m]'\} = R_v(i, i) \quad (44)$$

donde $C_v(i, j)$ es la matriz del momento de segundo orden del proceso.

Si el proceso v es estacionario, la matriz de media y de varianzas son independientes de i , y la matriz $C_v(i, j)$ del momento del conjunto de distribuciones y la matriz de covarianza $R_v(i, j)$ dependen solo de $i - j$.

Un proceso no estacionario de media constante, con matriz del momento de segundo orden finito para todo i ; con matrices del momento de segundo orden del conjunto de distribuciones y de covarianza dependientes solamente de $i - j$, es llamado estacionario en un

sentido amplio.

CAPITULO II

"RELACIONES ENTRE CONTROLABILIDAD, OBSERVABILIDAD Y RECONSTRUCCION DE ESTADO."

2.1. Revisión de conceptos relacionados con Controlabilidad, Observabilidad y Reconstrucción de estado.

Si la función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo tiene alguna "cancelación" de polos y ceros, el sistema será o no completamente controlable o no completamente observable, dependiendo de cómo se definan las variables de estado; y, por otro lado, si la función de transferencia no tiene factores comunes (no hay cancelación de polo = cero), siempre será posible encontrar una representación del sistema que sea completamente controlable u observable. Discutiremos la importancia de los conceptos de controlabilidad y observabilidad en la teoría de sistemas lineales porque nos permiten resolver el problema de regulación de lazo cerrado de sistemas li-

neales, discretos e invariantes en el tiempo. Luego precisaremos las relaciones que existen entre las entradas y salidas de los sistemas y las descripciones de estado de los sistemas.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad son importantes en el diseño de controladores lineales realimentados y de filtros lineales para sistemas lineales estacionarios en presencia de perturbaciones blancas Gaussianas.

Si el sistema es controlable, el sistema lineal realimentado, obtenido usando la teoría de control óptimo con índice de costo cuadrático, es asintóticamente estable (tiende asintóticamente a su punto de equilibrio o a uno escogido previamente). Y si además el sistema es observable, el filtro lineal obtenido usando la teoría de filtrado de Kalman es asintóticamente estable.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad también son importantes en la construcción de modelos matemáticos. Aun para resolver un problema de diseño analítico usando un modelo de variables de estado es frecuente partir de un modelo de entrada y salida.

Se busca una realización mínima del modelo de variables de estado que produzca la relación deseada de entrada y salida, es decir, una representación exacta que no introduzca fenómenos que no fueron tomados en cuenta, por lo menos implícitamente, en la descripción de la relación de entrada y salida. Esta búsqueda está relacionada a los conceptos de controlabilidad y observabilidad.

Cuando consideremos el problema del regulador para sistemas estacionarios lineales probaremos que es posible localizar los polos de lazo cerrado usando realimentación de estado si y sólo si el sistema es controlable. También mostraremos que es posible construir un reconstructor de estado, usando las mediciones de entrada y salida, con error dinámico arbitrario a condición de que el sistema sea observable. Combinando estos dos resultados se puede demostrar que un compensador realimentado puede ser diseñado tal que el sistema de lazo cerrado tenga polos previamente asignados, a condición de que el sistema sea controlable y observable.

La estructura del compensador realimentado resultante

es la misma que la obtenida por el Teorema de Separación de control óptimo estocástico en presencia de perturbaciones Gaussianas.

Finalmente, demostraremos la equivalencia de la estabilidad interna de Lyapunov y la estabilidad de entrada y salida para sistemas lineales uniformemente controlables y uniformemente observables.

2.1.1. Propiedades de los modelos de variables de estado.

Revisaremos conceptos básicos relacionados con controlabilidad, observabilidad, y estabilidad de Lyapunov. Las propiedades de controlabilidad y observabilidad de un sistema se refieren a la influencia de la entrada sobre el estado y del estado sobre la salida, respectivamente, mientras que la estabilidad de Lyapunov se refiere a la propiedad asintótica de sistemas no excitados.

El concepto de controlabilidad se refiere al paso de un estado inicial arbitrario a un estado deseado, el cual es a menudo el punto

de equilibrio y asumiremos que este es el caso tomando el elemento cero para representar el equilibrio.

Observabilidad se refiere a la posibilidad de reconstruir el estado a partir de mediciones en la salida; sin embargo hay dos problemas de reconstrucción de estado. El uno, se refiere a la deducción del estado presente de observaciones pasadas de la salida; y el otro, de observaciones futuras de la salida.

Para aplicaciones posteriores se utilizarán las propiedades de controlabilidad y observabilidad definidas de manera más consistente en secciones previas.

2.2. Problema de la regulación de lazo cerrado.

Trataremos un punto importante en la teoría matemática del control de sistemas: el diseño de una ley de realimentación de estado que regule la respuesta de lazo cerrado para un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo definido por las ecuaciones diná-

micas:

$$\begin{aligned}x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\y(i) &= Cx(i).\end{aligned}\quad (1)$$

Los problemas de regulación y reconstrucción de estado serán aplicados a la misma clase de sistemas dinámicos lineales y estacionarios.

Consideremos primero la regulación con estado realimentado y asumamos que la realimentación $-kx(i)$ está siendo aplicada al sistema. La respuesta de lazo cerrado es luego gobernada por la ecuación dinámica:

$$\begin{aligned}x(i+1) &= (A - BK)x(i) + Bu(i), \\y(i) &= Cx(i).\end{aligned}\quad (2)$$

Una característica de la respuesta de este sistema de lazo cerrado es dada por la localización de sus polos, es decir, por los ceros del $\det(Iz - A + BK)$.

Las condiciones bajo las cuales es posible asignar arbitrariamente los polos de sistemas dinámicos escogiendo la ganancia k de la matriz de realimentación, con coeficientes reales en el caso de una entrada,

para las matrices dadas A y B , son que exista al menos una matriz K ($m \times n$), figura 2.1, tal que el $\det(zI - A + BK) = r(z)$, donde $r(z)$ es un polinomio de la forma

$$r(z) = z^n + r_{n-1}z^{n-1} + \dots + r_0.$$

(3)

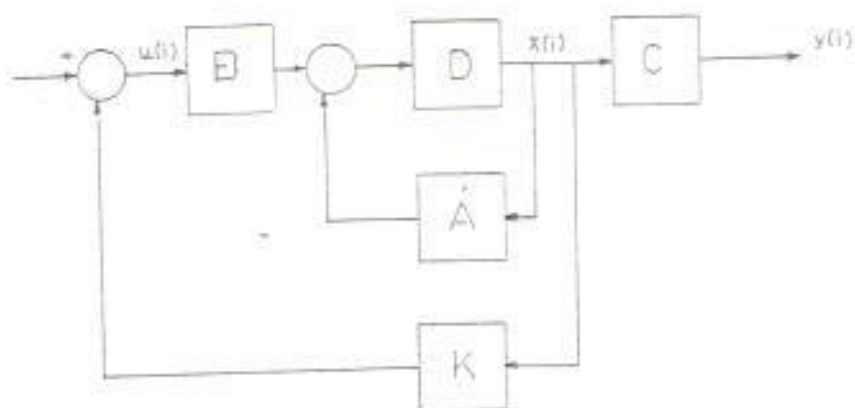


Figura 2.1 Regulador de estado realimentado

Estas condiciones son equivalentes a controlabilidad.

Para el caso de tener varias entradas los coeficientes del polinomio arbitrario $r(z)$ son reales o complejos, y hay una matriz k posiblemente compleja tal

que el $\det(Iz - A + BK) = r(z)$ si y sólo si el sistema es controlable. Si los coeficientes del polinomio $r(z)$ son reales la matriz K puede ser escogida real.

En resumen, existe una matriz real K $m \times n$ tal que el $\det(Iz - A - BK) = z^n + r_{n-1}z^{n-1} + \dots + r_0$ para coeficientes reales arbitrarios $[r_0, r_1, \dots, r_{n-1}]$ si y sólo si el sistema (1) es controlable, es decir, si la matriz $(nm \times n)$ $[B; AB; \dots; A^{n-1}B]$ es de rango n .

Para el caso de que B sea un vector columna b $(n \times 1)$, siendo A una matriz $n \times n$, si el sistema es controlable, existe una matriz P^{-1} $(1 \times n)$ tal que el polinomio característico de $A - bk$ es un polinomio arbitrario previamente asignado de grado n .

Si el sistema es controlable, la matriz de controlabilidad $P = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ tiene rango n , y así las n columnas de P generan R^n .

Poniendo el sistema en la forma estándar el asignamiento de polos es sencillo: combinando ambos pasos tenemos

$$\begin{aligned}
 p(z) &= z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \dots + p_0 \\
 &= \det(iz - A)
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 r(z) &= z^n + r_{n-1}z^{n-1} + \dots + r_0 \\
 &= \det(iz - A + bk')
 \end{aligned} \tag{5}$$

que son los polinomios característicos de lazo abierto y lazo cerrado, respectivamente. Siendo la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{n-1} & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ p_1 & & & 1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{n-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

el vector k es dado por

$$k = \begin{bmatrix} b' \\ b'A' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b'(A')^{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} p-1 \\ p-1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \begin{bmatrix} r_{n-1} - p_{n-1} \\ r_{n-2} - p_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ r_0 - p_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Para la colocación de polos se ha establecido que el polinomio característico de la matriz del sistema de lazo cerrado puede ser escogido por el uso de realimentación de estado.

2.3. Naturaleza del problema de estimación de estado.

Antes de que un sistema pueda ser analizado, debe ser obtenida una representación o modelo del sistema, tal que caracterice adecuadamente las propiedades del sistema, pero debería ser lo suficientemente simple para que el análisis resultante sea tratable.

La solución al problema de diseño del regulador óptimo con variables de estado realimentadas, depende de la disponibilidad de todos los estados del sistema lineal, ya sea por directa medición o por algún tipo de esquema de reconstrucción de estados. Para ello consideremos un sistema completamente observable, donde el vector de estado puede ser construido a partir de una combinación de observaciones de la salida y entrada del sistema. Consideremos por simplicidad un sistema de una entrada y una salida:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \quad (8)$$

$$y(i) = Cx(i) + Du(i). \quad (9)$$

Diferenciando (9) y sustituyendo en $x(i+1)$ de (8), se obtiene un juego de ecuaciones de la forma $z(i) = Dx(i)$, dada por:

$$z(i) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(i) \quad (10)$$

El par (A, C) es completamente observable si y sólo si la matriz de observabilidad D tiene rango n . En el caso de salida escalar, la matriz D es cuadrada; y entonces tiene rango n si y sólo si es no singular.

Que el par (A, C) sea completamente observable implica que las entradas del vector de estado $x(i)$ son recuperables como una combinación de las observaciones de las salidas y entradas del sistema.

En la práctica la presencia de ruido en $u(i)$ e $y(i)$

conducirá a grandes errores en la computación de $x(i)$, debido a la diferenciación de $u(i)$ e $y(i)$.

Son necesarias dos propiedades para la estimación de estado:

i. Debería ser de la forma de la figura 2.2, y que



Figura 2.2 Estructura de un estimador

permita la ley óptima de control $u = Kx$, acorde con el esquema de la figura 2.3.

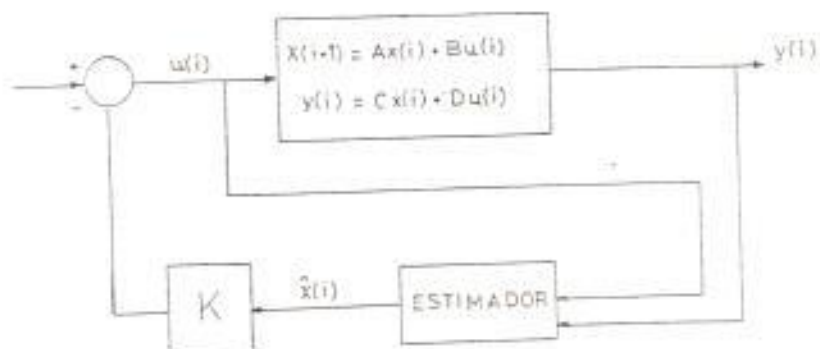


Figura 2.3 Sistema con estimador

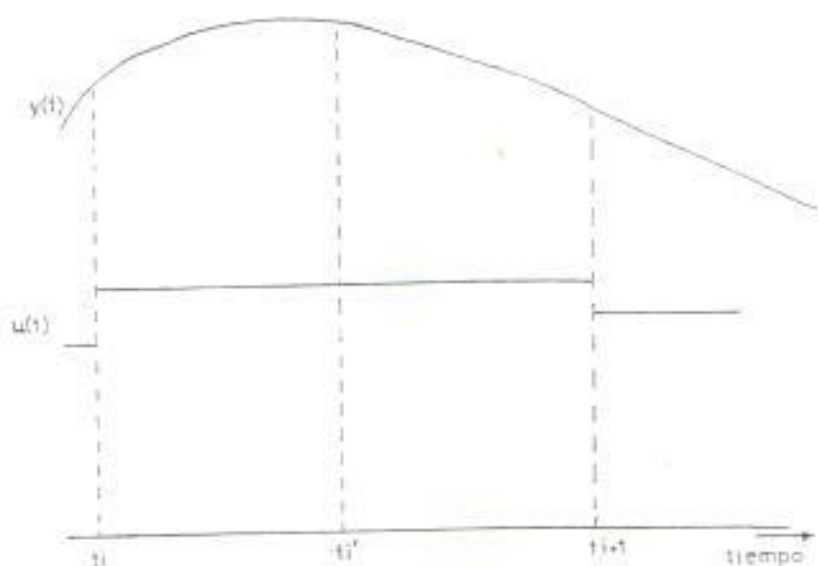


Figura 2.4 Relación entre el instante de actuación t_i y el instante de observación t_i' .

Los instantes en que la entrada cambia de valor son dados por t_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ (instantes de control); los instantes de observación t_i' , $i = 0, 1, 2, \dots$, son los instantes en los cuales es muestreada la variable observada $y(t)$ del sistema continuo. Se asume que el instante de observación t_i' precede siempre al instante de control t_{i+1} .

El retardo de procesamiento $t_{i+1} - t_i$ es el tiempo

- ii. Debería funcionar en presencia de ruido con una acción óptima del estimador en un ambiente ruidoso, tal que el ruido tenga el menor efecto posible cuando el estimador es usado en conexión con el control del sistema.

Si el sistema y el observador son de igual dimensión y son lineales, y si el sistema es invariante en el tiempo y el ruido asociado es estacionario, el estimador es invariante en el tiempo.

Además, el diseño del observador es independiente de la ley de realimentación óptima asociada K que es a su vez independiente de la presencia de ruido.

2.4. Diseño matemático del Reconstructor de estados.

EL sistema lineal discreto en el tiempo es obtenido de un sistema lineal continuo en el tiempo con entrada seccionalmente continua como se indica en la figura 2.4.

para procesar la observación $y(t_i)$ con el fin de determinar la entrada $u(t_{i+1})$.

Si el sistema continuo en el tiempo es descrito por:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w_1(t),$$

$$t > t_0, \quad (11)$$

donde w_1 es ruido blanco con intensidad variable en el tiempo $V_1(t)$. Asumiendo que la variable observada es:

$$y(t_i) = C(t_i)x(t_i) + w_2(t_i),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

donde $w_2(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, forma una secuencia de vectores estocásticos no correlacionados. Para obtener la descripción discreta en el tiempo del sistema se escribe

$$x(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i)x(t_i) + \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, t)B(t)dt \right]u(t_i) +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, t)w_1(t)dt, \quad (13)$$

$$y(t_i) = C(t_i)\Phi(t_i, t_0)x(t_0) +$$

$$\begin{aligned} & [C(t_i) \int_{t_i}^{t_i^*} \phi(t_i, t) B(t) dt] u(t_i) + \\ & C(t_i) \int_{t_i}^{t_i^*} \phi(t_i, t) w_s(t) dt + w_s(t_i) \end{aligned} \quad (14)$$

en ambos casos $i = 0, 1, 2, \dots$, y donde $\phi(t, t_0)$ es la matriz transición del sistema (11); las dos últimas ecuaciones son de la forma:

$$\begin{aligned} x^*(i+1) &= A_s(i)x^*(i) + B_s(i)u^*(i) + w_s^*(i), \\ y^*(i) &= C_s(i)x^*(i) + E_s(i)u^*(i) + w_s^*(i). \end{aligned} \quad (15)$$

Este método tiene las siguientes características:

- i. Se asume que $y^*(i)$ es la última observación que puede ser procesada para obtener un valor reconstruido para $x^*(i+1)$.
- ii. La ecuación de salida contiene generalmente un camino directo. Como en (13), el camino directo está ausente, $E_d(i) = 0$ cuando el retardo de procesamiento toma todo el intervalo (t_i, t_{i+1}) .

iii. Aún si en el problema continuo en el tiempo el ruido de excitación de estado w_1 y el ruido de la observación w_2 no son correlacionados, el ruido de excitación de estado w'_1 y el ruido de la observación w'_2 de la versión discreta en el tiempo del problema serán correlacionados, debido a que $w'_1(i)$ y $w'_2(i)$ dependen de $w_1(t)$ para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$; pero no serán correlacionados sólo si $t_i = t_{i+1}$, que es cuando el retardo del proceso toma todo el intervalo (t_i, t_{i+1}) .

