FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2020	**PERIODO:** SEGUNDO TERMINO
MATERIA: Álgebra Lineal	**PROFESORES:** Garcia A, Laveglia F, Martinez M, Ramirez J, Valdiviezo J, Varas A, Vielma J.
EVALUACIÓN: TERCERA	**FECHA:** 11/02/2021

COMPROMISO DE HONOR

"Yo declaro que he sido informado y conozco las normas disciplinarias que rigen a la ESPOL, en particular el Código de Ética y el reglamento de Disciplina.

Al aceptar este compromiso de honor, reconozco y estoy consciente de que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de forma individual; que puedo comunicarme únicamente con la persona responsable de la recepción de la evaluación; y, que al realizar esta evaluación no navegaré en otras páginas que no sean las páginas de la sidweb/plataforma de la evaluación; que no recibiré ayuda ni presencial ni virtual; que no haré consultas en libros, notas, ni apuntes adicionales u otras fuentes indebidas o no autorizadas por el evaluador; ni usaré otros dispositivos electrónicos o de comunicación no autorizados.

Además, me comprometo a mantener encendida la cámara durante todo el tiempo de ejecución de la evaluación, y en caso de que el profesor lo requiera, tomar una foto de las páginas en las que he escrito el desarrollo de los temas y subirlas a la Sidweb/plataforma de la evaluación, como evidencia del trabajo realizado, estando consciente de que el no subirlo, anulará mi evaluación.

Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leido y aceptado la declaración anterior y me comprometo a seguir fielmente las instrucciones que se indican para la realización de la presente evaluación (incluyendo los requisitos de uso de la tecnología).

Estoy consciente de que el incumplimiento del presente compromiso, anulará automáticamente mi evaluación y podría ser objeto del inicio de un proceso disciplinario".

Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leído y estar de acuerdo con la declaración anterior.

"Como estudiante de la ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

<u>TEMA 1</u>: (4 puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo a su nivel de veracidad en una de las siguientes tres categorías:

S: Siempre verdadera

A: A veces verdadera

N: Nunca verdadera

1. Si W y H son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V entonces $W \cup H$ es un subespacio vectorial de V

2. Si W y H son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V y $W \cap H = H$ entonces $W \cup H$ es un subespacio vectorial de V

3. Si W y H son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V, $W \cap H \neq H$ y $W \cap H \neq W$ entonces $W \cup H$ es un subespacio vectorial de V

<u>TEMA 2</u>: (4 puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo a su nivel de veracidad en una de las siguientes tres categorías:

S: Siempre verdadera

A: A veces verdadera

N: Nunca verdadera

1. Si $V = gen\{u, v, w\}$ entonces, $\{u, v, w\}$ es una base de V

2. Si $V = gen\{u, v, w\}$ y $dim\ V = 3$ entonces, $\{u, v, w\}$ es una base de V

3. Si $V = gen\{u, v, w\}$ y $w = 2u - v$ entonces, $\{u, v, w\}$ es una base de V

TEMA 3: (4 puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo a su nivel de veracidad en una de las siguientes tres categorías:

S: Siempre verdadera

A: A veces verdadera

N: Nunca verdadera

1. Si $V = gen\{u, v, w\}$ y T es una transformación lineal de V en W entonces, $W = gen\{T(v), T(u), T(w)\}$

2. Si $V = gen\{u, v, w\}$ y T es una transformación lineal de V en W entonces, $Im(T) = gen\{T(v), T(u), T(w)\}$

3. Si $V = gen\{u, v, w\}$, T es una transformación lineal de V en W y $dim\ W = 4$ entonces, $W = gen\{T(v), T(u), T(w)\}$

TEMA 4: (20 puntos)

1. Se quiere construir un hospital para atender a los enfermos del Covid-19, el arquitecto de la obra debe escoger combinaciones entre tres diseños de salas de emergencia para la obra. En el primer diseño cada sala de emergencia consta de 18 camas del tipo articulada, 15 camas tipo ortopédicas y 3 camas tipo rotorest. Para el segundo diseño la distribución de las camas es de 12 tipo articulada, 24 ortopédicas y 2 tipo rotorest. El tercer diseño consta de 12 camas tipo articulada, 31 camas ortopédicas y 2 rotorest.
   Determine si es posible construir un hospital con 84 camas tipo articulada, 210 camas ortopédicas y 14 camas rotorest, en caso afirmativo, calcular cuantas salas de emergencia de cada diseño debe tener el hospital.

