ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2019 - 2020	**PERIODO:** PRIMER TÉRMINO
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES **COORDINADOR:** Antonio Chong Escobar	**PROFESORES: P1&8:** Antonio Chong Escobar; **P2&14:** Elvis Aponte Valladares; **P3&7&17:** C. Mario Celleri Mujica; **P4&10&11&13:** Jennifer Avilés Monroy; **P09&15:** Hernando Sánchez Caicedo; **P12:** Liliana Rebeca Pérez; **P18:** Carlos Martín Barreiro.
EVALUACIÓN: SEGUNDA	**FECHA:** 26 AGOSTO 2019

COMPONENTE TEÓRICO	
TEMA 1	
TEMA 2	
TEMA 3	
TEMA 4	
TEMA 5	
TEMA 6	
TOTAL EXAMEN	
PROM. LECCIONES + PROM. PRUEBA DE LECTURA	
TOTAL (100 Puntos)	

COMPROMISO DE HONOR QUE DEBE LLENAR PARA QUE SU EXAMEN SEA CALIFICADO

Yo, ………...…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que NO puedo usar calculadora ni equipos electrónicos, que sólo puedo usar lápiz o esferográfico, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de esta evaluación y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte frontal del aula, junto con algún otro material que haya traído conmigo. Además, reconozco que no debo consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y que los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.
"Como estudiante de la ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ________________________________ **NÚMERO DE MATRÍCULA:** _______________________ **PARALELO:** _____

RESOLUCIÓN Y RÚBRICA

Tema 1 (5 Puntos: 1 punto cada literal)
Complete las siguientes frases.

a) La transformada inversa de Laplace de $B(S) = \frac{S+26}{(S+26)^2+8}$ es igual a $e^{-26t}cos(\sqrt{8}\,t)$.

b) La función $g(t) = \begin{cases} 2\ ; 0 \le t < 1 \\ 0\ ; 1 \le t < 3 \\ -4; \quad t \ge 3 \end{cases}$ expresada en términos de la función escalón unitario es igual a: $g(t) = 2(1-\mu_1(t)) - 4\mu_3(t)$ y su transformada de Laplace es igual a: $2\left(\frac{1}{S} - \frac{e^{-S}}{S}\right) - 4\frac{e^{-3S}}{S}$.

c) $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^6 dt = 6!$
Justificación:
Sea conoce que la transformada de Laplace de t^6 está dada por: $L[t^6] = \int_0^{+\infty} e^{-St}t^6 dt = \frac{6!}{S^7}; S > 0$.
Entonces para $S = 1$ se tiene que: $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^6 dt = 6!$

d) Si $q(t)$ es una función de orden exponencial y seccionalmente continua en el intervalo $[0,\infty)$ tal que su transformada de Laplace se denota por $L[q(t)]$ y además $q(t) = q(t+T)$, entonces:
$\int_0^{T} e^{-St}q(t)dt = (1-e^{-ST})L[q(t)]$.

e) Considere la ecuación diferencial: $ay''' + y'' + by' + y = f(x) + g(x)$, tal que $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $f(x), g(x)$ son polinomios de grado 2 y grado 1 respectivamente. Usando el método de los coeficientes indeterminados y sin hacer uso del principio de superposición, la solución particular de la ecuación se plantea de la forma: $Y_p = x^S(Ax^2 + Bx + C)$, tal que:
S es el menor entero no negativo con el cual cada término de la solución particular es linealmente independiente a cada término de la solución complementaria.

Tema 2 (9 Puntos)

Determine la solución general de la ecuación diferencial: $y''(x) + y(x) = tan(x)$; $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

No utilice transformada de Laplace y recuerde que: $sec(x) = \frac{sec^2(x)+sec(x)\,tan\,(x)}{sec(x)+tan\,(x)}$.

Desarrollo:

Se halla la solución complementaria $y_c(x)$ resolviendo la ecuación homogénea: $y''(x) + y(x) = 0$.