2.5. Diseño del compensador de salida realimentada que regule la respuesta de lazo cerrado; colocación de polos.

Consideremos primero el diseño de un reconstructor de estado: un sistema que deduce el estado actual de observaciones pasadas de la salida. Luego, consideraremos el compensador de salida realimentada: regulador de la respuesta de lazo cerrado.

Se desea obtener un sistema dinámico cuyo estado será un estimado del estado a ser reconstruido en base a la entrada y salida del sistema dinámico para el cual

estamos diseñando el reconstructor de estado. Para el cual escribimos:

$$\hat{x}(i+1) = F\hat{x}(i) + Lu(i) + Hy(i) \quad (16)$$

donde u , e y y son la entrada y la salida del sistema lineal, dinámico y de dimensión finita (1); donde $\hat{x}(i)$ es el estado estimado.

Para que el sistema dinámico original sea compatible con el reconstructor de estado se escoge $L = B$ y $F = A - HC$ tal que el estimador dinámico sea:

$$\begin{aligned} \hat{x}(i+1) &= A\hat{x}(i) + Bu(i) - H(\hat{y} - y) \\ \hat{y}(i) &= C\hat{x}(i). \end{aligned} \quad (17)$$

El estimador es excitado por el error del estimado de la salida y la salida observada a través de la ganancia de realimentación H . El error $e(i) = \hat{x}(i) - x(i)$ es gobernado por la ecuación diferencial:

$$e(i+1) = (A - HC)e(i) \quad (18)$$

Un criterio para determinar la calidad del reconstructor de estado son los valores característicos de

la matriz que gobierna la ecuación del error, los ceros del $\det(Iz - A + HC)$.

Las condiciones para A y C , que hacen arbitrarios los ceros del $\det(Iz - A + HC)$ por medio de una adecuada selección de H , son el dual de la colocación de polos

Así tenemos que hay una matriz H ($n \times p$) tal que el error dinámico de reconstrucción de estado es gobernado por $e(i+1) = (A - HC)e(i)$ donde $e = \hat{x} - x$ con $\det(Iz - A + HC) = z^n + r_{n-1}z^{n-1} + \dots + r_0$ para coeficientes reales $[r_0, r_1, \dots, r_{n-1}]$, si y sólo si el sistema (1) es reconstruible (observable); es decir, si la matriz Q' ($np \times n$) = $[C' \mid A C' \mid \dots \mid (A')^{n-1} C']$ es de rango n .

En la reconstrucción del estado a partir de la medición de salida $y(i)$ omitimos el hecho que conocemos $y(i) = Cx(i)$ exactamente; por lo que es mejor escoger $x(i)$ tal que $y(i) = Cx(i)$. Es decir, en lugar de estimar a todo el vector de estado $x(i)$, es suficiente estimar los componentes de $x(i)$ que satisfagan dicha relación. Este problema ha sido estudiado por Luenberger quien mostró que existe un reconstructor de estado, algunas veces llamado observador, de orden $(n$

- p) cuyo estado en combinación con la salida observada resulta en un vector de error que tiene p componentes idénticamente iguales a cero y cuyos componentes restantes $(n - p)$ son gobernados por un sistema dinámico estacionario lineal de orden $(n - p)$ con valores característicos, previamente asignados, de su matriz del sistema.

El diseño del regulador a través de la colocación de polos se basa en el conocimiento de todos los estados. Pero a menudo resulta dificultoso e ineficiente medir el vector de estado completo, y sólo se tiene acceso a la salida por mediciones.

Se pueden usar las ideas que hemos establecido para diseñar un compensador que tenga como entrada la salida del sistema a ser controlado.

Se separa el problema de reconstrucción y el de regulación realimentada diseñando primero un reconstructor de estado y luego usando el valor estimado del estado en el controlador realimentado. Esto es un preludio al teorema de separación para el control estocástico óptimo. Una primera aproximación razonable para el diseño de un controlador de salida realimen-

tada se expresa así:

$$\begin{aligned}
 x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) \\
 y(i) &= Cx(i) \\
 x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) - H(y(i) - \hat{y}(i)) \\
 y(i) &= Cx(i) \\
 u(i) &= -Kx(i).
 \end{aligned} \tag{19}$$

El sistema dinámico de lazo cerrado (19) puede ser escrito en términos de $x(i)$ y $e(i) = \hat{x}(i) - x(i)$:

$$\begin{aligned}
 x(i+1) &= (A - Bk)x(i) - Bke(i) \\
 e(i+1) &= (A - HC)e(i)
 \end{aligned} \tag{20}$$

Donde los polos del sistema de lazo cerrado son los ceros del $\det(zI - A + BK) = \det(zI - A + HC)$ y pueden ser colocados escogiendo K y H , si y sólo si el sistema (1) es controlable y reconstruible (observable); es decir, si las matrices P ($nm \times n$) = $[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$ y Q ($np \times n$) = $[C \mid A^1C \mid \dots \mid (A^{n-1})^1C]$ tienen rango n .

Se puede reemplazar el reconstructor de estado en este compensador por un observador Luenberger, especializando el caso de realimentación de estado.

Un reconstructor de estado y un regulador de salida realimentada son mostrados en la figura 2.5 donde la estructura del compensador realimentado es la misma que la obtenida por el teorema de separación del control estocástico y diseñando el compensador para sistemas lineales con perturbaciones Gaussianas sobre la base de la teoría de control óptimo determinístico con índice de costo cuadrático y teoría de filtrado de Kalman.

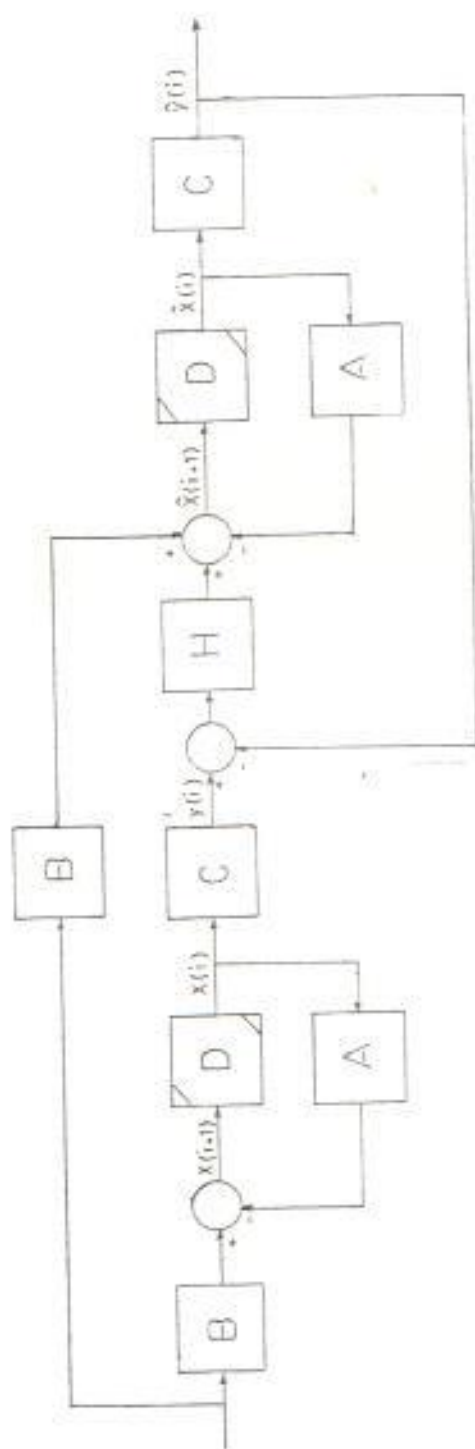


Figura 2.5a Diagrama de bloques del reconstructor de estados

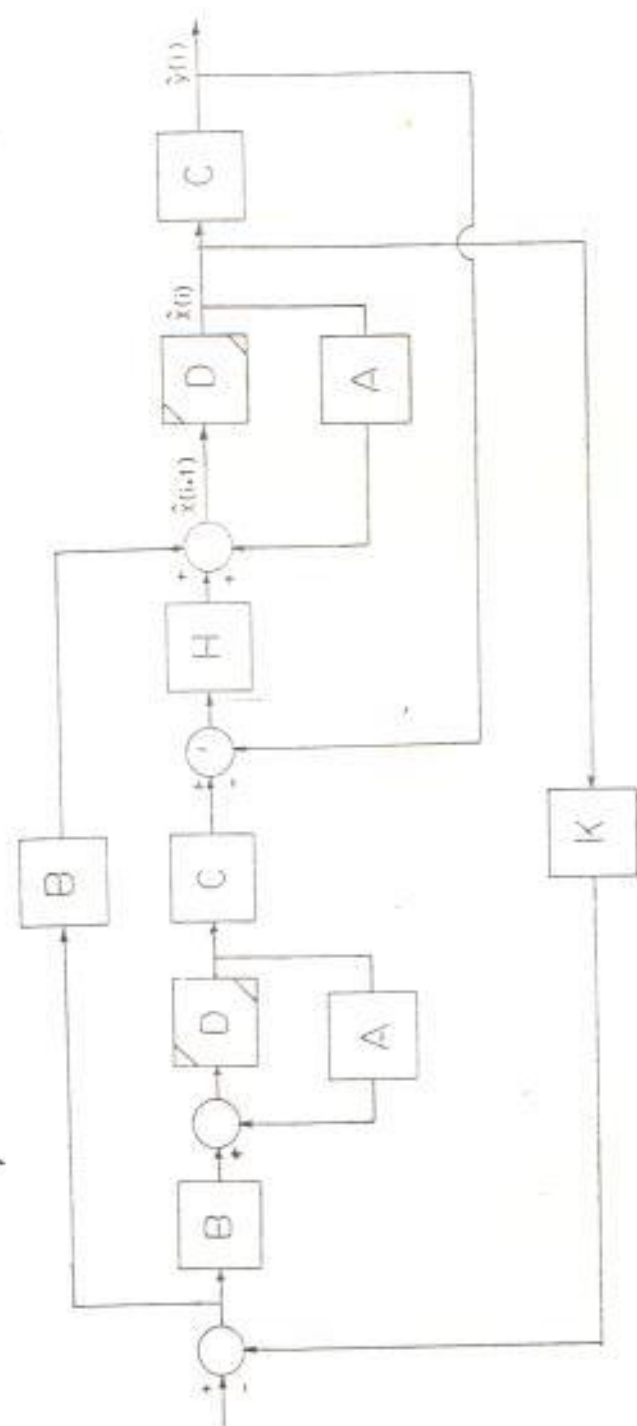


Figura 2.5b - Regulador de salida realimentada.

CAPITULO III

"OBSERVADORES TIPO FILTRO KALMAN"

3.1. Introducción al Filtrado de Kalman.

Dentro de la teoría de filtrado, se hará una consideración cuantitativa del ruido asociado con mediciones en un sistema cuando se diseña un observador (estimador) estadístico, es decir, que depende de datos probabilísticos concernientes al ruido. Se tratará de optimizar el filtro, minimizando el error en la salida en presencia de ruido. Para lograrlo se mantendrán las siguientes consideraciones:

- i. Se omitirán excesivas comprobaciones, discernimientos o reparos, con el interés de confinar la discusión en una razonable longitud y claridad.
- ii. La discusión también omitirá algunos detalles de rigor matemático. Las operaciones de sumatoria se

desarrollarán con sumandos que involucran variables aleatorias, y las operaciones, aunque válidas para variables determinísticas, necesitan ser probadas para ser válidas con variables aleatorias, pero se omitirán tales comprobaciones; y además, se intercambiarán sumatorios y expectativas sin verificar que los intercambios son permitidos.

Se describirá el sistema considerado, el ruido estadístico asociado y el problema específico de la observación.

Luego, por la introducción de nuevas variables, se convertirá el problema de filtrado en un problema determinístico del regulador óptimo (estimador), como el de la figura 3.1, donde el sistema es de la forma

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\ y(i) &= Cx(i), \end{aligned} \quad (1)$$

con términos adicionales que representan el ruido, y que serán indicados después.

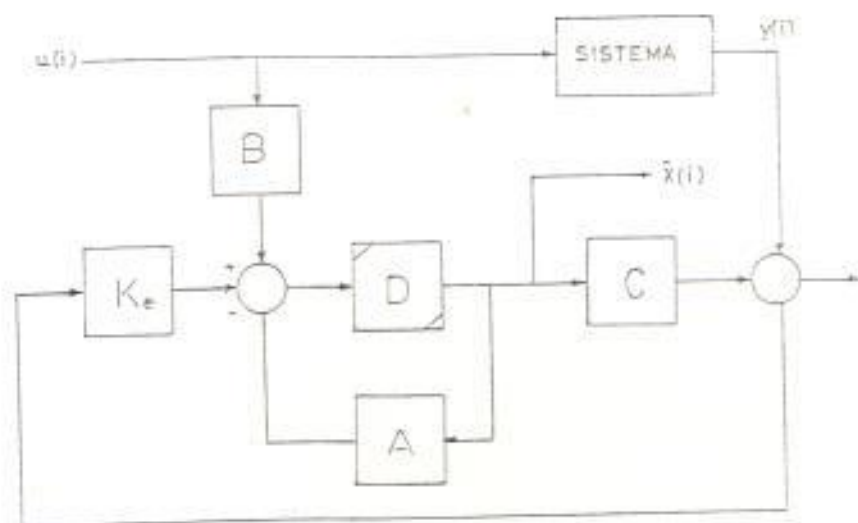


Figura 3.1 Diagrama de bloques de un estimador óptimo.

3.1.1. Descripción de sistemas y ruido estadístico.

El sistema ha ser considerado es de la forme

$$\begin{aligned}x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) + v(i) \\y(i) &= Cx(i) + w(i)\end{aligned}\quad (2)$$

Los terminos del ruido son $v(i)$ y $w(i)$, el caso invariante en el tiempo se aplica para intervalos de tiempo relativamente grandes.

El modelo de la ecuaciones (2) asume solo ruido aditivo y solamente en dos puntos. Al-
gun ruido entrando con $u(i)$ es equivalente a
algún otro ruido entrando al mismo punto co-
mo $v(i)$, como se aprecia en la figura 3.2.

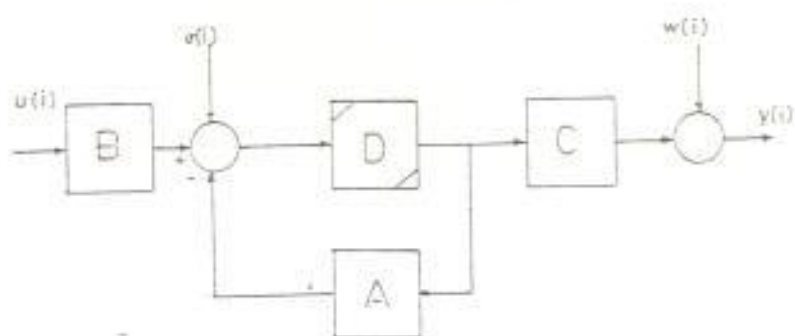


Figura 3.2 Diagrama de bloques de un sistema con ruido aditivo

- En el caso de $v(i)$ y $w(i)$, es asumido ruido blanco, gaussiano, y de media cero. La primera propiedad implica que no es correlacionado de instante a instante; si fuera también estacionario, tendría un espectro de potencia constante. La segunda propiedad im-

plica que toda la información probabilística acerca del ruido es resumida en la covarianza del ruido

$$E\{v(i)v'(j)\} = Q\delta_{ij}, \quad E\{v(i)\} \equiv 0 \quad (3)$$

$$E\{w(i)w'(j)\} = R\delta_{ij}, \quad E\{w(i)\} \equiv 0 \quad (4)$$

$$E\{v(i)w'(j)\} = 0 \quad \forall i, j \quad (5)$$

Para la estimación de procesos usando el filtro de Kalman, buscamos un estimado $\hat{x}(i)$, como una función lineal de observaciones

$$z(i) = y(i) + v(i) \quad 1 \leq i \leq i_f \quad (6)$$

que consisten de una señal $y(i)$, observada en presencia de ruido blanco $v(i)$, donde el vector $v(i)$ es un proceso independiente con matriz de covarianza

$$E\{v(i)v'(i)\} = V(i)\delta_{ij}$$

el diagrama de bloques del modelo del mensaje es mostrado en la figura 3.3.