2. Para atender a los enfermos del Covid-19, Respira SA, fabrica 3 modelos de respiradores de oxígeno: Deluxe, Pro y Simple. Para fabricar un modelo Deluxe se requieren 12 horas de ensamblado, 2.5 para pruebas del mecanismo y 3 más para instalar los accesorios. Para un modelo Pro se requieren 10 horas de ensamblado, 2 para pruebas del mecanismo y 2 para instalar los accesorios. Y, por último, el modelo simple 6 para ensamblado, 1.5 para pruebas del mecanismo, y 3 para instalar los accesorios. Si la fábrica dispone en horas por mes de 556 para ensamblado, 120 para pruebas, y 164 horas para instalación de accesorios, ¿Cuántos respiradores se pueden producir por mes?

3. Un kit de protección contra el Covid-19 está formado por 3 mascarillas, 6 visores y 3 filtros de repuesto. A su vez cada mascarilla consta de un visor y 2 filtros. ¿Cuántos kits, mascarillas, visores y filtros se deben fabricar para atender a un pedido de 2 kits, 3 mascarillas, 4 visores y 5 filtros?

TEMA 5: (18 puntos)

1. Considere el espacio vectorial $P_2[\mathbb{R}]$, donde se define el producto interno entre dos polinomios como $<p(x), q(x)> = p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0)$

   Se define un operador T: $P_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}]$, tal que $T(p(x)) = xp'(x)$

   Sea el polinomio $r(x) = 2 + x + 3x^2$.

   Encuentre los vectores $m(x)$ del núcleo de T y $s(x)$ del complemento ortogonal del núcleo de T, tal que $r(x) = m(x) + s(x)$

2. Considere el espacio vectorial $P_2[\mathbb{R}]$, donde se define el producto interno entre dos polinomios como $<p(x), q(x)> = p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0)$

   Se define un operador T: $P_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}]$, tal que $T(p(x)) = xp'(x)$

   Sea el polinomio $r(x) = 2 + x + 3x^2$.

   Encuentre los vectores $m(x)$ del núcleo de T y $s(x)$ del complemento ortogonal del núcleo de T, tal que $T(r(x)) = m(x) + s(x)$

3. Considere el espacio vectorial $P_2[\mathbb{R}]$, donde se define el producto interno entre dos polinomios como $<p(x), q(x)> = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

   Se define un operador T: $P_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}]$, tal que $T(p(x)) = xp'(x)$

Sea el polinomio $r(x) = 2 + x + 3x^2$.

Encuentre los vectores $m(x)$ del núcleo de T y $s(x)$ del complemento ortogonal del núcleo de T, tal que $T(r(x)) = m(x) + s(x)$

4. Considere el espacio vectorial $P_2[\mathbb{R}]$, donde se define el producto interno entre dos polinomios como $<p(x), q(x)> = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

   Se define un operador $T: P_2[\mathbb{R}] \to P_2[\mathbb{R}]$, tal que $T(p(x)) = xp'(x)$

   Sea el polinomio $r(x) = 2 + x + 3x^2$.

   Encuentre los vectores m(x) del núcleo de T y $s(x)$ del complemento ortogonal del núcleo de T, tal que $r(x) = m(x) + s(x)$

TEMA 6: (18 puntos)

1. Sea el espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$ donde: $V = \{x^2 + bx + c \ / \ b, c \in \mathbb{R}\}$

$$(x^2 + b_1x + c_1) \oplus (x^2 + b_2x + c_2) = x^2 + (b_1 + b_2 - 2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\alpha \odot (x^2 + bx + c) = x^2 + (\alpha b - 2\alpha + 2)x + \alpha c, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

   Determine si $B = \{x^2 + 1, x^2 + x\}$ es base de V.