Se plantea la solución de la forma: $y(x) = e^{rx}$, con lo cual: $y'(x) = re^{rx}$ y $y''(x) = r^2e^{rx}$.

Sustituyendo en la ecuación homogénea se tiene:

$$r^2e^{rx} + e^{rx} = 0 \quad \to \quad e^{rx}(r^2+1) = 0 \quad \to r^2 + 1 = 0 \quad \to \quad r = 0 \pm i$$

Así, $y_c(x) = c_1e^{0x}cos(x) + c_2e^{0x}sen\,(x)$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$y_c(x) = c_1cos(x) + c_2sen(x)$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

A continuación, se halla una solución particular para la ecuación no homogénea, cuya forma canónica es:

$y''(x) + y(x) = tan(x)$, de donde se define la función $g(x) = tan(x)$.

Usando el método de variación de parámetros, se plantea la solución particular de la forma:

$$y_p(x) = v_1y_1(x) + v_2y_2(x),$$

donde y_1 y y_2 son las soluciones linealmente independientes de la solución complementaria y tal que se satisfaga el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v_1'y_1(x) + v_2'y_2(x) = 0 \\ v_1'y_1'(x) + v_2'y_2'(x) = g(x) \end{cases}, \text{ esto es: } \begin{bmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ tan(x) \end{bmatrix}.$$

El Wronskiano, $W(y_1, y_2)$, está dado por: $\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix} = cos^2(x) + sen^2(x) = 1$.

Las soluciones del sistema son:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(x) \\ tan(x) & cos(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = -tan(x)sen(x) = -\frac{sen^2(x)}{cos(x)}$$

$$\to v_1 = -\int \frac{1-cos^2(x)}{cos(x)}dx = -\int(sec(x) - cos(x))dx = -ln|sec(x) + tan(x)| + sen(x) + k_1;\ k_1 \in \mathbb{R}.$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} cos(x) & 0 \\ -sen(x) & tan(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = cos(x)\,tan(x) = sen(x)$$

$$\to v_2 = \int sen(x)\,dx = -cos(x) + k_2;\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

Con los resultados obtenidos y anulando las constantes k_1 y k_2 se obtiene:

$$y_p(x) = \big(-ln|sec(x) + tan(x)| + sen(x)\big)cos(x) - cos(x)\,sen(x) = -cos(x)\,ln|sec(x) + tan(x)|$$

Por lo tanto, la solución general está dada por:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = c_1cos(x) + c_2sen(x) - cos(x)\,ln|sec(x) + tan(x)|;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

Tema 3 (9 Puntos)

Halle la solución general de la ecuación diferencial: $y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$, usando serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$. Muestre al menos los cinco primeros términos diferentes de cero de la solución general.

<u>Desarrollo:</u>

Sean $P(x) = 1$; $Q(x) = -2x$; $R(x) = 2$ los coeficientes de la ecuación diferencial. Dado que $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son polinomios y no hay factor que sea común para ellos, los valores x_0 que satisfacen $P(x_0) \neq 0$ se denominan puntos ordinarios de la ecuación diferencial. Entonces, $x_0 = 0$ es un punto ordinario.

Entonces, se plantea una solución de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, esto es, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con lo cual:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Reemplazando estas series en la ecuación se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

Se realiza el siguiente cambio de variable a la primera serie para que el exponente de x sea el mismo en todas las series:

$n - 2 = m \rightarrow n = m + 2$. Por lo tanto, la primera serie queda de la forma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m$$

Aplicando a este resultado el cambio de variable $m = n$ se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Sustituyendo lo obtenido la ecuación queda de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

Desarrollando términos iniciales para que todas las series inicien en el mismo valor:

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

Agrupando términos semejantes, se tiene:

$$(2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n + 2a_n] x^n$$

$$(2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (2 - 2n) a_n] x^n$$

Igualando términos semejantes se obtiene:

- $2a_2 + 2a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = -a_0$
- $(n+2)(n+1) a_{n+2} + (2 - 2n) a_n = 0$; $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+2} = \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)} a_n \text{ ; } n \in \mathbb{N}$$