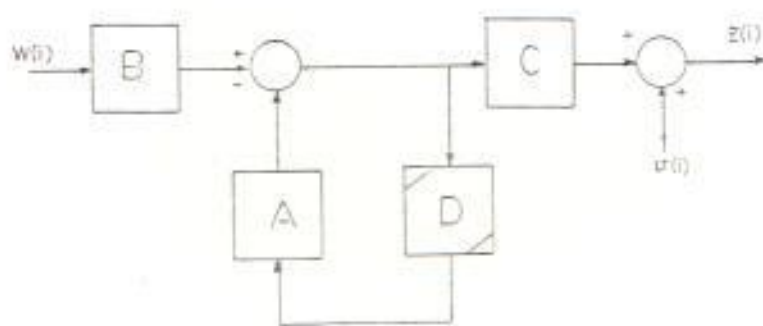


Figura 3.3 Modelo del mensaje

Si convertimos las observaciones $z(i)$ en un proceso independiente $v(i)$, donde los procesos $z(i)$, $y(i)$ y $v(i)$ son vectores $m \times 1$ y $v(i)$ tiene covarianza $m \times n$, tal que el estimado $\hat{g}(i)$ puede ser escrito como

$$g(i) = \sum_{j=1}^n H(i,j) v(j). \quad (7)$$

De acuerdo a la descomposición de Wold, $z(i)$

puede ser descompuesto en dos componentes: una que puede ser determinada a partir de valores previos de $z(i)$ y otra, un proceso blanco $\hat{v}(i)$ (innovatorio conteniendo la nueva información de $z(i)$).

Finalmente se asume que el estado inicial $x(i_0)$ del sistema (1) es una variable aleatoria gaussiana, de media m y covarianza Q_0 , conocidas.

$$E\{[x(i_0) - m][x(i_0) - m]^T\} = Q_0 \quad E\{x(i_0)\} = m \quad (8)$$

Siendo $x(i_0)$ independiente de $v(i)$ y de $w(i)$

$$E\{x(i_0)v^T(i)\} = E\{x(i_0)w^T(i)\} = 0 \quad \text{para todo } i \quad (9)$$

- Si $x(i_0)$ es conocido: $Q_0 = 0$ y $x(i_0) = m$, en lugar de solamente $E\{x(i_0)\} = m$.

Los pesos de $H(i, j)$ son, a partir del principio de ortogonalidad

$$E\{g(i)\hat{v}^*(i)\} = \sum_{j=i}^L H(i, j) E\{\hat{v}(j)\hat{v}^*(i)\} \\ i_0 \leq i \leq i_1 \quad (10)$$

Siendo $\hat{v}(i)$ ruido blanco, la covarianza es:

$$E\{\hat{v}(i)\hat{v}^*(i)\} = V\delta_{ii} \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (10) y resolviendo para H , se obtiene

$$H(i, i) = E\{g(i)\hat{v}^*(i)\}V^{-1} \quad (12)$$

Y

$$\hat{B}(i) = \sum_{j=i}^L E\{g(i)\hat{v}^*(j)\}V^{-1}\hat{v}(j) \quad (13)$$

Ahora hay que encontrar la transformada que conduzca a las innovaciones $\hat{v}(i)$ y sus covarianzas. Se debe obtener la solución de (13) e implementarla. El estimado que será obtenido en lugar de términos analíticos debe satisfacer la ecuación en diferencias.

A menudo se describe perturbaciones y otros fenómenos variando estocásticamente como las

salidas de sistemas lineales discretos en el tiempo de la forma

$$\begin{aligned}x(i+1) &= Ax(i) + Bw(i), \\y(i) &= Cx(i).\end{aligned}\tag{14}$$

La variable de estado es $x(i)$, la variable de salida es $y(i)$, y la secuencia de vectores estocásticos no correlacionados mutuamente $w(i)$ (ruido blanco), $i = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$; de media cero y matriz de varianzas

$$E(w(i)w'(i)) = V\tag{15}$$

Si todos los valores característicos de A en (14) tienen módulo estrictamente menor que uno, e $i \rightarrow -\infty$, la matriz de covarianza del sistema tiende asintóticamente a \bar{R}_{ij} que solamente depende de $i - j$; la matriz de varianzas \bar{Q} asintótica es la única solución de la ecuación matricial

$$\bar{Q} = A\bar{Q}A' + BVB'\tag{16}$$

Si A y R son constantes, donde R es una se-

cuencia de matrices simétricas no negativas a igual que $P(i)$, y nuevamente los valores característicos de A tienen módulo estrictamente menor que uno, $P(i)$ se aproxima a un valor constante \bar{P} conforme $i \rightarrow \infty$, donde \bar{P} es la única solución de la ecuación matricial

$$\bar{P} = A' \bar{P} A + R \quad (17)$$

3.2. Problema del filtro lineal óptimo y discreto.

Asumiremos que la señal $y(i)$ es la salida de un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo, excitado por ruido blanco, descrito por

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bw(i) \\ y(i) &= Dx(i), \end{aligned} \quad (18)$$

donde la entrada $w(i)$ es el ruido blanco, de media cero, con covarianza

$$\text{Cov}(w(i)) = E\{w(i)w'(j)\} = V_w(i)\delta_{ij}. \quad (19)$$

La ecuación de observación es

$$z(i) = y(i) + v(i) \quad 1 \leq i \leq i_0 \quad (20)$$

donde $v(i)$ es la intensidad del ruido blanco con media cero, y matriz de covarianza

$$\text{Cov}(v(i)) = E(v(i)v'(j)) = V_v(i)\delta_{ij} \quad (21)$$

que no está correlacionada con $w(i)$.

También, asumiremos que $x(i_0)$ es una variable aleatoria, de media conocida y covarianza no correlacionada con $w(i)$ y $v(i)$, para todo i , $i = 1, 2, \dots$.

Si $z(j)$ es el conjunto de observaciones $(z(i_0), z(i_1), \dots, z(j))$, entonces el estimado de la variable aleatoria $x(i)$ es:

$$\hat{x}(i) \triangleq \hat{x}(i/i_0) = E(x(i)/z(i_0)) \quad (22)$$

y el estimado de la señal de salida $y(i)$ es:

$$\hat{y}(i) \triangleq \hat{y}(i/i_0) = E(y(i)/z(i_0)) = CE(x(i)/z(i_0))$$

$$\hat{y}(i) = C\hat{x}(i/i_0) \quad (23)$$

Si usamos (13), obtenemos el estimado de la variable $x(i)$ en términos de la secuencia de innovación $\hat{v}(j)$:

$$\hat{x}(i/i) = \sum_{k=1}^i \frac{1}{k!} E\{x(i)\hat{v}^T(j)\} \hat{v}(j) \hat{v}^T(j) \hat{v}(j) \quad (24)$$

Si $i = 1$, se tiene un problema de filtrado, y si $i > 1$, se tiene un problema de predicción.

De la teoría del filtro de Wiener para ruido blanco, obtenemos:

$$H(z) = 1 - \frac{\sqrt{N_0/2}}{S^*(z)} \quad (25)$$

donde H representa la función de transferencia del sistema en términos de la variable z . Si asumimos $N_0/2 = 1$ por simplicidad, obtenemos:

$$y(z) = H(z)z(z) - \frac{z(z)}{S^*(z)} \quad (26)$$

donde el segundo término, de (26), corresponde a una observación con ruido blanco. Para nuestro caso discreto, la secuencia de innovación es:

$$J(i) = z(i) - \hat{y}(i/i-1) = z(i) - (y(i) - \tilde{y}(i/i-1))$$

$$J(i) = v(i) + \tilde{y}(i/i-1) \quad (27)$$

donde $\tilde{y}(i/i-1)$ es el error de la estimación.

Ahora mostraremos que $J(i)$ es una secuencia de ruido blanco de media cero:

Si $i > 1$, obtenemos que

$$E\{J(i)J^*(i)\} = E\{[\tilde{y}(i/i-1) + v(i)]J^*(i)\},$$

debido a que el error $\tilde{y}(i/i-1)$ es ortogonal a $J(i)$ para $i \leq i-1$:

$$E\{J(i)J^*(i)\} = E\{v(i)J^*(i)\}, \quad (28)$$

debido a que $v(i)$ es una secuencia de ruido blanco con media cero e $i > 1$.

$$E\{J(i)J^*(i)\} = E\{v(i)[\tilde{y}(i/i-1) + v(i)]^*\} = 0 \quad (29)$$

Para $i < 1$ se obtiene un resultado parecido al obtenido para $i > 1$.

Para $i = 1$, obtenemos:

$$E(\hat{y}(i)\hat{y}^T(i)) = E([\tilde{y}(i/i-1) + v(i)][\hat{y}(i/i-1) + v(i)]^T)$$

$$E(\hat{y}(i)\hat{y}^T(i)) = V_{\tilde{y}(i/i-1)} + V_v(i) \quad (30)$$

y

$$V_{\tilde{y}(i/i-1)} = CV_{\tilde{x}(i/i-1)}C^T \quad (31)$$

debido a que se tiene que

$$\tilde{y}(i/i-1) = C\tilde{x}(i/i-1)$$

O sea que $\hat{y}(i)$ es una secuencia de ruido blanco con media cero y covarianza de Kernel:

$$V_{\hat{y}(i)} = CV_{\tilde{x}(i/i-1)}C^T + V_v(i) \quad (32)$$

3.3. Predicción de una etapa del Filtro de Kalman.

Estableceremos un algoritmo secuencial para obtener

el estimado $\hat{x}(i+1/i)$ basado en el estimado $\hat{x}(i/i-1)$ y la nueva observación $z(i)$. Primero escribamos:

$$\hat{x}(i/i-1) = \sum_{j=0}^{i-1} E\{G(i) \hat{v}^*(j)\} V^{-1}(j) \hat{v}(j) \quad (33)$$

y

$$\hat{x}(i+1/i) = \sum_{j=0}^i E\{H(i+1) \hat{v}^*(j)\} V^{-1}(j) \hat{v}(j)$$

$$\hat{x}(i+1/i) = \sum_{j=0}^i E\{[AH(i) + Bw(i)] \hat{v}^*(j)\} V^{-1}(j) \hat{v}(j)$$

$$\hat{x}(i+1/i) = A \sum_{j=0}^i E\{G(i) \hat{v}^*(j)\} V^{-1}(j) \hat{v}(j)$$

$$\hat{x}(i+1/i) = AE\{\hat{x}(i) \hat{v}^*(i)\} V^{-1}(i) \hat{v}(i) + A\hat{x}(i/i-1) \quad (34)$$

La ganancia de Kalman se define como:

$$K(i+1, i) \triangleq AE\{G(i) \hat{v}^*(i)\} V^{-1}(i) \quad (35)$$

luego

$$\hat{x}(i+1/i) = A\hat{x}(i/i-1) + K(i+1, i) \hat{v}(i) \quad (36)$$

o

$$\hat{x}(i+1/i) = A\hat{x}(i/i-1) + K(i+1, i)[z(i) - C\hat{x}(i/i-1)],$$

ver. figura 3.4.

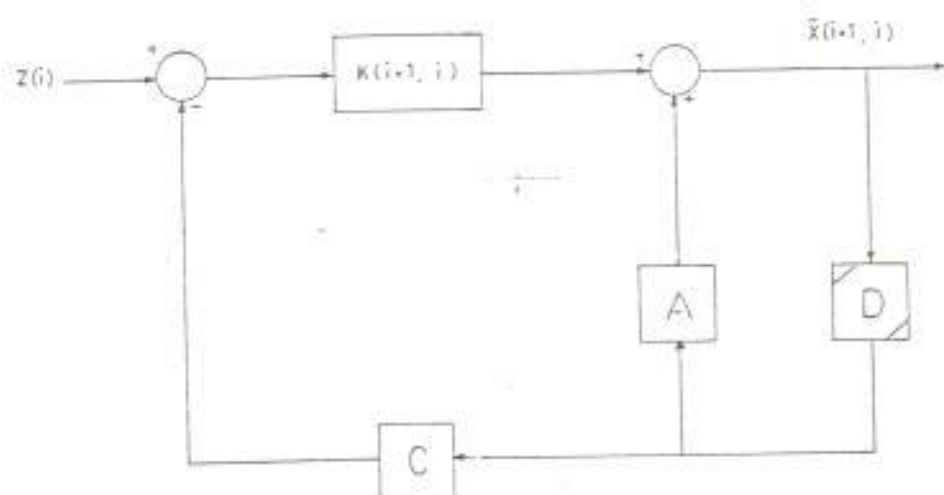


Figura 3.4 Predictor de una etapa

De (35), obtenemos:

$$K(i+1, i) = AE\{\hat{x}(i)[C\hat{x}(i/i-1) + v(i)]^T\}V\hat{v}(i). \quad (38)$$

Además, debido a que $x(i)$ y $v(i)$ no son correlacionados, tenemos que:

$$K(i+1, i) = AE\{x(i)\hat{x}(i/i-1)^T\}C^T V\hat{v}(i) \quad (39)$$

También,

$$x(i) = \hat{x}(i/i-1) + \tilde{x}(i/i-1) \quad (40)$$

debido a que $\tilde{x}(i/i-1)$ es ortogonal a $\hat{v}(j)$ para $j \leq i-1$ y $\hat{x}(i/i-1)$ es una combinación lineal de $\hat{v}(j)$ para $j \leq i-1$, se tiene que $\tilde{x}(i/i-1)$ es ortogonal a $\hat{x}(i/i-1)$.

Reescribiendo (39), obtenemos:

$$K(i+1, i) = AV\tilde{x}(i/i-1)C^T V\hat{v}(i) \quad (41)$$

Restando (37) de (18), obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(i+1/i) &= A\tilde{x}(i/i-1) + Bw(i) - \\ &- K(i+1, i)[D\tilde{x}(i/i-1) + v(i)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(i+1/i) &= [A - K(i+1, i)C]\tilde{x}(i/i-1) + \\ &+ Bw(i) - K(i+1, i)v(i) \end{aligned}$$

(42)

Debido a que $w(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son ruido blanco y no son correlacionados:

$$\begin{aligned} V_{\tilde{x}}(i+1/i) &= [A - K(i+1, i)C]V_{\tilde{x}}(i/i-1)[A - \\ &- K(i+1, i)C]^T + B V_w(i) B^T + \\ &+ K(i+1, i) V_v(i) K^T(i+1, i) \end{aligned}$$

(43)

Sustituyendo (41) en (43), obtenemos:

$$\begin{aligned} V_{\tilde{x}}(i+1/i) &= A V_{\tilde{x}}(i/i-1) A^T + B V_w(i) B^T - A V_{\tilde{x}}(i/i-1) C^T \cdot \\ &\cdot [C V_{\tilde{x}}(i/i-1) C^T + V_v(i)]^{-1} C V_{\tilde{x}}(i/i-1) A^T \end{aligned}$$

(44)

De (42), tenemos:

$$E\{\tilde{x}(i+1/i)\} = [A - K(i+1, i)C]E\{\tilde{x}(i/i-1)\} \quad (45)$$

Para un estimado insesgado, debemos obtener:

$$E\{x(i) - \hat{x}(i/i-1)\} = E\{\tilde{x}(i/i-1)\} = 0 \quad (46)$$

Si seleccionamos $E\{\tilde{x}(i_0)\} = 0$, obtendremos que $E\{\tilde{x}(i+1/i)\} = 0$ para todo $i \geq i_0$.

