Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal

Examen final

7 de septiembre de 2020

1. (10 puntos) Sea $T\colon \mathbb{M}_{2\cdot 2} \to \mathbb{M}_{2\cdot 2}$ la función definida por
$$T(A) = AB,$$
donde
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Demuestre que T es una transformación lineal.
   b) Determine $\mathcal{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

2. (10 puntos) Sea $T\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por
$$T(a+bx) = (5a-7b, 3b-2a)$$
   a) Demuestre que T es un isomorfismo.
   b) Escriba las imágenes, bajo T, de los vectores de la base $\mathcal{B}_1 = \{1-x, 4+x\}$ de $\mathbb{P}_1$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}_2 = \{(1,2), (-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   c) Encuentre la regla de correspondencia de T^{-1}.

3. (10 puntos) Resuelva el problema de valor inicial
$$y'' - 5y' + 6y = \cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

4. (10 puntos) Resuelva el sistema diferencial lineal
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 12y_2 - 14y_3, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - 3y_3, \quad y_2(0) = 2 \\ y_3' &= y_1 + y_2 - 2y_3, \quad y_3(0) = 1 \end{aligned}$$

5. (10 puntos) Usando el hecho general que $\mathcal{L}\{\int_0^t y(u)\,du\} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{s}$, resuelva, mediante el método de las transformadas de Laplace, la ecuación íntegro-diferencial
$$y'(t) + 6y(t) + \int_0^t y(u)\,du = t.$$
Tome como dato inicial $y(0) = 2$.