Generando coeficientes iniciales tal que $a_0,\ a_1 \in \mathbb{R}$ se obtiene:

$n = 1$: $a_3 = \frac{2(0)}{(3)(2)} a_1 = 0$; $n = 2$: $a_4 = \frac{2(1)}{(4)(3)} a_2 = -\frac{1}{6} a_0$

$n = 3$: $a_5 = \frac{2(2)}{(5)(4)} a_3 = 0$; $n = 4$: $a_6 = \frac{2(3)}{(6)(5)} a_4 = -\frac{1}{30} a_0$

Por lo tanto, la solución general está dada por:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \cdots$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{6} a_0 x^4 - \frac{1}{30} a_0 x^6 + \cdots$$

$$y(x) = a_0 \left(1 - x^2 - \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{30} x^6 + \cdots\right) + a_1 x \text{ ; } a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

Tema 4
Literal a (5 Puntos)
Usando teoremas de la transformada de Laplace, halle la transformada de:

$$p(t) = sen(wt) - wt\,cos(wt), \text{ tal que } w \in \mathbb{R}^+.$$

Desarrollo:
Aplicando linealidad:

$$L[p(t)] = L[sen(wt)] - wL[t\,cos(wt)]$$

Aplicando el teorema de la derivada de una transformada y sustituyendo la transformada de $sen(wt)$:

$$\begin{aligned} L[p(t)] &= L[sen(wt)] - wL[t\,cos(wt)] \\ &= \frac{w}{S^2+w^2} - w\left[-\frac{d}{dS}(L[\cos(wt)])\right] \\ &= \frac{w}{S^2+w^2} + w\left[\frac{d}{dS}\left(\frac{S}{S^2+w^2}\right)\right] \\ &= \frac{w}{S^2+w^2} + w\left[\frac{S^2+w^2-S(2S)}{(S^2+w^2)^2}\right] \\ &= \frac{w}{S^2+w^2} + \frac{w(w^2-S^2)}{(S^2+w^2)^2} \\ &= \frac{w(S^2+w^2)+w(w^2-S^2)}{(S^2+w^2)^2} \\ &= \frac{wS^2+w^3+w^3-wS^2}{(S^2+w^2)^2} \end{aligned}$$

$$L[p(t)] = \frac{2w^3}{(S^2+w^2)^2}$$

Literal b (4 Puntos)
Haciendo uso del teorema de la transformada de Laplace de la convolución de forma inversa, halle la transformada inversa de:

$$A(S) = \frac{1}{S^2(S+2)}$$

Desarrollo:
Aplicando el teorema de la transformada de la integral de convolución de forma inversa se tiene:

$$a(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{S^2(S+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{S^2}\frac{1}{(S+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] * L^{-1}\left[\frac{1}{S+2}\right] = t * e^{-2t}$$

Resolviendo el producto de convolución se obtiene:

$$a(t) = \int_0^t (t-x)e^{-2x}dx$$

$$a(t) = t\int_0^t e^{-2x}dx - \int_0^t xe^{-2x}dx;$$

Resolviendo la 2da antiderivada: $u = x \to du = dx$; $dv = e^{-2x}dx \to v = \frac{e^{-2x}}{-2}$ se tiene:

$$\int xe^{-2x}dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2}dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}$$

Entonces:

$$a(t) = t\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^t + \left[\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^t$$

$$a(t) = t\left[\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{te^{-2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4}\right]$$

$$a(t) = \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4}$$

Tema 5 (9 Puntos)

La carretera llamada "Paso del Gois" en Francia, con una longitud aproximada de 4.5 [km], une la isla de Noirmoutier con el continente. Esta carretera es considerada una de las más peligrosas del mundo, debido a que 2 veces al día desaparece bajo el mar, llegando a estar cubierta hasta por 4 metros de agua. Si se considera que el día de mañana la altura $y(t)$ de agua (en decímetros) en cualquiera de los puntos de dicha carretera desde el medio día ($t = 0$ horas) hasta las $18h00$ será igual a la diferencia entre la cuarta derivada de $y(t)$ y la función $\delta(t-1)$, es decir, será igual a: $y^{(4)}(t) - \delta(t-1)$, y además se considera que $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, entonces usando la transformada de Laplace, determine:

a) la altura $y(t)$ de agua para cualquier tiempo t entre las $12h00$ y $18h00$ del día de mañana.