De esta forma obtenemos:

$$\hat{x}(i_0) = E\{x(i_0)\} = \mu_0(i_0) \quad (47)$$

para nuestro caso:

$$V_0(i_0) = E\{[x(i_0) - \hat{x}(i_0)][x(i_0) - \hat{x}(i_0)]^T\} = V_0(i_0) \quad (48)$$

3.4. Filtrado de Kalman discreto.

Si establecemos $i_0 = i$ en (24), obtenemos:

$$\hat{x}(i/i) = \sum_{j=i_0}^i E\{x(i)\vartheta^T(j)\} V_0(j)\vartheta(j)$$

$$\hat{Q}(i/i) = \sum_{j=i_0}^i E\{x(i)\vartheta^T(j)\} V_0(j)\vartheta(j) +$$

$$+ E\{x(i)\sqrt{z(i)}\}V\sqrt{K(j)\sqrt{z(i)}} \quad (49)$$

De (33), obtenemos:

$$\hat{x}(i/i) = \hat{x}(i/i-1) + K(i)\sqrt{z(i)} \quad (50)$$

donde

$$K(i) \triangleq E\{x(i)\sqrt{z(i)}\}V\sqrt{K(i)} \quad (51)$$

Comparando (51) con (35), obtenemos:

$$K(i+1, i) = AK(i) \quad (52)$$

También obtenemos:

$$\hat{x}(i/i-1) = E\{x(i)/z(i-1)\}$$

$$\hat{x}(i/i-1) = E\{Ax(i-1) + Bw(i-1)/z(i-1)\}$$

$$\hat{x}(i/i-1) = AE\{x(i-1)/z(i-1)\}$$

$$\hat{x}(i/i-1) = A\hat{x}(i-1/i-1) \quad (53)$$

Sustituyendo (53) en (50), obtenemos:

$$\hat{x}(i/i) = A\hat{x}(i-1/i-1) + K(i)v(i) \quad (54)$$

donde:

$$v(i) = z(i) - CA\hat{x}(i-1/i-1)$$

$$v(i) = z(i) - CA\hat{x}(i-1/i-1) \quad (55)$$

La varianza del error del estimado del filtrado, se obtiene escribiendo primero:

$$\tilde{x}(i/i) = x(i) - \hat{x}(i/i)$$

$$\tilde{x}(i/i) = x(i) - \hat{x}(i/i-1) - K(i)v(i)$$

$$\tilde{x}(i/i) = \tilde{x}(i/i-1) - K(i)[CA\tilde{x}(i/i-1) + v(i)]$$

$$\tilde{x}(i/i) = [I - K(i)C]\tilde{x}(i/i-1) - K(i)v(i)$$

(56)

De donde obtenemos la varianza del error:

$$V_x(i/i) = [I - K(i)C]V_x(i/i-1)[I - K(i)C]^T +$$

$$+ K(i)V_2(i)K'(i) \quad (57)$$

De (37) y (51), obtenemos:

$$K(i) = E\{[X^*(i/i-1) + \xi(i/i-1)]E\{X^*(i/i-1)C' + v'(i)\}V_2(i)\}$$

En base a que $\xi(i/i-1)$ es ortogonal a $X^*(i/i-1)$ y debido a que $x(i)$ y $v(i)$ no son correlacionados:

$$K(i) = V_2(i/i-1)C'V_2(i) \quad (58)$$

donde

$$V_2(i/i) = [I - K(i)C]V_2(i/i-1) \quad (59)$$

Reescribiendo (57) obtenemos:

$$V_2(i/i) = [I - KC]V_2(i) = [I - KC]V_2(i)C'K' + KV_2(i)C'K'$$

haciendo

$$a = [I - KC]V_2(i)C'K' + KV_2(i)C'K'$$

de (58)

$$a = - [I - KC]K^T V_0 K^T + KV_0 K^T$$

de (32)

$$\dot{a} = - [I - KC]K^T E C^T V_0 C^T + V_0 J K^T + V_0 K^T$$

$$a = - KC V_0 C^T K^T - KV_0 K^T + KCK^T E C^T V_0 C^T + V_0 J K^T + KV_0 K^T$$

$$a = KCK^T (C^T V_0 C^T + V_0) - V_0 C^T J K^T$$

de (32)

$$V_0 = C^T V_0 C^T + V_0$$

de (58)

$$V_0 C^T = V_0$$

por consiguiente $a = 0$.

Finalmente, podemos simplificar la ecuación para la predicción de la variancia del error usando (59): sustituyendo (58) y (59) en (44) obtenemos

$$V_T(i+1/i) = AV_T(i/i)A' + BV_{\epsilon}(i)B' \quad (60)$$

CAPITULO IV.

"OBSERVADORES TIPO LUENBERGER"

Son presentados de manera introductoria observadores que reconstruyen aproximadamente la información necesaria faltante de la variable de estado del sistema. Son discutidos los tópicos especiales de identificación de un observador, observador de orden reducido, observadores funcionales lineales, propiedades de estabilidad, observadores duales y con entradas desconocidas; también son presentadas técnicas mejoradas para la obtención del observador tipo Luenberger.

4.1. Introducción al Observador tipo Luenberger.

Cuando se diseña sistemas de control realimentado es a menudo conveniente, asumir inicialmente que el vector de estado del sistema a ser controlado está disponible a través de mediciones. Bajo esta asunción para el sistema lineal e invariante en el tiempo gobernado por:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i), \quad (1)$$

donde x es el vector $n \times 1$ de estado, u es un vector $r \times 1$ de entrada, A es la matriz $n \times n$ del sistema, y B es una matriz $n \times r$ de distribución. Se podría diseñar una ley de realimentación de la forma $u(i) = U(x(i), i)$ que podría ser implementada si el vector de estado $x(i)$ pudiese ser medido.

Una aproximación conveniente debe ser determinada para el vector de estado tal que pueda ser sustituida en la ley de control, un vector de estado aproximado será sustituido por el estado no disponible, que resulta en la descomposición del problema de diseño de la ley de control en dos fases:

- i. El diseño de la ley de control asumiendo que el vector de estado está disponible, basada en la optimización u otra técnica de diseño.
- ii. El diseño de un sistema que produzca una aproximación al vector de estado; este sistema determinístico, es llamado un observador Luenberger.

Este observador tiene como entradas las entradas y salidas disponibles del sistema cuyo estado está siendo aproximado y tiene un vector de estado que está linealmente relacionado a la aproximación deseada. El observador es un sistema dinámico cuyas características son algo libres para ser determinadas por el diseñador.

Inicialmente, consideremos el problema de observar un sistema libre S_1 , (entrada cero), si las salidas disponibles de este sistema son usadas como entradas para excitar a otro sistema S_2 , entonces el segundo sistema servirá como observador del primer sistema y su estado tenderá a seguir una transformación lineal del estado del primer sistema.



Figura 4.1 Observador

Teorema 1: Sea S_1 el sistema libre, $x(i+1) = Ax(i)$ que excita a S_2 , $z(i+1) = Fz(i) + Hx(i)$. Suponga que hay una transformación T que satisface $TA - FT = H$. Si $z(i_0) = Tx(i_0)$, luego $z(i) = Tx(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Generalizando se obtiene:

$$z(i) = Tx(i) + e^{iF}[z(i_0) - Tx(i_0)], \quad (2)$$

que es la solución de:

$$z(i+1) - Tx(i+1) = Fz(i) + Hx(i) - TAx(i).$$

Los dos sistemas S_1 y S_2 no necesitan tener la misma dimensión. Además, existe una única solución T para la ecuación $TA - FT = H$ si A y F no tienen valores característicos comunes. Es decir, un sistema S_2 que tenga valores característicos diferentes de los de A es un observador para S_1 (Teorema 1).

El resultado del Teorema 1 para sistemas libres puede ser extendido a sistemas forzados incluyendo la entrada tanto en el observador como en el sistema original, por lo tanto si S_1 es gobernado por:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i), \quad (3)$$

el sistema S_2 es gobernado por:

$$z(i+1) = Fz(i) + Hx(i) + TBu(i), \quad (4)$$

que satisface (2). El observador para un sistema puede ser diseñado asumiendo primero que el sistema es libre y luego incorporando las entradas como se hizo en (4).

En un observador Identidad la transformación que relaciona el estado del observador con el estado del sistema original es la transformación identidad. Esto requiere que el observador S_2 sea del mismo orden dinámico que el sistema original S_1 ($T = I$) y que $F = A - H$, la matriz H es determinada parcialmente por la estructura fijada por la salida del sistema original y parcialmente por la estructura de entrada del observador. Si S_1 , con vector de salida y y m -dimensional, es gobernado por:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i), \\ y(i) &= Dx(i), \end{aligned} \quad (5)$$

y el observador $S z$, es gobernado por:

$$z(i+1) = Fz(i) + Gy(i), \quad (6)$$

luego $H = GC$.

En el diseño de observadores la matriz C $m \times n$ es fija y la matriz G es arbitraria; un observador identidad es determinado únicamente por la selección de G .

$$z(i+1) = (A - GC)z(i) + Gy(i) \quad (7)$$

Cualquier G conduce a un observador identidad pero la respuesta dinámica de la observación del proceso es determinada por la matriz $A - GC$ (Teorema 1).

Un observador identidad puede ser diseñado para tener dinámica arbitraria si el sistema original (5) es completamente observable, es decir, si la matriz:

$$[C^T \mid A^T C^T \mid (A^2)^T C^T \mid \dots \mid (A^{n-1})^T C^T],$$

tiene rango n . Si una matriz A $n \times n$ y una matriz C $m \times n$ satisfacen esta condición, luego (C, A) es com-



Figura 4.2 Sistema de 2º orden

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .998 & .001 \\ .000 & .999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .000 \\ .001 \end{bmatrix} u_i$$

$$y(i) = [.001 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} \quad (8)$$

El observador identidad es determinado especificando el vector de entrada del observador:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

pletamente observable.

Lema 1: Para matrices reales C y A , el juego de valores característicos de $A - GC$ puede hacerse corresponder al juego de valores característicos de alguna matriz real $n \times n$ seleccionando la matriz G si y sólo si (C, A) es completamente observable.

Teorema 2: Puede ser diseñado un observador identidad con dinámica arbitraria para sistemas lineales invariantes en el tiempo, si y sólo si el sistema es completamente observable.

Los valores característicos del observador son negativos para que el estado del observador converja al estado del sistema observado, y son escogidos más negativos que los valores característicos del sistema observado para que converjan más rápido que otros efectos del sistema. Esto hace que el observador actúe como un diferenciador y llegue a ser más sensitivo al ruido, e introduzca otras dificultades.

EJEMPLO 1:

La matriz resultante del sistema observador es:

$$A - GC = \begin{bmatrix} .998 & -g_1 & .001 \\ 0 & -g_2 & .999 \end{bmatrix} \quad (9)$$

que tiene la ecuación característica correspondiente:

$$\lambda^2 + (1.997 - g_1)\lambda + (.997 - g_1 - .001g_2) = 0. \quad (10)$$

Si el observador tiene dos valores característicos iguales a -3 y -1 , la ecuación característica es:

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, que conduce a $g_1 = -1.993$, $g_2 = .004$, por consiguiente el observador es gobernado por:

$$\begin{bmatrix} z_1(i+1) \\ z_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .99 & .001 \\ -.004 & .999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(i) \\ z_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .003 \\ .004 \end{bmatrix} y_i + \begin{bmatrix} .000 \\ .001 \end{bmatrix} u_i$$

El observador identidad posee un cierto grado de redundancia; mientras el observador construye un estimado del vector de estado, parte del estado es dado por salidas del sistema y está disponible para medición directa. Esta redundancia es eliminada con un

observador de menor dimensión y todavía con dinámica arbitraria.

Si $y(i)$ es de dimensión m , puede ser contruido un observador de orden $n - m$ con estado $z(i)$ que se aproxima a $Tx(i)$ para alguna matriz T $m \times n$. (Teorema 1).

Luego, un estimado $\hat{x}(i)$ de $x(i)$ puede ser determinado a través de:

$$\hat{x}(i) = \begin{bmatrix} T \\ - \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(i) \\ y(i) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

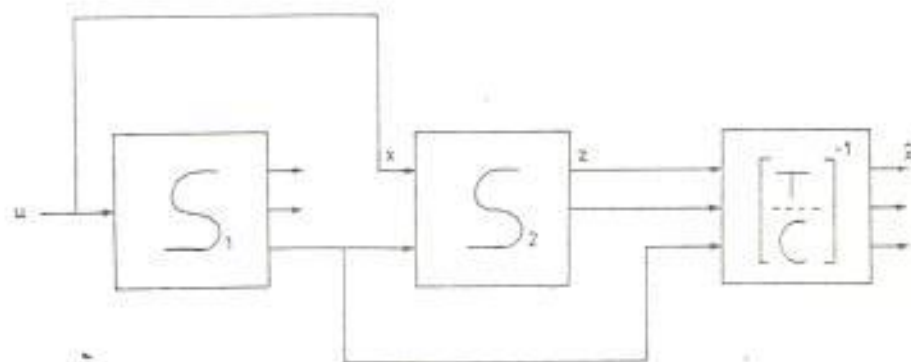


Figura 4.3 Observador de orden reducido

donde la matriz T asociada con el observador debe tener $n - m$ filas linealmente independientes de las filas de C .

Consideremos nuevamente el sistema:

$$\begin{aligned}x(i + 1) &= Ax(i) + Bu(i), \\y(i) &= Cx(i),\end{aligned}\tag{12}$$

y asumamos que las m salidas del sistema son linealmente independientes, es decir, que la matriz C de distribución de salida tiene rango m . Además, introduzcamos un cambio de coordenadas, tal que la matriz C toma la forma $C = [I : 0]$, particionando C en una matriz identidad $m \times m$ y una matriz cero $m \times (n - m)$, donde el cambio de coordenadas es obtenido seleccionando una matriz D $(n - m) \times n$ tal que:

$$M = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \text{ con } |N| \neq 0$$

y usando las variables $x(i) = Mx(i)$.

Particionando el vector de estado como:

$$x(i) = \begin{bmatrix} y(i) \\ w(i) \end{bmatrix},$$

podemos escribir las ecuaciones del sistema en la forma

$$y(i+1) = A_{11}y(i) + A_{12}w(i) + B_{11}u(i) \quad (13a)$$

$$w(i+1) = A_{21}y(i) + A_{22}w(i) + B_{21}u(i) \quad (13b)$$

En resumen, el vector $y(i)$ es medible y debido a que $u(i)$ también es medible, (13a) da la medición de $A_{12}w(i)$ para el sistema (13b) que tiene el vector de estado $w(i)$ y entrada $A_{21}y(i) + B_{21}u(i)$.

Lema 2: Si (C, A) es completamente observable, luego $(\hat{A}_{12}, \hat{A}_{22})$ también será completamente observable.

Para construir el observador inicialmente lo definiremos en la forma:

$$\begin{aligned} \hat{w}(i+1) = & (A_{22} - LA_{12})\hat{w}(i) + A_{21}y(i) + B_{21}u(i) + \\ & + L(y(i+1) - A_{11}y(i)) - LB_{11}u(i). \end{aligned} \quad (14)$$

En base a los lemas 1 y 2, L puede ser seleccionado tal que $\hat{A}_{22} - EA_{21}$ tenga valores característicos arbitrarios.

La diferenciación de y puede ser evitada modificando el diagrama de bloque de la figura 4.4 al de la figura 4.5 que es equivalente en el punto w .

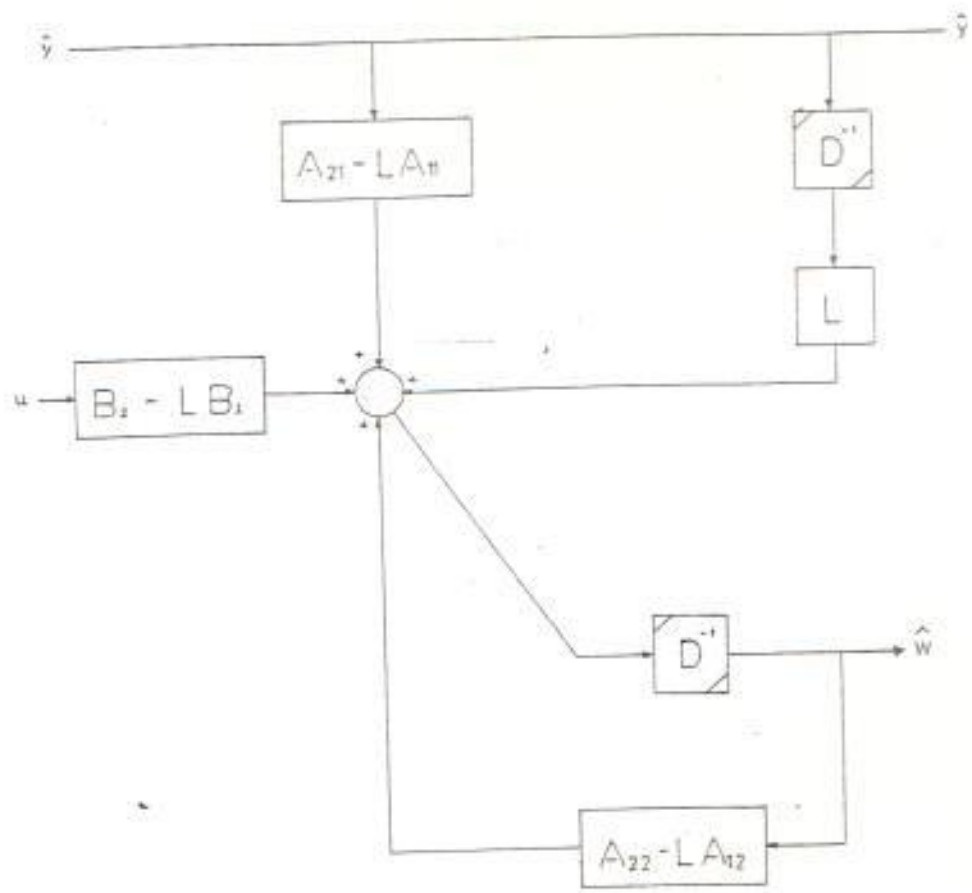


Figura 4.4 Observador de orden reducido usando una unidad de retardo

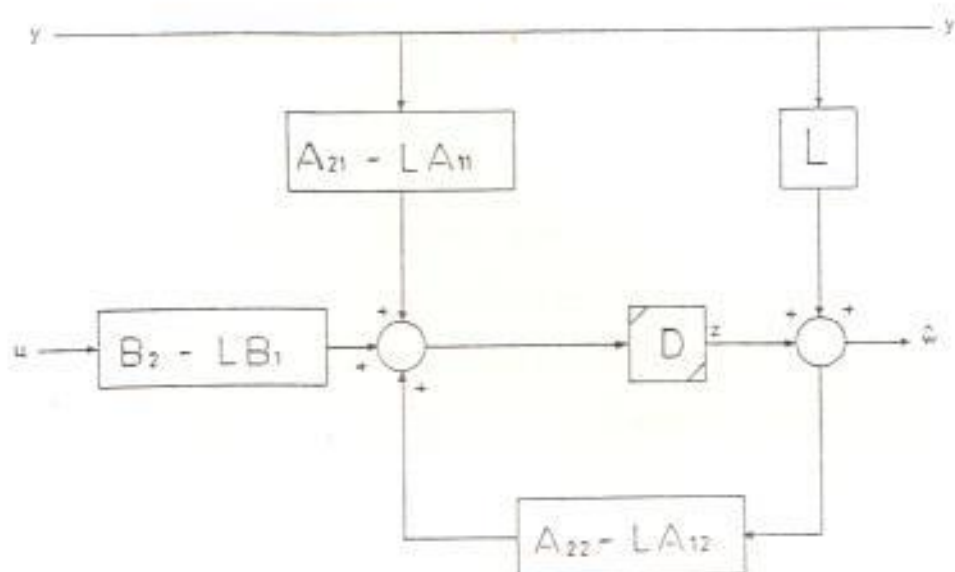


Figura 4.5 Observador de orden reducido sin usar unidad de retardo

La forma final del observador de orden reducido es:

$$z(i+1) = (A_{22} - LA_{12})z(i) + (A_{22} - LA_{12})LY(i) + (A_{21} - LA_{11})y(i) + (B_2 - LB_1)u(i),$$

(15)

con

$$\hat{z}(i) = \hat{w}(i) = Ly(i). \quad (16)$$

Para este observador $T = [-L \quad I]$; esta construcción permite establecer el siguiente teorema.