2. Sea el espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$ donde: $V = \{x^2 + bx + c \ / \ b, c \in \mathbb{R}\}$

$$(x^2 + b_1x + c_1) \oplus (x^2 + b_2x + c_2) = x^2 + (b_1 + b_2 - 2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\alpha \odot (x^2 + bx + c) = x^2 + (\alpha b - 2\alpha + 2)x + \alpha c, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Determine si $B = \{x^2, x^2 + 1\}$ es base de V.

3. Sea el espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$ donde: $V = \{x^2 + bx + c \ / \ b, c \in \mathbb{R}\}$

$$(x^2 + b_1x + c_1) \oplus (x^2 + b_2x + c_2) = x^2 + (b_1 + b_2 - 2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\alpha \odot (x^2 + bx + c) = x^2 + (\alpha b - 2\alpha + 2)x + \alpha c, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

   Determine si $B = \{ x^2 + 1, \ x^2 - 2x - 2 \}$ es base de V.

4. Sea el espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$ donde: $V = \{x^2 + bx + c \ / \ b, c \in \mathbb{R}\}$

$$(x^2 + b_1x + c_1) \oplus (x^2 + b_2x + c_2) = x^2 + (b_1 + b_2 - 2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\alpha \odot (x^2 + bx + c) = x^2 + (\alpha b - 2\alpha + 2)x + \alpha c, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Determine si $B = \{\, x^2 + x + 1,\ x^2 + 2x - 1 \,\}$ es base de V.

5. Sea el espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$ donde: $V = \{x^2 + bx + c \ / \ b, c \in \mathbb{R}\}$

$$(x^2 + b_1x + c_1) \oplus (x^2 + b_2x + c_2) = x^2 + (b_1 + b_2 - 2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\alpha \odot (x^2 + bx + c) = x^2 + (\alpha b - 2\alpha + 2)x + \alpha c, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Determine si $B = \{\, x^2 + x + 3,\ x^2 - 2x \,\}$ es base de V.

TEMA 7: (16 puntos)

1. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T(x_1, x_2) = (-3x_1 + x_2, -4x_1 + x_2)$ y $\beta = \{(3, -7), (-1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

   Determine:

a. La Matriz de transformación correspondiente a T con respecto a la base dada β, utilizando la matriz de cambio de base.
b. Dado el vector $x = (3,2)$. Determine $[T(x)]_\beta$, utilizando la parte (a)

2. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T(x_1, x_2) = (-3x_1 + 2x_2, 4x_1 + 5x_2)$ y $\beta = \{(1, -2), (3, -2)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

   Determine:

a. La Matriz de la transformación T con respecto a la base β, utilizando la matriz de cambio de base.
b. Dado el vector $x = (-2,5)$ determine $[T(x)]_\beta$, utilizando la parte (a)

3. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -2x_1 - 3x_2)$ y $\beta = \{(1, -3), (-2,5)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

Determine:

a. La Matriz de la transformación T con respecto a la base β, utilizando la matriz de cambio de base.
b. Dado el vector $x = (2, -3)$ determine $[T(x)]_\beta$, utilizando la parte (a)

4. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T(x_1, x_2) = (6x_1 - 3x_2, -x_1 + 4x_2)$ y $\beta = \{(3, -2), (-4,3)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

Determine:

a. La Matriz de la transformación T con respecto a la base β, utilizando la matriz de cambio de base.
b. Dado el vector $x = (3,5)$ determine $[T(x)]_\beta$, utilizando la parte (a)

5. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T(x_1, x_2) = (-3x_1 - 2x_2, 5x_1 + 5x_2)$ y $\beta = \{(3,7), (-2, -5)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

Determine:

a. La Matriz de la transformación T con respecto a la base β, utilizando la matriz de cambio de base.
b. Dado el vector $x = (-1,3)$ determine $[T(x)]_\beta$, utilizando la parte (a)

TEMA 8: (16 puntos)

1. Sea A es una matriz de orden $2x2$, con valores propios λ_1, λ_2 y correspondientes vectores propios v_1 y v_2 . Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ demuestre, usando la definición, que A es diagonalizable
2. Pruebe que si A es una matriz de orden nxn y λ es un autovalor de A, entonces λ^n es un autovalor de A^n
3. Pruebe que si dos matrices simétricas A y B conmutan, entonces AB es una matriz diagonalizable.