Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal

Examen final

7 de septiembre de 2020

1. (10 puntos) Sea $T\colon \mathbb{M}_{2\cdot 2} \to \mathbb{M}_{2\cdot 2}$ la función definida por

$$T(A) = AB,$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) Determine $\mathcal{N}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$.

Solución. *a*) Este es un hecho general y es consecuencia de la propiedad distributiva de la multiplicaición de matrices:

$$T(A+C) = (A+C)B = AB + CB = T(A) + T(C);$$
$$T(\alpha A) = (\alpha A)B = \alpha AB = \alpha T(A).$$

Demostrar que T preserva la suma de matrices	1-2 puntos
Demostrar que T es homogénea	1-2 puntos

b) Como $\det B = 2$, se tiene que B es invertible. Por lo tanto, si $AB = 0$, entonces $A = 0B^{-1} = 0$. En consecuencia $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ y T es inyectiva. Como T es un operador lineal en un espacio de dimensión finita, se sigue que T es sobreyectiva, i.e., $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{M}_{2\cdot 2}$.

Demostrar que T es inyectiva y por tanto $\mathcal{N}(T) = 0$	1-2
Demostrar que T es sobreyectiva y por lo tanto $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{M}_{2\cdot 2}$	1-3 puntos

$\square$

2. (10 puntos) Sea $T\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(a + bx) = (5a - 7b, 3b - 2a)$$

a) Demuestre que T es un isomorfismo.

b) Escriba las imágenes, bajo T, de los vectores de la base $\mathcal{B}_1 = \{1 - x, 4 + x\}$ de $\mathbb{P}_1$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Encuentre la regla de correspondencia de T^{-1}.

3. (10 puntos) Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - 5y' + 6y = \cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Solución. La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea asociada es $r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$, de donde obtenemos las raíces características $r = 3$ y $r = 2$. Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y_h(t) = \alpha_1 e^{3t} + \alpha_2 e^{2t}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Para resolver la ecuación diferencial necesitamos hallar una solución particular. Probemos con una solución de la forma $y_p(t) = A \operatorname{sen} t + B \cos t$. La primera y segunda derivada de esta función es $y_p'(t) = A\cos t - B \operatorname{sen} t$ y $y_p''(t) = -A \operatorname{sen} t - B\cos t$, respectivamente. Sustituyendo y_p, y_p' y y_p'' en la ecuación diferencial dada obtenemos

$$(-A \operatorname{sen} t - B\cos t) - 5(A\cos t - B \operatorname{sen} t) + 6(A \operatorname{sen} t + B\cos t) = \cos t,$$

que al simplificar nos da

$$(5A + 5B)\operatorname{sen} t + (-5A + 5B)\cos t = \cos t.$$

De aquí se deduce que $A = -1/10$ y $B = 1/10$ y que, en consecuencia, $y_p(t) = -\frac{1}{10}\operatorname{sen} t + \frac{1}{10}\cos t$. Tenemos entonces que la solución general tiene la forma

$$y(t) = \alpha_1 e^{3t} + \alpha_2 e^{2t} - \frac{1}{10}\operatorname{sen} t + \frac{1}{10}\cos t, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, hallemos constantes α_1, α_2 de manera que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Por un lado,

$$y(0) = 1 \implies \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{10} = 1;$$

por otro,

$$y'(0) = 0 \implies 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \frac{1}{10} = 0.$$

Al resolver este sistema nos queda que $\alpha_1 = -\frac{17}{10}$ y $\alpha_2 = \frac{13}{5}$. Por lo tanto, la solución al problema de valor inicial planteado es

$$y(t) = -\frac{17}{10}e^{3t} + \frac{13}{5}e^{2t} - \frac{1}{10}\operatorname{sen} t + \frac{1}{10}\cos t.$$

Hallar la solución general al sistema homogéneo asociado	1-2 puntos
Hallar una solución particular	1-5 puntos
Expresar la solución general de la ecuación	1 punto
Hallar la solución al PVI dado	1-2 puntos