Teorema 3: Puede ser construido un observador de orden $n - m$ con valores característicos arbitrarios para un sistema lineal e invariante en el tiempo, completamente controlable de orden n con salidas linealmente independientes.

La forma explícita del observador dada aquí, obtenida por particionamiento del sistema, es una manera de construir un observador; hay otras, tales como la transformación a la forma canónica o simplemente hipotetizando la estructura general y resolviendo para los parámetros desconocidos. El teorema 3 garantiza que tales métodos conduzcan a un resultado apropiado.

EJEMPLO 2: El sistema de la figura 4.2 y tratado en el ejemplo 1, es un sistema de segundo orden con una salida tal que puede ser construido un observador de primer orden con valor característico arbitrario, tal como se muestra en la figura 4.6

La matriz C tiene la forma requerida, $C = [0.001 \ 0]$, en este caso $A_{22} - GA_{12} = -1 - 0$, que da el valor característico del observador. Si se escoge $G = 2$, el valor característico del observador será $.95$.

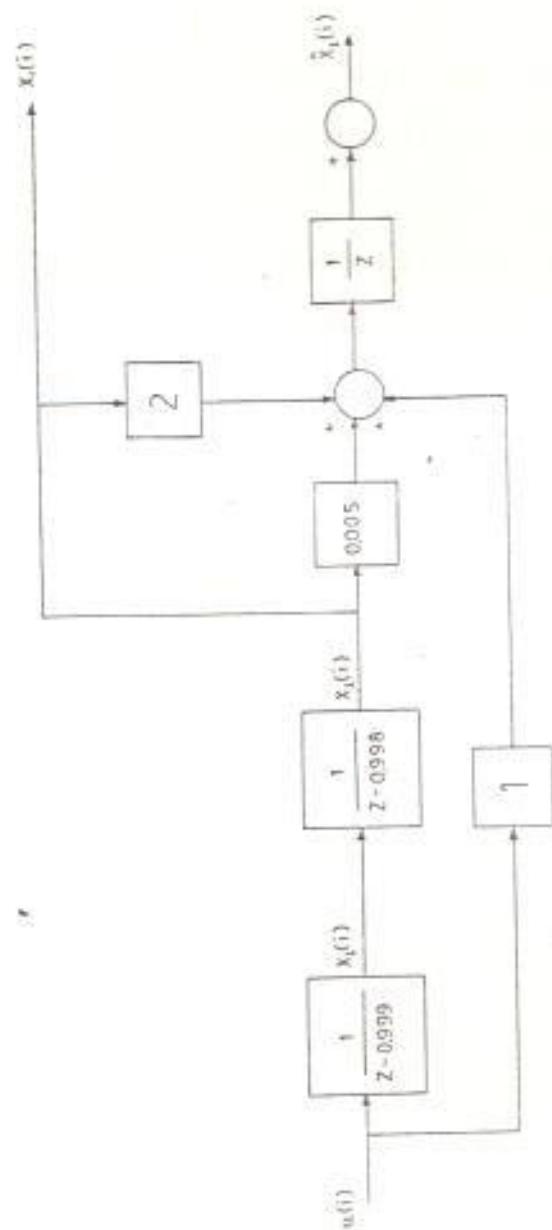


Figura 4.6 Observador de 1º orden para un sistema de 2º orden

4.2. Observación de una Funcional Lineal particular.

Para algunas aplicaciones todo lo que se necesita es una funcional lineal del estado, $z = a'x$. Por ejemplo, una ley de control lineal e invariante en el tiempo para un sistema de una entrada es determinada por la funcional lineal del estado del sistema.

Una funcional lineal del estado, $z = a'x$, puede ser estimada con un observador de $v - 1$ valores característicos arbitrarios, siendo v el índice de observabilidad definido como el menor entero positivo para el cual la matriz:

$$[C' : A'C' : \dots : (A')^{v-1}C']$$

tiene rango n .

Para un sistema completamente observable $v - 1 \leq n - m$ y como en muchos sistemas $v - 1 \ll n - m$, observar una funcional lineal particular del estado puede ser más simple que observar el vector de estado completo.

La forma del observador es la del observador con vec-

tor de estado completo, y el estimado de $z = a'x$ es definido por:

$$\hat{z}(i) = b'y(i) + c'z(i),$$

$$z(i+1) = Fz(i) + Hx(i) + TBu(i), \quad (17)$$

donde F , H , T y B ya han sido definidos anteriormente, donde b y c son vectores que satisfacen $b'kC + c'T = a'$, y el observador sólo necesita ser de orden $n - 1$.

EJEMPLO 3: En el sistema de cuarto orden, mostrado en la figura 4.7, las mediciones disponibles x_1 y x_2 tienen un índice de observabilidad 2.

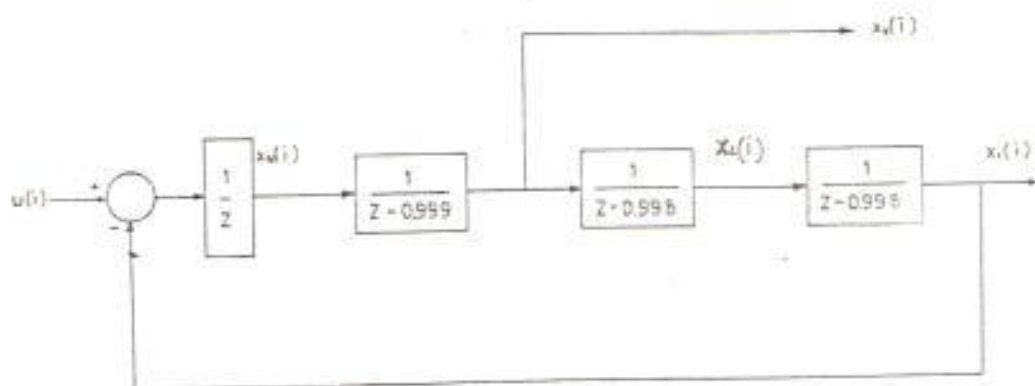


Figura 4.7 Sistema de cuarto orden

Hagamos que el observador de la funcional $x_2 + u$ tenga un valor característico igual .95. Omitiendo inicialmente la entrada u , el observador sería de la forma:

$$z(i+1) = .95z(i) + g_1 x_1 + g_2 x_2,$$

como se muestra en la figura 4.8.

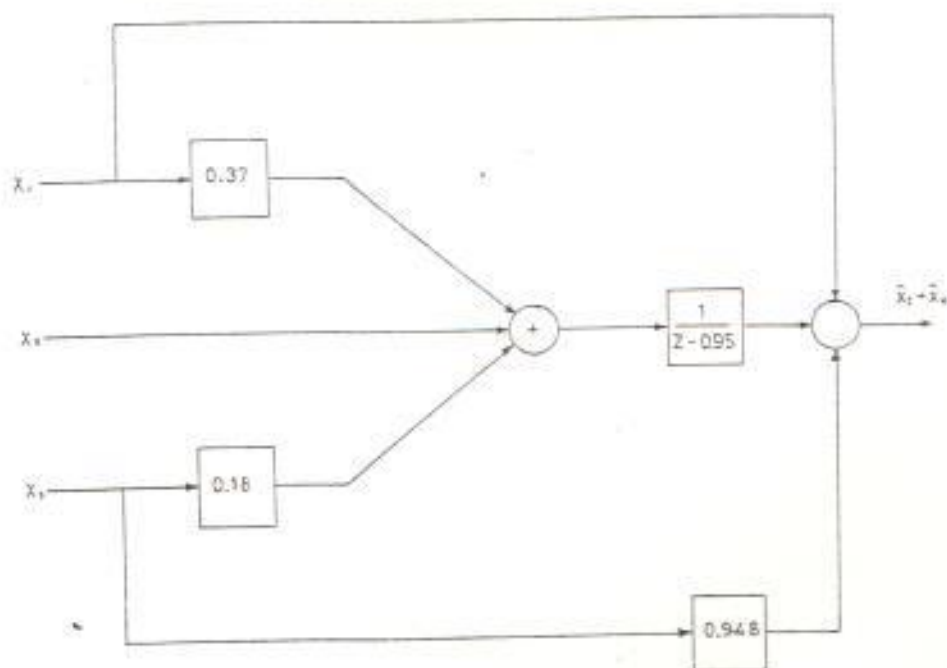


Figura 4.8 Observador de una funcional lineal

Del teorema 1, el observador tiene asociada una matriz T que satisface:

$$T \begin{bmatrix} .367 & .184 & .054 & .011 \\ -.011 & .367 & .239 & .077 \\ -.077 & -.011 & .605 & .393 \\ -.316 & -.066 & -.011 & -.078 \end{bmatrix} - .95T = [g_1 \ 0 \ g_2 \ 0] \quad (18)$$

Si $T = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4]$, haciendo $t_1 = .1$ y $t_4 = .1$ y reemplazándolos en (18) obtenemos:

$$[t_1 \ .1 \ t_3 \ .1] \begin{bmatrix} 1.0E+00 & 1.0E-02 & 5.1E-05 & 1.7E-07 \\ -1.7E-07 & 1.0E+00 & 1.0E-02 & 5.1E-05 \\ -5.1E-05 & -1.7E-07 & 1.0E+00 & 1.0E-02 \\ -1.0E-02 & -5.1E-05 & -1.7E-07 & 1.0E+00 \end{bmatrix} = [g_1 \ 0 \ g_2 \ 0],$$

que puede ser resuelta para cuatro incógnitas t_1 , g_1 , t_3 , g_2 .

Los observadores no alteran las propiedades de estabilidad del sistema en el que son incluidos, no cambian los valores característicos de lazo cerrado del sistema, sólo agregan los suyos como se demuestra a

continuación.

Consideremos el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned}x(i + 1) &= Ax(i) + Bu(i), \\y(i) &= Cx(i)\end{aligned}\tag{19}$$

y sea la ley de control:

$$u(i) = Kx(i).\tag{20}$$

Para que fuese posible realizar esta ley de control por medio de las mediciones disponibles, debe cumplirse $K = RC$ para alguna matriz R , de esta manera el sistema de lazo cerrado sería gobernado por:

$$x(i + 1) = (A + BK)x(i).\tag{21}$$

y de aquí que sus valores característicos deberían ser los valores característicos de $A + BK$.

Si la ley de control no puede ser realizada directamente, debe ser construido un observador de la forma:

$$z(i+1) = Fz(i) + Gy(i) + TBu(i),$$

$$u(i) = Kx(i) = Ez(i) + Dy(i), \quad (22)$$

donde

$$TA - FT = GC,$$

$$K = ET + DC. \quad (23)$$

Para que el par (C, A) sea completamente observable es suficiente que G, E, D, F y T satisfagan (23), con F de valores característicos arbitrarios.

Haciendo $u(i) = Kx(i)$ se obtiene el sistema compuesto

$$\begin{bmatrix} x(i+1) \\ z(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BE \\ GC + TBDC & F + TBE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ z(i) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Si introducimos $\xi(i) = z(i) - Tx(i)$ y usamos x y ξ como coordenadas, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x(i+1) \\ \xi(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BE \\ \xi & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ \xi(i) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

donde los valores característicos del sistema compuesto son los de $A + BK$ y de F .

Del lema 1, se sigue que si el sistema (19) es completamente observable es posible seleccionar K para colocar arbitrariamente los valores característicos de lazo cerrado.

Si la ley de control no es realizable pero el sistema (19) es completamente observable, puede ser construido un observador de orden no mayor que $n - m$ tal que la ley de control pueda ser estimada; debido a que los valores característicos del observador también son arbitrarios los valores del sistema compuesto (25) pueden ser seleccionados arbitrariamente.

Teorema 4: Para un sistema (19) de orden n , completamente controlable y observable, que tiene m salidas linealmente independientes, puede ser construido un sistema, de realimentación dinámica, de orden $n - m$ tal que $2n - m$ valores característicos del sistema compuesto (25) tomen valores previamente asignados.

EJEMPLO 4: Se diseña un sistema de control realimentado para el sistema de la figura 4.2, del ejemplo 1,

tal que su salida rastree la entrada de una perturbación d .

Para el sistema de la figura 4.2 se diseña la ley de control $u = .97x_1 + x_2$ que coloca los valores característicos en .47; se implementa esta ley con el observador de primer orden construido antes con valor característico en .95, como se muestra en la figura 4.9.

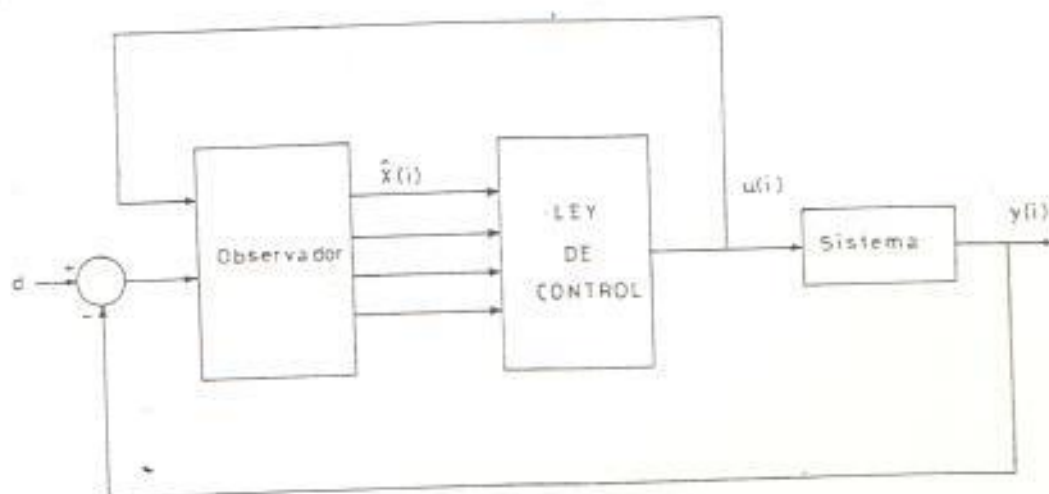


Figura 4.9 Un servomecanismo

La propiedad de un sistema de observar a otro puede ser aplicada en dirección contraria para obtener una clase especial de controlador, llamado observador dual. Si en la figura 4.1 el sistema S_2 es controlado por S_1 , el sistema S_2 tiende a seguir a S_1 al cual se lo considera como que gobierna las propiedades de S_2 .

Supongamos que el sistema definido por las ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned}x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\y(i) &= Cx(i),\end{aligned}\tag{26}$$

es excitado por un sistema libre descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}z(i+1) &= Fz(i), \\u(i) &= Jz(i),\end{aligned}\tag{27}$$

donde $AP - PF = BJ$ para alguna P .