b) si es aconsejable cruzar la carretera a las $t = (\pi + 1)$ [horas] del día de mañana sabiendo que sólo se debe cruzar si la altura del agua $y(t)$ es a lo mucho de 1.5 [dm] (Use $senh(\pi) \approx 11.5$).

Desarrollo del literal a:

El modelo por resolver es:

$y(t) = y^{(4)}(t) - \delta(t-1)$, tal que:

$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

Aplicando la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad se tiene:

$L[y(t)] = L[y^{(4)}(t)] - L[\delta(t-1)]$ donde:

- $L\left[y^{(4)}(t)\right] = S^4 L[y(t)] - S^3 y(0) - S^2 y'(0) - S y''(0) - y'''(0) = S^4 L[y(t)]$
- $L[\delta(t-1)] = e^{-S}$

Sustituyendo las transformadas se tiene:

$$L[y(t)] = S^4 L[y(t)] - e^{-S} \quad \rightarrow \quad (1 - S^4) L[y(t)] = -e^{-S} \quad \rightarrow \quad L[y(t)] = \frac{e^{-S}}{S^4 - 1}$$

Por lo tanto, $y(t) = L^{-1}\left[\frac{e^{-S}}{S^4-1}\right]$

Realizando descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{1}{S^4-1} = \frac{1}{(S^2-1)(S^2+1)} = \frac{A}{S^2-1} + \frac{B}{S^2+1} \quad \rightarrow \quad 1 = A(S^2+1) + B(S^2-1) \quad \rightarrow \quad 1 = (A+B)S^2 + (A-B)$$

$$A + B = 0 \ ; \quad A - B = 1$$
$$A = -B \quad \rightarrow \quad -2B = 1$$
$$A = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

Entonces:

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{e^{-S}}{S^2-1} - \frac{1}{2}\frac{e^{-S}}{S^2+1}\right]$$
$$y(t) = \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{e^{-S}}{S^2-1}\right] - \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{e^{-S}}{S^2+1}\right]$$
$$y(t) = \frac{1}{2} u_1(t) senh(t-1) - \frac{1}{2} u_1(t) sen(t-1) \ [dm]$$

Desarrollo del literal b:

De acuerdo con el modelo matemático utilizado, el día de mañana la altura $y(t)$ de agua en cualquiera de los puntos de dicha carretera a las $t = (\pi + 1)$ [horas] será igual a:

$$y(\pi+1) = \frac{1}{2} u_1(\pi+1) senh(\pi) - \frac{1}{2} u_1(\pi+1) sen(\pi)$$
$$y(\pi+1) = \frac{1}{2} senh(\pi) \approx \frac{1}{2}(11.5) = 5.75 \ [dm]$$

Por lo tanto, no es aconsejable cruzar la carretera a las $t = (\pi + 1)$ [horas] dado que la altura del agua será mayor que 1.5 [dm].

Tema 6 (9 Puntos)

Usando valores y vectores propios, encuentre la solución general del sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 9x_1(t) + 8x_2(t) \\ x_2'(t) = -3x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases}$$

Desarrollo:

De forma matricial, el sistema de ecuaciones está dado por: $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)}$.

Se plantea la solución vectorial $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varepsilon} e^{rt}$ tal que r es un valor propio de A y $\boldsymbol{\varepsilon}$ un vector propio asociado.