$\square$

4. (10 puntos) Resuelva el sistema diferencial lineal

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 12y_2 - 14y_3, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - 3y_3, \quad y_2(0) = 2 \\ y_3' &= y_1 + y_2 - 2y_3, \quad y_3(0) = 1 \end{aligned}$$

Solución. La matriz asociada a este sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = 25 - 25\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 = -(-1+\lambda)(5i-\lambda)(-5i-\lambda).$$

Tenemos entonces tres valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5i$ y $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -5i$. El espacio propio asociado a λ_1 es $E_{\lambda_1} = \text{gen}(25,-7,6)$, en cuanto que el espacio propio asociado a λ_2 es $E_{\lambda_2} = \text{gen}\{(1+5i,1,1)\}$. De aquí obtenemos la solución real $\mathbf{y}_1(t) = e^t(25,-7,6)$ y la «solución compleja» $\mathbf{z}(t) = e^{5it}(1+5i,1,1)$. Notemos que

$$\begin{aligned}
&e^{5it}(1+5i,1,1) = (\cos 5t + i\,\text{sen}\,5t)(1+5i,1,1)\\
&= (\cos 5t + i\,\text{sen}\,5t + 5i\cos 5t - 5\,\text{sen}\,5t, \cos 5t + i\,\text{sen}\,5t, \cos 5t + i\,\text{sen}\,5t)\\
&= (\cos 5t - 5\,\text{sen}\,5t, \cos 5t, \cos 5t) + i(\text{sen}\,5t + 5\cos 5t, \text{sen}\,5t, \text{sen}\,5t).
\end{aligned}$$

En consecuencia, obtenemos 2 nuevas soluciones $\mathbf{y}_2(t) = (\cos 5t - 5\,\text{sen}\,5t, \cos 5t, \cos 5t)$ y $\mathbf{y}_3(t) = (\text{sen}\,5t + 5\cos 5t, \text{sen}\,5t, \text{sen}\,5t)$. La solución general de este sistema es entonces

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t) + \alpha_3\mathbf{y}_1(t),\ \ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Para resolver el problema de valor inicial dado, calculamos los valores $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ que cumplan que

$$\begin{aligned}
&(1,2,1) = \mathbf{y}(0) = \alpha_1\mathbf{y}_1(0) + \alpha_2\mathbf{y}_2(0) + \alpha_1\mathbf{y}_2(0)\\
&= \alpha_1(25,-7,6) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(5,0,0) = (25\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, -7\alpha_1 + \alpha_2, 6\alpha_1 + \alpha_2).
\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones que esta igualdad genera, obtenemos $\alpha_1 = -\frac{1}{13}$, $\alpha_2 = \frac{19}{13}$ y $\alpha_3 = \frac{19}{65}$. Por lo tanto, la solución al sistema dado es

$$\mathbf{y}(t) = -\frac{1}{13}e^t(25,-7,6) + \frac{19}{13}(\cos 5t - 5\,\text{sen}\,5t, \cos 5t, \cos 5t) + \frac{19}{65}(\text{sen}\,5t + 5\cos 5t, \text{sen}\,5t, \text{sen}\,5t)$$

Calcular el polinomio característico y hallar los valores propios	1-2 punto
Calcular los espacios propios asociados	1-2 puntos
Hallar la solución asociada al valor propio real	1 punto
Hallar las soluciones asociadas al valor propio complejo	1-2 puntos
Hallar la solución general del sistema	1-2 puntos
Hallar la solución al PVI planteado	1 puntos

☐

5. (10 puntos) Usando el hecho general que $\mathcal{L}\{\int_0^t y(u)\,du\} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{s}$, resuelva, mediante el método de las transformadas de Laplace, la ecuación íntegro-diferencial

$$y'(t) + 6y(t) + \int_0^t y(u)\,du = t.$$

Tome como dato inicial $y(0) = 2$.