Del teorema 1, se obtiene que el vector $n = x + Fz$ es gobernado por:

$$n(i+1) = An(i),$$

y por consiguiente la planta sigue al sistema libre, esta propiedad de seguimiento puede ser usada para definir un sistema de lazo cerrado para la planta.

En lugar de fijar la atención en el hecho de que sólo ciertas salidas de la planta están disponibles, nos concentramos en el hecho de que sólo ciertas entradas, como son definidas por B , están disponibles.

Si la salida $y(i) = Cx(i)$ pudiera ser alimentada al sistema en la forma:

$$x(i+1) = Ax(i) + Ly(i), \quad (28)$$

los valores característicos del sistema deberían ser los valores característicos de $A + LC$.

Por el lema 1, si el sistema es observable, L puede ser seleccionada para colocar arbitrariamente los valores característicos. El observador dual puede ser pensado como suministrando una aproximación para las entradas deseadas.

Construimos el observador dual en la forma:

$$z(i+1) = Fz(i) + Mw(i),$$

$$w(i) = y(i) + CPz(i),$$

$$u(i) = Jz(i) + Nw(i), \quad (29)$$

donde:

$$AP - PF = BJ,$$

$$L = PM + BN. \quad (30)$$

Las ecuaciones (30) son duales a (23) y tendrán la solución J , M , N y F con F teniendo valores característicos arbitrarios, si el sistema dado por las ecuaciones dinámicas (26) es completamente controlable.

El sistema compuesto es:

$$\begin{bmatrix} x(i+1) \\ z(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BNC & BJ + BNCP \\ MC & F + MCP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ z(i) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Introduciendo $n = x + Pz$ y usando z y n como coordenadas, conduce el sistema compuesto:

$$\begin{bmatrix} n(i+1) \\ z(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + LC & 0 \\ MC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(i) \\ z(i) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

que es el dual de (25).

Los valores característicos del sistema compuesto son los valores característicos de $A + LC$ y de F ; de donde establecemos el teorema dual al teorema 4.

Teorema 5: Para el sistema (2b) de orden n , completamente controlable y observable, con r entradas linealmente independientes, un sistema realimentado dinámico de orden $n - r$ puede ser construido tal que los $2n - r$ valores característicos del sistema compuesto descrito por (32) tomen valores previamente asignados.

4.3. Observador para sistemas con disturbios no medibles.

Para estimar el estado de un sistema lineal invariante en el tiempo y de múltiples variables, usando el

observador de Luenberger, se asume que todas las entradas del sistema son medibles.

El procedimiento que se sigue sirve para la construcción del estimador de estado de orden mínimo de sistemas con perturbaciones no medibles; con algunas entradas no medibles, se asume que satisfacen una ecuación en diferencias de coeficientes constantes. Luego, se construye el observador de Luenberger para el sistema aumentado por la ecuación en diferencias que genera las perturbaciones no medibles.

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del observador de un sistema con perturbaciones no medibles, son derivadas usando una aproximación geométrica que detallaremos a continuación, para la cual consideramos un sistema especificado por

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\ y(i) &= Cx(i), \end{aligned} \quad (33)$$

donde A , B , y C son matrices constantes, el par (A, C) es completamente observable y la matriz C es de rango completo de filas. Bajo una conveniente transformación de coordenadas de estado, las ecuaciones

dinámicas (33) pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} y(i+1) \\ \zeta(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(i) \\ \zeta(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ K_4 \end{bmatrix} u(i)$$

$$y(i) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} y(i) \\ \zeta(i) \end{bmatrix}$$

donde $\begin{bmatrix} y \\ \zeta \end{bmatrix}$ es la nueva variable de estado relacionada a la variable de estado original x mediante la transformación:

$$x(i) = [E \quad F] \begin{bmatrix} y(i) \\ \zeta(i) \end{bmatrix}$$

Es posible encontrar observadores de dimensiones menores que las del sistema a ser observado, llamados observadores de orden reducido.

Asumamos que el sistema invariante en el tiempo, a ser observado es el gobernado por las ecuaciones dinámicas (33), donde la dimensión del estado $x(i)$ es n y la dimensión de la variable $y(i)$ es dada por 1. Como la ecuación observada $y(i) = Cx(i)$ nos proporcio-

na l ecuaciones lineales en el estado desconocido $x(i)$, es necesario reconstruir $n - 1$ combinaciones lineales de los componentes del estado.

Assumiendo que C es de rango completo, el vector $p(i)$ de dimension $(n - 1)$ es:

$$p(i) = C^* x(i), \quad (34)$$

tal que

$$\begin{vmatrix} C \\ C^* \end{vmatrix} \neq 0. \quad (35)$$

De

$$y(i) = Cx(i),$$

$$p(i) = C^* x(i), \quad (36)$$

se obtiene

$$x(i) = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(i) \\ p(i) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Escribiendo

$$\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} = (L_1, L_2), \quad (38)$$

se obtiene

$$x(i) = L_1 y(i) + L_2 p(i). \quad (39)$$

Si reconstruimos $p(i)$ y denotamos el valor reconstruido por $\hat{p}(i)$, el estado reconstruido será:

$$\hat{x}(i) = L_1 y(i) + L_2 \hat{p}(i) \quad (40)$$

El observador para $p(i)$ se encuentra notando que $p(i)$ obedece a la siguiente ecuación en diferencias.

$$p(i+1) = C'Ax(i) + C'Bu(i), \quad (41)$$

$$p(i+1) = C'AL_2p(i) + C'AL_1y(i) + C'Bu(i). \quad (42)$$

Diferenciando $y(i)$:

$$y(i+1) = CAx(i) + CBu(i)$$

$$y(i+1) = CAL_2 p(i) + CAL_1 y(i) + CBu(i). \quad (43)$$

De (42) y (43) obtenemos el observador:

$$\begin{aligned} \hat{p}(i+1) = & C'AL_2 \hat{p}(i) + CAL_1 y(i) + C'Bu(i) + \\ & + K[y(i) - CAL_1 y(i) - CBu(i) - \\ & - CAL_2 \hat{p}(i)] \end{aligned} \quad (44)$$

Si el par (A, B) es completamente reconstruible, también el par (CAL_1, CAL_2) es completamente reconstruible tal que seleccionando K todos los polos de (44) pueden ser colocados arbitrariamente.

No se requiere tomar la diferencia de $y(i)$, porque si

$$q(i) = \hat{p}(i) - Ky(i), \quad (45)$$

se observa que:

$$\begin{aligned} q(i+1) = & [C'AL_2 - KCAL_2]q(i) + [C'AL_2K + \\ & + C'AL_1 - KCAL_1 - KCAL_2K]y(i) + \end{aligned}$$

$$+ [C'B - KC]u(i), \quad (46)$$

siendo el estado reconstruido de la forma:

$$\hat{x}(i) = L_2 q(i) + (L_1 + L_2 K)y(i). \quad (47)$$

Las dos últimas ecuaciones constituyen un observador de la forma:

$$q(i+1) = Fq(i) + Gy(i) + Hu(i),$$

$$\dot{z}(i) = Kq(i) + Ly(i) + Mu(i). \quad (48)$$

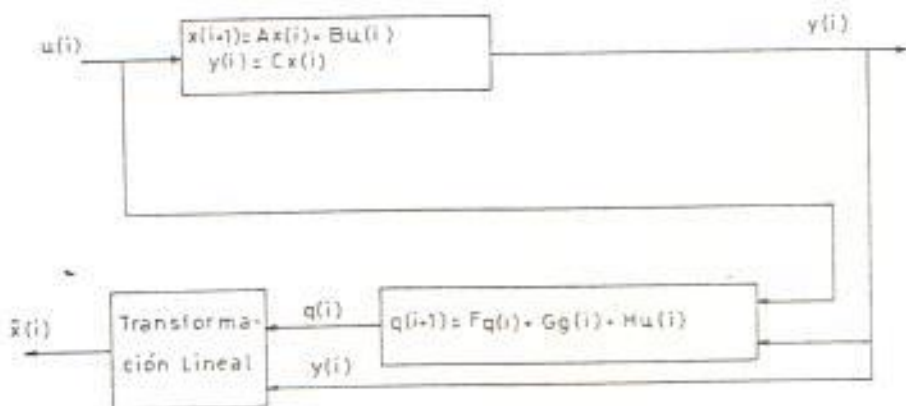


Figura 4.10 Observador de Luenberger

El camino directo de la variable observada $y(i)$ al estado reconstruido $x(i)$, hace que el estimado $\hat{x}(i)$ sea más sensible a la medición de errores en $y(i)$ que el estimado generado por un observador de orden completo.

Reescribiendo las ecuaciones (46) y (47), obtenemos:

$$q(i+1) = (K_1 - KK_2)q(i) + (K_1K + K_2 - KK_1 - KK_2k)y(i) + (K_1 - KK_2)u(i)$$

$$\hat{x}(i) = Fq(i) + (E + FK)y(i) \quad (49)$$

Para que el error entre el estado $x(i)$ del sistema y el estimado $\hat{x}(i)$ tienda asintóticamente a cero, tenemos que escoger K tal que la matriz $(K_1 - KK_2)$ en (49) sea estable, es decir, que los valores característicos, del determinante igualado a cero, sean estrictamente menores que uno.

Suponemos que la entrada u , no es medible, luego tratamos de encontrar una matriz K que también haga que la primera columna de la matriz $(K_1 - KK_2)$ sea cero. Si tal matriz K existe, podemos construir un

observador tipo Luenberger con una entrada no medible $u(i)$.

EJEMPLO 5: Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo, especificado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \\ x_3(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .52 & .38 & .00 \\ -.38 & .90 & .00 \\ .09 & -.38 & .61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -.38 \\ .10 \\ -.02 \end{bmatrix} u(i)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(i) \\ y_2(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .001 & .00 & .00 \\ .00 & .00 & .001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix}$$

El problema consiste en estimar el estado $x(i)$ del sistema sin medición de la entrada $u(i)$, donde el observador se construye como sigue:

$$q(i+1) = k_2 q(i) + [-1, k_2+k_3] \begin{bmatrix} y_1(i) \\ y_2(i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .001 & .000 \\ .000 & k_2 \\ .000 & .001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(i) \\ y_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .000 \\ .001 \\ .000 \end{bmatrix} q(i)$$

En la construcción anterior, hemos establecido $K = [0, k_2]$. esta selección de K hace al observador independiente de $u(i)$, el observador puede asumir cualquier polo estable escogiendo un apropiado k_2 .

CAPITULO V

"OBSERVADORES DEL TIPO ESTIMADOR ESTOCASTICO."

Este capítulo es dedicado básicamente a sistemas con entradas estocásticas y/o mediciones contaminadas con ruido. Las entradas estocásticas sólo pueden ser definidas estadísticamente; si es conocido su pasado o presente, la futura señal sólo puede ser discutida probabilísticamente.

5.1. Introducción a la Estimación Estocástica.

Quando el sistema es lineal con perturbaciones gaussianas aditivas y se emplea una funcional cuadrática objetiva, el control realimentado estocástico óptimo puede ser calculado exactamente.

El sistema de ecuaciones de estado es dado por:

$$x(i+1) = Fx(i) + Eu(i) + Dw(i), \quad (1)$$

donde x tiene n componentes, u tiene m componentes y el vector gaussiano puramente aleatorio w tiene q componentes, donde la matriz de covarianza ($q \times q$) es

$$Q(i) = E\{w(i)w(i)'\}. \quad (2)$$

La notación para un valor esperado condicional, sea y dado z es escrito $E(y/z)$. La información sobre el sistema es obtenida por medio de mediciones con ruido

$$y(i) = Hx(i) + v(i), \quad (3)$$

donde $v(i)$ es un vector gaussiano puramente aleatorio de l componentes, con matriz de covarianza

$$R(i) = E\{v(i)v(i)'\}, \quad (4)$$

y H es una matriz ($l \times n$) de rango l .

El valor esperado de $x(j)$, dadas las mediciones $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(j)$, es denotado por:

$$\hat{x}(j) = E\{x(j)/y(0), y(1), \dots, y(j)\},$$

que se puede escribir como:

$$\hat{x}(j) = E(x(j)/y^j). \quad (5)$$

En el caso de entradas gaussianas y medición con ruido, el mejor estimador de varianza mínima para un sistema lineal, también es lineal. El Filtro de Kalman conduce al estimado $\hat{x}(i)$ de varianza mínima igual a la esperanza condicional dada en (5).

Dadas las mediciones y^i deseamos formular una política para generar $u(i)$ tal que el valor esperado de:

$$\frac{1}{2} x(N)' G(N) x(N) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [x(i)' A x(i) + u(i)' B u(i)] \quad (6)$$

sea minimizado. Empleando variables de estado extras y usando transformaciones se reduce el criterio cuadrático a la forma (6), donde G, A y B son positivas semidefinidas y el menos una es positiva definida.

Aunque $x(i)$ es afectado por entradas estocásticas en (1), tomando el valor esperado de la función de costo (6) reducimos el problema a uno de minimización de una función determinística.

Cuando los parámetros del proceso tienen fluctuaciones es deseable actualizarlos en línea. Si los parámetros varían aleatoriamente se los puede representar por

$$a_i(i+1) = a_i(i) + w_i(i)$$

o

$$a_i(i+1) = ba_i(i) + w_i(i), \quad |b| < 1$$

donde $w_i(i)$ es una secuencia de números aleatorios con media de valor cero.

Los procesos aleatorios corresponden a parámetros que cambian aleatoriamente hacia arriba y hacia abajo cada instante discreto de tiempo, $a_i(i)$ no tiene valor medio pero fluctúa. Los procesos aleatorios corresponden a procesos con coeficiente de correlación b entre $a(i)$ y $a(i+1)$, siendo la media de valor cero.

Aplicando programación lineal al problema lineal de control cuadrático, asumimos que la función de costo óptimo es dada por:

$$V(x(i)) = E\left[\frac{1}{2}x(i)'G(i)x(i)/y^i\right] + \frac{1}{2}a(i), \quad (7)$$

sustituyendo (7) en la relación de recurrencia de programación lineal:

$$\begin{aligned} 2V(x(i)) = \min_{u(i)} & E\{x(i)'Ax(i) + u(i)'Bu(i) + E\{x(i+1) \\ & + 1)'G(i+1)x(i+1)/y^{i+1}\} + a(i+1)/y^i, \end{aligned} \quad (8)$$

de la definición de media condicional se sigue que:

$$\begin{aligned} E\{E\{x(i+1)'G(i+1)x(i+1)/y^{i+1}|y^i\}\} & = \\ & = E\{x(i+1)'G(i+1)x(i+1)/y^i\}, \end{aligned} \quad (9)$$

sustituyendo (9) en (8) y eliminando $x(i+1)$ por medio de (4) se llega finalmente a:

$$\begin{aligned} 2V(x(i)) = \min_{u(i)} & E\{x(i)'Ax(i) + u(i)'Bu(i) + a(i+1) \\ & + [Fx(i) + Eu(i) + Dw(i)]'G(i+1)[Fx(i) \\ & + Eu(i) + Dw(i)]/y^i\}, \end{aligned} \quad (10)$$

debido a que $x(i)$ y $u(i)$ son independientes de $w(i)$, al tomar el valor esperado, términos como $w(i)'(\cdot)$, $x(i)$ y $w(i)'(\cdot)u(i)$ se hacen cero.

Sustituyendo (7) en el lado izquierdo de (10)

$$E[x(i)'G(i)x(i)/Y^i] + a(i) = \min_{u(i)} E\{x(i)'Ax(i) + u(i)'Bu(i) + [Fx(i) + Eu(i)]'G(i+1)[Fx(i) + Eu(i)]y^i + E[w(i)'D'G(i+1)Dw(i)] + a(i+1)\}.$$

(11)

El problema de minimización en la ecuación (11) es del mismo tipo que el correspondiente al problema de control determinístico. En consecuencia puede obtenerse el vector minimizante $u(i)$ inmediatamente como sigue

$$u(i) = -K(i)'E[x(i)/Y^i] = -K(i)'Fx(i),$$

(12)

donde

$$K(i) = G(i+1)E\{B + E'G(i+1)E\}^{-1}.$$

Sustituyendo (12) en (11), y reordenando:

$$E\{x(i)'[A - G(i) + F'G(i+1)F]x(i)/y^i\} + a(i+1) - \\ - a(i) + E\{w(i)'C'G(i+1)Dw(i)\} - x(i)'F'K(i)E\{G(i+1) \\ + 1)F\}x(i) = 0. \quad (13)$$

Poniendo

$$x(i) = \hat{x}(i) + e(i),$$

donde $e(i)$ es el error en derivar el estimado (5) del Filtro de Kalman; debido a que es un estimador insesgado $E\{e(i)/y^i\} = 0$. Si $T(i)$ es una matriz $(n \times n)$, se obtiene

$$E\{x(i)'T(i)x(i)/y^i\} = \hat{x}(i)'T(i)\hat{x}(i) + E\{e(i)'T(i) \\ \cdot e(i)/y^i\}. \quad (14)$$

El último término puede ser escrito $E\{e(i)'T(i)e(i)\}$, porque es una combinación lineal de términos de la matriz de covarianza del error del estimador de Kalman, que igual que G , puede ser calculada independientemente de las mediciones y de la variable de control $u(i)$.