Se halla los valores propios, r, de la matriz de coeficientes, A, resolviendo la ecuación:

$$det(A - rI) = 0 \ \rightarrow \ \begin{vmatrix} 9-r & 8 \\ -3 & -5-r \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ (r-9)(r+5) + 24 = 0 \ \rightarrow \ r^2 - 4r - 21 = 0$$
$$\rightarrow \ (r-7)(r+3) = 0 \ \rightarrow \ r_1 = 7 \text{ y } r_2 = -3.$$

Se halla el espacio característico y el vector propio asociado a cada valor propio, resolviendo el sistema $(A - rI)\beta_r = \mathbf{0}$, donde el espacio característico β_r se lo define de la forma $\beta_r = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

Para $r_1 = 7$: se resuelve el sistema $(A - r_1 I)\beta_{r_1} = \mathbf{0}$, es decir, $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ -3 & -12 & 0 \end{array}\right)$.

Sumando a la fila 1 multiplicada por 3 la fila 2 multiplicada por 2 y ubicando el resultado en la fila 2 se tiene: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Al eliminarse la última fila se tiene una variable libre, con lo cual es válido considerar $b \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con la fila 1: $2a + 8b = 0$, entonces $a = -4b$.

Así, $\beta_{r_1} = \left\{\begin{pmatrix} -4b \\ b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\}$, con lo cual $\boldsymbol{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $r_2 = -3$: se resuelve el sistema $(A - r_2 I)\beta_{r_2} = \mathbf{0}$, es decir, $\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 8 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 4 y ubicando el resultado en la fila 2 se tiene: $\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Al eliminarse la última fila se tiene una variable libre, con lo cual es válido considerar $b \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con la fila 1: $12a + 8b = 0$, entonces $a = -\frac{2}{3}b$.

Así, $\beta_{r_2} = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}b \\ b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\}$, con lo cual $\boldsymbol{\varepsilon_2} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la solución general del sistema está dada por:

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\varepsilon_1} e^{r_1 t} + c_2 \boldsymbol{\varepsilon_2} e^{r_2 t} \ ; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Las componentes de la solución general del sistema están dadas por:

$$x_1(t) = -4c_1 e^{7t} - \frac{2}{3} c_2 e^{-3t}$$
$$x_2(t) = c_1 e^{7t} + c_2 e^{-3t} \ ; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

Tema 1 (5 Puntos)

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje (para cada literal)**	
	Inicial	**Excelencia**
Completar frases conceptuales relacionadas a los capítulos del segundo parcial.	Deja el espacio en blanco o completa de forma incorrecta.	Completa la frase conceptual de forma correcta (se debe presentar una justificación de la respuesta donde el profesor considere necesario).
Puntaje	0	1

Tema 2 (9 Puntos)

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
Determinar la solución general de una EDO lineal no homogénea, usando el método de variación de parámetros para hallar una solución particular.	Halla la solución complementaria, **pero no** plantea la forma de la solución particular.	Halla la solución complementaria y plantea la forma de la solución particular con el sistema que debe satisfacer, **pero no** halla dicha solución particular.	Halla la solución complementaria, plantea la forma de la solución particular con el sistema que debe satisfacer y halla dicha solución particular, **pero no** presenta la solución general.	Halla la solución complementaria, plantea la forma de la solución particular con el sistema que debe satisfacer, halla dicha solución particular y presenta la solución general.
Puntaje	[0 , 3]	(3 , 5]	(5 , 8]	(8 , 9]

Tema 3 (9 Puntos)

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
Obtener la solución general de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal usando series de potencias.	Justifica por qué $x_0 = 0$ es un punto ordinario de la EDO e indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias, **pero no** sustituye dicha solución planteada en la EDO.	Justifica por qué $x_0 = 0$ es un punto ordinario de la EDO, indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias, sustituye dicha solución planteada en la EDO y obtiene la ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie, **pero no** genera los 5 primeros términos diferentes de cero.	Justifica por qué $x_0 = 0$ es un punto ordinario de la EDO, indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias, sustituye dicha solución planteada en la EDO, obtiene la ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie y genera los 5 primeros términos diferentes de cero, **pero no** muestra la solución general.	Justifica por qué $x_0 = 0$ es un punto ordinario de la EDO, indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias, sustituye dicha solución planteada en la EDO, obtiene la ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie, genera los 5 primeros términos diferentes de cero y muestra la solución general.
Puntaje	[0 , 2]	(2 , 5]	(5 , 8]	(8 , 9]