Por medio de (14) la ecuación (12) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} & x(i)' [A - B(i) + F'\hat{\Phi}(i)F]x(i) + a(i+1) - a(i) + \\ & + E\{w(i)'D'B(i+1)Dw(i)\} + E\{e(i)'T(i)e(i)\} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\hat{\Phi}(i) = B(i+1) - K(i)E'B(i+1),$$

siendo

$$T(i) = A - B(i) + F'B(i+1)F.$$

La función de costo óptimo (7) es correcta si la matriz covarianza de los errores del nuevo estimado $x(i)$ es

$$G(i) = F'\hat{\Phi}(i)F + A.$$

y

$$a(i+1) = a(i) + E\{w(i)'D'B(i+1)Dw(i)\} + E\{e(i)'T(i)e(i)\}.$$

de donde se obtiene:

El teorema de separación, el control óptimo estocástico es dado como un algoritmo de realimentación, los coeficientes de realimentación son calculados en la misma manera que para el problema de control determinístico pero actúan sobre expectativas condicionales de los estados derivados del estimador de Kalman. Para sistemas lineales, con costo funcional cuadrático y entradas gaussianas aditivas permite la simplificación de los problemas de estimación y control.

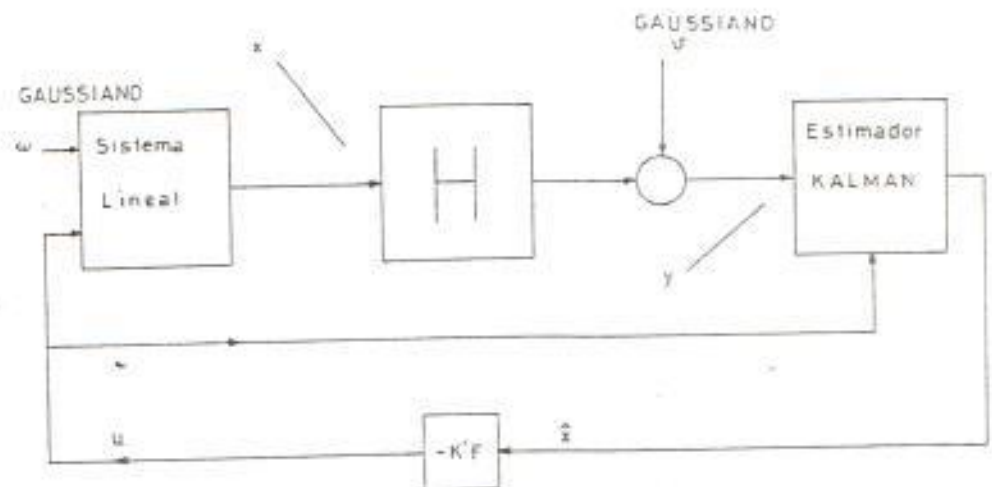


Figura 5.1 Control estocástico realimentado

5.2. Ganancias óptimas del Observador Estocástico.

El diseño de un observador estocástico óptimo de orden reducido ha sido basado en la solución de una ecuación de covarianza de orden completo que restringe los beneficios del estimador de orden reducido. Es mostrado que la ganancia del observador de orden reducido puede ser obtenida resolviendo una ecuación de covarianza de orden reducido.

El diseño del observador ha sido basado en la selección de ganancias que minimicen la traza de la ecuación de covarianza de estimación del error, que tiene el mismo orden del sistema, se hace uso de la técnica de partición de matrices para derivar una ecuación de orden reducido.

La selección de las ganancias del observador es basada en la minimización de la traza de la ecuación de covarianza de orden reducido que hace a este resultado computacionalmente superior a la formulación existente.

5.2.1. Sistemas y observadores dinámicos.

Consideremos el sistema de segundo orden descrito por

$$x(i+1) = Fx(i) + Gw(i) \quad w \sim N(0, Q). \quad (16)$$

Las mediciones (z) , son asumidas parcialmente estocásticas (z_1) y parcialmente determinísticas (z_2).

$$z(i) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 \sim N(0, R_1) \quad (17)$$

z_1 : vector m_1 ; z_2 : vector m_2

$$m_2 = n - m_1.$$

La ecuación en diferencias que describe al observador de estado \hat{e} de orden $(n - m_2)$ es

$$\hat{e}(i+1) = TFA\hat{e}(i) + TFBz_2(i) + TGW(i); \quad (18)$$

donde

$$e(i) = Tx(i), \quad (19)$$

y T es escogida tal que:

$$\begin{bmatrix} T \\ - \\ H_2 \end{bmatrix}^{-1} = [A \mid B_2], \quad (20)$$

el observador estocástico toma la forma:

$$\begin{aligned} \hat{e}(i+1) = TFA\hat{e}(i) + TFB_2z_2(i) + TB_1 \cdot \\ \cdot (z_1(i) - H_1x_1(i)) \end{aligned} \quad (21)$$

$$x(i) = A\hat{e}(i) + B_2z_2(i) \quad (22)$$

La ganancia TB_1 es incorporada procesando las mediciones de ruido z_1 . En ausencia de mediciones de ruido z_1 , la ecuación del observador estocástico (21) se reduce a la ecuación del observador determinístico de orden $(n - m_2)$, y en ausencia de mediciones libres de ruido z_2 , la estructura es idéntica a la del filtro de Kalman de orden n .

5.2.2. Ecuaciones de covarianza del error.

Definamos el error de la estimación del observador \tilde{e} como $(\hat{e} - e)$, luego:

$$\tilde{e}(i+1) = (TFA - TB_1H_1A)\tilde{e}(i) + TB_1v_1(i) - TGw(i). \quad (23)$$

Definamos a la matriz covarianza del error del observador Λ como $E[\tilde{e}\tilde{e}^T]$, luego:

$$\Lambda(i+1) = (TFA - TB_1H_1A)^T \Lambda(i) + (TFA - TB_1H_1A)^T + TB_1R_1B_1^T + TGGS^T, \quad (24)$$

donde las ganancias B_1 , A y T son escogidas tal que $\text{tr}(\Lambda(i+1))$ sea minimizada y minimize las ganancias.

5.2.3. Ganancias óptimas.

Las ganancias fueron calculadas minimizando la traza de $P(i+1)$ donde $P(i)$ es la matriz covarianza del error ($n \times n$) del vector $x(i)$

Usamos partición de matrices para la minimización de la ecuación de covarianza del error $(n - m_2) \times (n - m_2)$.

$$G_2 = [H_{21} \quad | \quad H_{22}] \quad (25)$$

La $\text{tr}(\Omega(i+1))$ puede ser minimizada con respecto a (TB_2) , en base a que B_1 está ya determinada, conduciendo a:

$$(TB_2)^{\text{opt}} = \Omega(i)A^{-1}H_2R_2^{-1}, \quad (26)$$

donde H_{22} es una matriz de rango completo $m_2 \times m_2$; luego, una posible selección de A_2 , T y B_2 es:

$$A_2 = \begin{bmatrix} I_{(n-m_2)} \\ H_2^{-1}H_{21} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ H_2^{-1}(I - H_{21}B_{21}) \end{bmatrix}$$

$$T = [I - B_{21}H_{21} \quad | \quad -B_{21}H_{22}]$$

Resolviendo para B_{21} , las ganancias A , B_2 y T pueden ser fácilmente obtenidas minimizando la traza $\text{tr} Q_L(i+1)$ con respecto a B_{21} y sustituyendo (26) y (27) en (24), lo cual conduce a

$$(B_{21})^{\text{opt}} = Q_L(i)A'F'H_2 + Q_L(i)A'H_2(i+1) + \\ + [I \quad 0]G_2G_2'H_2^{-1} [H_2G_2G_2'H_2]^{-1}. \quad (28)$$

Estas ganancias $(B_{21})^{\text{opt}}$ y $(B_{22})^{\text{opt}}$ especifican al observador estocástico óptimo.

Las ganancias del observador estocástico fueron obtenidas usando una ecuación de covarianza $n \times n$. Se obtienen ganancias equivalentes usando una ecuación de covarianza de orden reducido; se obtienen mayores beneficios de un estimador de orden reducido por que calculan matrices de orden reducido.

CAPITULO VI

"DISEÑO DE UN SERVOMECANISMO DC (2º ORDEN)."

Solo una minoria de los estados son usualmente medidos y tenemos que reconstruir los estados no medidos para aplicar la teoria de control óptimo. Hay dos casos:

- i. Alguna medición o mediciones de los estados pueden ser asumidas libres de errores y todas las entradas del sistema a ser medido aún cuando pueden ser entradas con perturbaciones aleatorias.
- ii. Todas las mediciones son miradas como sujetas a errores aleatorios y hay al menos una (medida o no) entrada estocástica al sistema.

Las variables de control son tratadas en ambos casos como entradas perfectamente medibles.

El caso (i) es bastante común y será considerado después.

basado en los resultados de Luenberger para sistemas continuos.

El caso (ii) es apropiado para el filtro de Kalman que será tratado primero, en ambos casos con respecto al control y estimación de parámetros. Finalmente, consideraremos al observador tipo estimador estocástico.

6.1. Introducción.

La solución al problema de diseño del regulador óptimo con variables de estado realimentadas, depende claramente de la disponibilidad de todos los estados del sistema lineal ya sea por directa medición o de algún tipo de esquema de reconstrucción de estado.

Kalman y Bucy han mostrado que con mediciones de las entradas y salidas en presencia de ruido, es posible la reconstrucción de los estados con tal de que el ruido entre las mediciones de la entrada y la salida no esté correlacionado.

Luenberger ha mostrado que es posible la reconstrucción de estado cuando tenemos mediciones libres de ruido (no estático) de las entradas y salidas del

sistema.

El desempeño de cualquiera de estos estimadores se degrada cuando hay una combinación de mediciones de entradas y salidas con y sin ruidos. Por consiguiente, el propósito es examinar métodos recientes para resolver este problema con el ahora denominado Observador Estocástico.

Son hechas comparaciones entre el funcionamiento del Estimador Estocástico, el Filtro de Kalman y el Observador de Luenberger cuando hay una combinación de mediciones de las entradas y salidas con y sin ruido.

Se considera un ejemplo realístico de un sistema lineal, discreto e invariante en el tiempo con resultados gráficos y numéricos.

6.2. Descripción del sistema.

Consideremos el sistema lineal discreto, e invariante en el tiempo de la forma:

$$x(i+1) = Fx(i) + Eu(i) + Dw(i), \quad (1)$$

con mediciones:

$$z(i) = Hx(i) + v(i), \quad (2)$$

donde:

$x(i)$ es un vector de estado ($n \times 1$).

$u(i)$ es un vector de entrada ($m \times 1$).

$w(i)$ es un vector ($m \times 1$) del ruido del proceso.

$z(i)$ es un vector de medición ($r \times 1$).

$v(i)$ es un vector ($r \times 1$) de ruido de medición.

F es una matriz ($n \times n$).

E es una matriz ($n \times m$).

D es una matriz ($m \times m$).

H es una matriz de observación ($r \times n$).

Si el ruido del proceso $w(i)$ y el ruido de medición $v(i)$ son vectores aleatorios no correlacionados con el vector de entrada $u(i)$ y con el vector de estado $x(i)$, se tiene que las covarianzas son dadas por:

$$\begin{aligned} \text{cov}[w(j)w(i)] &= Q(i) \text{ para todo } j = i, \\ &= 0 \text{ para } j \neq i \end{aligned}$$

$$\text{cov}[v(j)v(i)] = R(i) \text{ para todo } j = i,$$

$$= 0 \quad \text{para } j \neq 1.$$

$$\text{cov}[w(j)y(i)] = 0 \quad \text{para todo } j,i.$$

$$\text{cov}[x(j)w(i)] = 0 \quad \text{para todo } j,i. \quad (3)$$

El problema que deseamos considerar es: dadas las mediciones de la entrada y salida, $u(i)$ y $z(i)$ respectivamente, encontrar estimados de los estados cuando hay una combinación de señales de entrada y salida con y sin ruido.

El método del Filtro de Kalman, para el sistema descrito por (1) y (2), resulta en un estimador de estados que tiene la siguiente forma:

$$\hat{x}(i+1) = F\hat{x}(i) + Eu(i) + K(i+1)[z(i) - H(F\hat{x}(i) + Eu(i))], \quad (4)$$

donde la matriz de ganancia del filtro de Kalman es:

$$K(i) = P(i)H'R^{-1}(i). \quad (5)$$

Esta última ecuación muestra que en el caso de ausencia de ruido de mediciones ($R = 0$) no seríamos capaces de invertir la matriz de covarianza de la medi-

ción. De aquí que una solución para la ecuación del estimador de estados (4) no es obtenible (no existe). Por esto debemos exponer, que para usar el convencional filtro de Kalman como nuestro método de reconstrucción de estado debemos asegurar siempre que R sea definida positiva (invertible).

Para el caso especial de ruido teñido es obtenida una medición $y(i + 1)$, en base a la diferenciación indeseable de las mediciones $y(i)$, para obtener una matriz R no singular para un problema equivalente, cuando también hemos introducido un vector de estado aumentado.

Aunque hay caminos para evitar la diferenciación de las mediciones, tendremos el problema de no ser capaces de determinar las condiciones iniciales en el filtro de Kalman debido a que son directamente dependientes de la medición inicial, del vector de estado y de la matriz de covarianza.

En la presente implementación del filtro de Kalman deben ser hechas consideraciones con el fin de prevenir el problema de divergencia (debido al error de la modelación). Por ello una solución interesante para

este problema es la adición de un proceso de ruido ficticio al modelo del sistema. Llevando esta solución en mente, se podría postular que si realmente buscamos implementar el filtro de Kalman cuando las mediciones incluyen algunas señales libres de ruido, luego todo lo que hemos tenido que hacer es introducir algunas mediciones de ruido ficticias, para las mediciones libres de ruido. El único problema con este método (del cual está consciente el autor) es la selección del nivel apropiado de ruido ficticio requerido para asegurar que R no sea singular.

El método del Observador de Luenberger, supone que tenemos un sistema descrito por las ecuaciones (1) y (2) con la diferencia de que nuestras mediciones ahora son relativamente libres de ruido. La forma del estimador (de orden completo) podría ser:

$$\hat{x}(i+1) = (F + MH)\hat{x}(i) + Gu(i) + Mz(i).$$

Por supuesto un ahorro inmediato de camino al método determinístico es aquel que podríamos ahorrar nosotros mismos, el costo de un transductor barato, usando un observador de Luenberger de orden reducido. Hemos determinado que la ecuación en diferencias que

describe al vector de estado de orden reducido $\tilde{x}(i)$ es:

$$\tilde{x}(i+1) = TFA\tilde{x}(i) + TFBz(i) + TEu(i), \quad (6)$$

donde

$$\tilde{x}(i) = Tx(i), \quad (7)$$

y T son escogidos tal que:

$$\begin{bmatrix} I \\ - \\ H \end{bmatrix}^{-1} \bullet [A \quad B] \quad (8)$$

Luego, el observador toma la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{x}}(i+1) &= TFA\hat{\tilde{x}}(i) + TFBz(i) + TGu(i), \\ \hat{z}(i) &= A\hat{\tilde{x}}(i) + Bz(i), \end{aligned} \quad (9)$$

cuando el error del observador es dado por:

$$\tilde{e}(i+1) = (F - BHI)\tilde{e}(i), \quad (10)$$

Si consideramos un sistema descrito por (1) y (2) cuando hemos omitido convenientemente los vectores de ruido, tenemos:

$$x(i+1) = Fx(i) + Eu(i), \quad (11)$$

con mediciones:

$$z(i) = Hx(i). \quad (12)$$

Podemos especificar arbitrariamente los valores característicos de este observador de primer orden tal que $\hat{x}(i)$ se aproxime rápidamente a $x(i)$. Si consideramos ruido en la medición podemos verificar que la selección del valor propio no es solo dependiente de la razón a la cual deseamos que $\hat{x}(i)$ se aproxime a $x(i)$, sino también del nivel de ruido presente en las mediciones. Pero el observador de orden reducido es aún más susceptible al problema de ruido que un observador de orden completo, lo cual indica que no es un observador óptimo en presencia de ruido.

El método del Observador Estocástico. trata de incorporar las ventajas de los dos estimadores vistos anteriormente, en un estimador que esperanzadamente po-

dría ser mejor que cualquiera de ellos.

Es posible usar un observador de Luenberger para estimar el estado de un sistema estocástico, como ya hemos considerado, descrito y derivado antes tal estructura como un estimador; los detalles de tal estimador ya están bien presentados tal que no son repetidos aquí. Los resultados obtenidos nos muestran que para un sistema descrito por:

$$x(i+1) = Fx(i) + Eu(i) + Dw(i), \quad (13)$$

y una combinación de mediciones determinísticas y estocásticas:

$$z(i) = \begin{bmatrix} z_1(i) \\ z_2(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \dots \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ \dots \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(i) \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$v_1 \sim N(0, r_{11}). \quad (14)$$

El observador de estado de orden reducido es:

$$\hat{\gamma}(i+1) = (TFA)\hat{\gamma}(i) + (TFB_2)z_2(i) + (TD)w(i) \quad (15)$$

donde

$$\tilde{y}(i) = Tx(i) \quad (16)$$

y T es escogida tal que $\begin{bmatrix} T \\ H_2 \end{bmatrix}$ sea una matriz no singular, y definimos:

$$\begin{bmatrix} T \\ H_2 \end{bmatrix}^{-1} = [A \quad B_2]$$

luego el observador tiene la forma:

$$\hat{y}(i+1) = TFA\hat{y}(i) + TB_2z_2(i) + TB_1(z_1(i) - H_1x(i)), \quad (17)$$

$$\hat{x}(i) = A\hat{y}(i) + Bz_2(i), \quad (18)$$

donde el error del observador es dado por:

$$\tilde{y}(i+1) = (F - B_2H_2F - B_1H_1)\tilde{y}(i) + B_1v(i) - (I - B_2H_2)Dw(i). \quad (19)$$

Las ganancias óptimas $(B_1)^{opt}$ y $(B_2)^{opt}$ son obtenidas por minimización de la media cuadrática del error de la estimación. En otras palabras, escogemos B_1 , B_2 .

T y A tal que $\text{tr}(P(i+1))$ sea minimizada, donde la matriz P de covarianza del error satisface la ecuación en diferencias:

$$P(i+1) = (F - B_2 H_2 F - B_1 H_1) P(i) + P(i) (F - B_2 H_2 F - B_1 H_1)' + B_1 R_1(i) B_1' + (I - B_2 H_2) Q(i) (I - B_2 H_2)'$$
(20)

Luego las ganancias óptimas son:

$$(B_1)^{\text{opt}} = P(i) H_1' R_1^{-1}(i)$$

$$(B_2)^{\text{opt}} = [P(i) F' H_2' + Q(i) H_2'] [H_2 Q(i) H_2']^{-1}$$
(21)

Claramente, se nota ya el ahorro de usar el estimador estocástico sobre el observador de Luenberger o aun sobre el filtro de Kalman. Aun tenemos que agregar la covarianza $n \times n$ del error del observador, que es del mismo orden que el de la covarianza del error del filtro de Kalman. Sin embargo conseguimos un estimador estocástico de orden reducido.

Las ganancias óptimas $(B_1)^{\text{opt}}$ y $(B_2)^{\text{opt}}$ pueden ser obtenidas por la minimización de la traza de la ecuación de la covarianza del error de orden reducido.

las ganancias óptimas llegan a ser:

$$(TB_1)^{opt} = P(i)A^T H_1 R^{-1}(i)$$

$$(B_2)^{opt} = [P(i)A^T F^T H_2 + II + 0]Q(i)H_2^T [H_2^T Q(i)H_2 + D(i)H_2^T]^{-1}$$

(22)

Las ecuaciones (22) representan los resultados de usar un estimador de orden reducido obtenido de la solución de la ecuación de covarianza del error, de orden reducido; así tenemos verdaderos indicadores de las ventajas, sobre todo en la implementación del observador Estocástico. Así tenemos un observador que supuestamente cuida de una combinación de mediciones libres de ruido y de ruido correlacionado.

Notamos que cuando no hay proceso de ruido, el término $H_2^T Q(i)H_2$ de (20) y (21) no es inversible, tuvimos este problema antes con la matriz $R(i)$ para el filtro de Kalman. En este caso, podríamos escoger sólo la ganancia B_2 , tal que obtengamos la propiedad deseada de convergencia del error. Es claro que con el propósito de implementar este observador tenemos el mismo problema que tuvimos antes con el filtro de Kalman, es decir, los estimados iniciales dependen de la medición inicial de z_2 y no puede ser determinada.

a priori.

Finalmente, notamos que la estructura del estimador Estocástico es arreglada como tal, en ausencia de algún ruido relativo el estimador tendrá la estructura de un observador de Luenberger y en la presencia de ruido, v.gr.: todas las mediciones contaminadas, el estimador estocástico tendrá la estructura de un filtro de Kalman convencional.

6.3. Diseño, análisis y simulación digital.

Consideremos un motor de cd controlado por la armadura que utiliza una corriente de campo constante, mostrado en la figura 6.1:

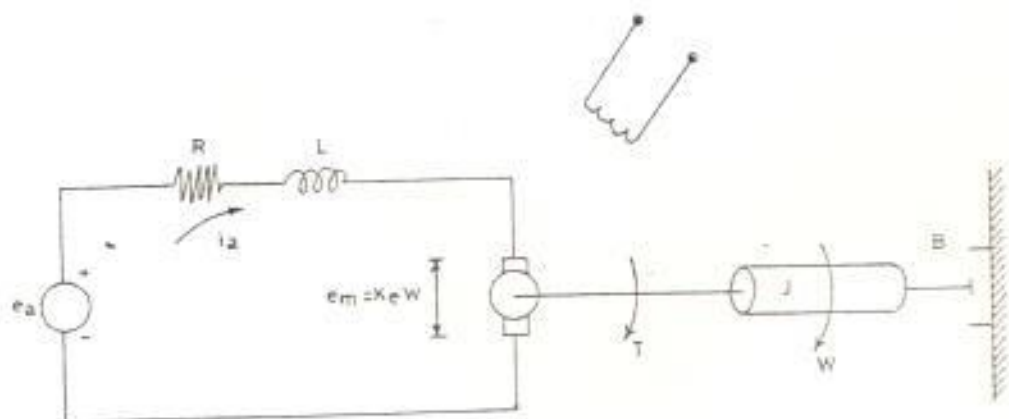


Figura 6.1 Servomecanismo dc controlado por armadura

donde:

$$e_s = 1 \text{ volt, } t \geq 0.$$

$$K_e = .199 \text{ volt/rad/seg.}$$

$$K_T = 26.9 \text{ oz-in/amp.}$$

$$L = 2.1 \text{ mhenrys.}$$

$$R = .43 \text{ ohms.}$$

$$f = .07 \text{ in-oz/rad/seg.}$$

$$J = .1 \text{ oz-in-sec}^2.$$

De la figura 6.1 obtenemos las ecuaciones del motor:

$$T(t) = K_T i_a(t), \quad e_a(t) = K_e \omega(t)$$

y las ecuaciones diferenciales:

$$e_s = i_a R + L \dot{i}_a(t) + K_e \omega(t),$$

$$J \dot{\omega}(t) = T(t) - f \omega(t) = K_T i_a(t) - f \omega(t),$$

(23)

y el diagrama de bloques mostrado en la figura (6.2):

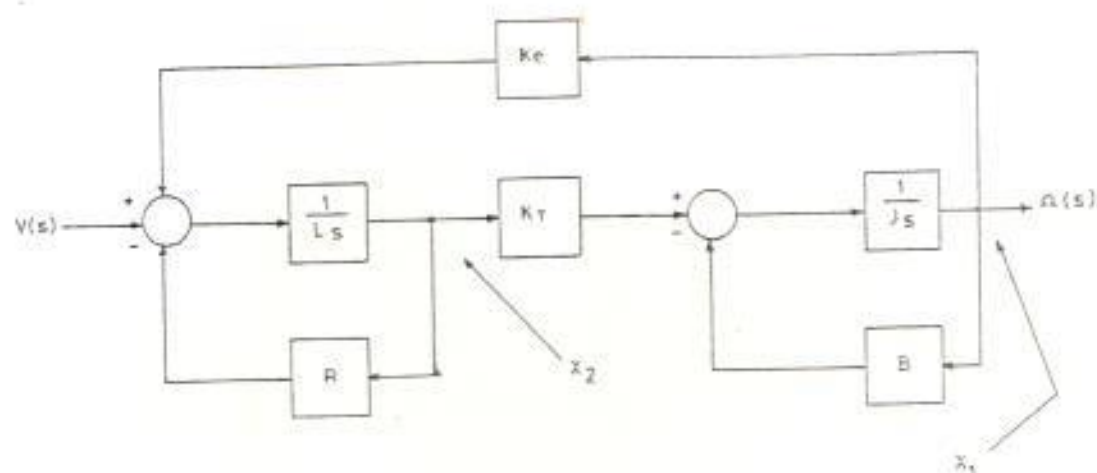


Figura 6.2 Diagrama de bloques del servo-
mecanismo dc de segundo orden

Ordenando las ecuaciones (23) obtenemos:

$$L\dot{i}_a(t) + R i_a(t) + K_e w(t) = e_a$$

$$J\dot{\omega}(t) + f\omega(t) = K_T i_a(t)$$

(24)

Reordenando las ecuaciones (24) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{i}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fJ^{-1} & K_f J^{-1} \\ -K_a L^{-1} & -RL^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1} \end{bmatrix} e_a \quad (25)$$

De las ecuaciones (24) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} LJ \\ - \end{bmatrix} \ddot{w}(t) + \begin{bmatrix} Lf + RJ \\ K_f \end{bmatrix} \dot{w}(t) + \begin{bmatrix} Rf \\ K_f \end{bmatrix} w(t) = e_a \quad (26)$$

Reemplazando valores en (26) obtenemos:

$$.00021\ddot{w}(t) + .04315\dot{w}(t) + 5.3832w(t) = 26.9, \quad (27)$$

donde:

$$\zeta = .642, \quad \omega_n = 122.8, \quad \omega_d = 160.1, \quad d = 26.9 \text{ y} \\ \tau = .0097.$$

Finalmente, resolviendo (27) obtenemos:

$$w(t) = 5[1.3038 \text{EXP}(-0.1027t) \text{SIN}(0.1228t + 4.016) + 1] \\ \text{[rad/mseg]}, \quad (28)$$

donde

$$w_{ss} = 5, \quad t_p = .0255, \quad w_p = 107.9, \quad t_s = .0091$$

$$t_{1\%} = .0185, \quad t_{.1\%} = .0292 \quad \text{y} \quad t_{.01\%} = .0362.$$

Reemplazando (28) en (23) obtenemos:

$$i_s(t) = 13.011[1.3038\text{EXP}(-.1027t)\text{SIN}(.1228t + 4.016) + 1] + 18.587(\text{EXP}(-.1027t)[.1228\text{COS}(.1228t + 4.016) - .1339\text{SIN}(.1228t + 4.016)] + 1)$$

[mA/mseg]. (29)

Con el objeto de escribir (25) en términos de las variables de estado, definamos un conjunto de variables de estado como (x_1, x_2) donde $x_1(t) = w(t)$ y $x_2(t) = i_s(t)$. Así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fJ^{-1} & K_sJ^{-1} \\ -K_sL^{-1} & -RL^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1} \end{bmatrix} E_s$$

(30)

Reemplazando valores en (30) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .7 & 269 \\ -94.76 & -204.76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 476.19 \end{bmatrix} u(t)$$

(31)

con ecuación de salida:

$$y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

con valores propios complejos conjugados $-102.381 \pm j 121.925$.

Ahora debemos escoger un intervalo de tiempo suficientemente pequeño T para el muestreo de tal forma que sea razonablemente exacta la aproximación de la discretización de (31). Debe escogerse un intervalo adecuado T de tal forma que sea estable la solución, el valor de T debería ser igual a un décimo de la constante de tiempo más pequeña del sistema. Cuando obtuvimos (27) determinamos que la constante de tiempo más pequeña del sistema es $t = .0097$ seg de donde $T = .001$ seg, tal que cualquier elemento de (31) sea menor o igual que T^{-1} .

Si discretizamos (31) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .98917 & .23709 \\ -.08533 & .80317 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .05977 \\ .42863 \end{bmatrix} u(i)$$

con ecuación de salida:

$$y(i) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix}$$

Como (32) y su salida son de la forma dada en (11) y (12), reemplazamos los valores correspondientes de F, E y H en A, B y C de las matrices de controlabilidad y observabilidad; obteniendo que los índices de controlabilidad y observabilidad son de orden dos, del mismo orden que el sistema que hemos definido y por tanto, este es completamente controlable y observable.

6.4. Discusiones.

Quizás la mejor manera de resumir la discusión acerca de los estimadores es en la forma de una tabla, por lo tanto, tenemos la siguiente tabla de las mayores ventajas y desventajas de cada uno de los estimadores de estado.

TABLA 1: Mayores ventajas y desventajas del filtro de

Kalman, del observador de Luenberger y del observador Estocástico.

Filtro de Kalman

- Estimador de orden completo (no es obtenible reducción de orden).
- No puede ser implementado con mediciones de salida libre de ruido (sin recurrir a alguna clase de aumento del vector de estado o diferenciación de las mediciones para introducir ruido en el sistema).
- Óptimo (a condición de que todas las mediciones de salida contengan ruido gaussiano).
- Requiere de la resolución de la ecuación de orden completo de la covarianza del error.
- Requiere de una apropiada selección de matrices de covarianza $Q(i)$ y $R(i)$.
- Susceptible a modelar disperejo (requiere un conocimiento exacto de la dinámica del planteamiento).

Observador de Luenberger

- Capaz de estimación de orden completo o reducido.
- Asume que las mediciones son hechas relativamente libres de ruido.
- El estimador de orden completo es menos susceptible al ruido que el estimador de orden reducido.
- La selección de los valores característicos que determinan las propiedades asintóticas de los estimadores de estado.
- El error es limitado por el nivel de ruido presente en las mediciones.

Observador Estocástico

- Estructurado para caer dentro de un filtro de Kalman de orden reducido o en el observador de Luenberger de orden reducido.
- Diseñado para tener realmente en cuenta la combinación de problemas de mediciones de salidas con y

sin ruido.

- También puede sufrir de disperejamiento (especialmente cuando el filtro cae en el filtro de Kalman convencional de orden reducido).
- Requiere que un juego de ganancias sea seleccionado usando un método alternativo cuando no hay ruido del proceso.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- 1 Las mayores ventajas y desventajas del observador Estocástico, comparado con el observador Luenberger y el Filtro de Kalman han sido presentadas.
- 2 En el gráfico # 5, figura (B.3-1), se muestra el estimado de la velocidad angular, notándose que la reducción de orden del observador de Luenberger incrementa el error de la estimación, haciéndose más notorio en el intervalo de tiempo anterior al tiempo de pico (tiempo en que la señal alcanza su valor pico).
- 3 En los gráficos # 9 y # 10, figuras (B.5-1) y (B.5-2), se observa que el estimado obtenido por el observador Estocástico, de la velocidad angular y de la corriente en su orden, presenta valores aceptables con una combinación de mediciones de las entradas y salidas con y sin ruido.
- 4 El caso de estimación de los estados cuando son una combinación de mediciones con y sin ruido fue considerado con el resultado final de que posiblemente el observador Estocástico representa el mejor compromiso para la re-

construcción del estado cuando es comparado con el Filtro de Kalman y el observador de Luenberger.

5. Se recomienda el uso de la teoría presentada para aplicarla a sistemas de rastreo de señales en sistemas de navegación.

BIBLIOGRAFIA

1. ANDERSON B.D.O. & MOORE, Linear Optimal Control, Prentice Hall, Electrical Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971, 295p.
2. D'AZZO J.J. & HOUPIS C.H., Análisis y Diseño de Sistemas Lineales de Control, convencional y moderno, segunda edición, McGraw - Hill Book Company, New York, 1975 - 1981.
3. CADZOW J.A. & MARTENS H.R., Discrete-Time and Computer Control Systems, Prentice Hall, Electrical Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
4. JAMSHIDI M., User's Guide Software for Multivariable Control Systems, Department of Electrical and Computer Engineering College of Engineering University of New Mexico Albuquerque, July 1983.
5. KWAKERNAAK H. & SIVAN R., Linear Optimal Control Systems, Wiley & Sons, Inc. New York, 1972.
6. NOTON M., Modern Control Engineering, University of Wa-

terloo, Ontario Canadá, Pergamon Press Inc. New York, pag
211 - 215.

- 7 PALM III W.J., Modelaje, Análisis y Control de Sistemas Dinámicos, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- 8 ROSCO J.S., Simulación Digital de Sistemas Físicos, Addison - Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts - Menlo Park, 1972.
- 9 URQUIZO J., Apuntes de Simulación Analógica y Digital, 1986.
- 10 VILLAFUERTE C., Apuntes de Control.