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

Tema 4 literal a (5 Puntos)

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**			
Calcular la trasformada de Laplace de una función, a partir de la lista básica de transformadas y aplicando teoremas.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
	Aplica la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad, **pero no** aplica teoremas para obtener la transformada que se pide.	Aplica la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad y obtiene la transformada de $sen(wt)$, **pero no** obtiene la transformada de $wt\,cos(wt)$.	Aplica la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad, obtiene la transformada de $sen(wt)$ y obtiene la transformada de $wt\,cos(wt)$, **pero no** presenta la respuesta final.	Aplica la transformada de Laplace y su propiedad de linealidad, obtiene la transformada de $sen(wt)$, obtiene la transformada de $wt\,cos(wt)$ y presenta la respuesta final.
Puntaje	[0 , 1]	(1 , 2]	(2 , 4]	(4 , 5]

Tema 4 literal b (4 Puntos)

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**			
Determinar la transformada inversa de Laplace de una función, utilizando la transformada de la integral de convolución de forma inversa.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
	Aplica la transformada inversa, **pero no** identifica las funciones de t entre las que se debe realizar la integral de convolución.	Aplica la transformada inversa e identifica las funciones de t entre las que se debe realizar la integral de convolución, **pero no** plantea la integral de convolución.	Aplica la transformada inversa, identifica las funciones de t entre las que se debe realizar la integral de convolución y plantea dicha integral, **pero no** halla la antiderivada correspondiente.	Aplica la transformada inversa, identifica las funciones de t entre las que se debe realizar la integral de convolución y plantea y halla dicha integral.
Puntaje	[0 , 1]	(1 , 2]	(2 , 3]	(3 , 4]

Tema 5 (9 Puntos)

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**			
Determinar la solución de un problema de aplicación, usando la transformada de Laplace para resolver el respectivo problema de valor inicial (PVI).	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
	Plantea el PVI, aplica la transformada de Laplace a ambos lados de la EDO y aplica la propiedad de linealidad, **pero no** halla las transformadas planteadas.	Plantea el PVI, aplica la transformada de Laplace a ambos lados de la EDO, aplica la propiedad de linealidad y halla las transformadas planteadas obteniendo una expresión algebraica con la transformada de $y(t)$, **pero no** halla la solución del PVI.	Plantea el PVI, aplica la transformada de Laplace a ambos lados de la EDO, aplica la propiedad de linealidad, halla las transformadas planteadas obteniendo una expresión algebraica con la transformada de $y(t)$ y halla la solución del PVI, **pero no** determina si es aconsejable cruzar la carretera en el tiempo indicado.	Plantea el PVI, aplica la transformada de Laplace a ambos lados de la EDO, aplica la propiedad de linealidad, halla las transformadas planteadas obteniendo una expresión algebraica con la transformada de $y(t)$, halla la solución del PVI y determina si es aconsejable cruzar la carretera en el tiempo indicado.
Puntaje	[0 , 2]	(2 , 4]	(4 , 7]	(7, 9]

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D, (achong@espol.edu.ec)

Tema 6 (9 Puntos)

Capacidades por evaluar	**Nivel de aprendizaje**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelencia**
Determinar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, usando el método de los valores y vectores propios.	Plantea la forma de la solución, **pero no** halla los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema.	Plantea la forma de la solución, halla los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema y plantea la forma de los espacios característicos de cada valor propio, **pero no** halla los respectivos vectores propios.	Plantea la forma de la solución, halla los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema, plantea la forma de los espacios característicos de cada valor propio y halla los respectivos vectores propios, **pero no** presenta la solución general del sistema.	Plantea la forma de la solución, halla los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema, plantea la forma de los espacios característicos de cada valor propio, halla los respectivos vectores propios y presenta la solución general del sistema.
Puntaje	[0 , 1]	(1 , 4]	(4 , 8]	(8, 9]