Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal PAO II 2021

Examen Final

Compromiso de honor

Yo declaro que he sido informado y conozco las normas disciplinarias que rigen a la ESPOL, en particular el Código de Ética y el Reglamento de Disciplina. Al aceptar este compromiso de honor, reconozco y estoy consciente de que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de forma individual; que puedo comunicarme únicamente con la persona responsable de la recepción de la evaluación; y que al realizar esta evaluación no navegaré en otras páginas que no sean las páginas de Aula Virtual; que no recibiré ayuda ni presencial ni virtual; que no haré consultas en libros, notas, ni apuntes adicionales u otras fuentes indebidas o no autorizadas por el evaluador; ni usaré otros dispositivos electrónicos o de comunicación no autorizados. Además, me comprometo a mantener encendida la cámara durante todo el tiempo de ejecución de la evaluación, y en caso de que el profesor lo requiera, tomar una foto de las páginas en las que he escrito el desarrollo de los temas y subirla a Aula Virtual, como evidencia del trabajo realizado, estando consciente que el no subirla, anulará mi evaluación. Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior y me comprometo a seguir fielmente las instrucciones que se indican para la realización de la presente evaluación (incluyendo los requisitos de uso de la tecnología). Estoy consciente que el incumplimiento del presente compromiso, anulará automáticamente mi evaluación y podría ser objeto del inicio de un proceso disciplinario.

Problemas planteados

1. (10 puntos) Determine la matriz de la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que resulta de una rotación de ángulo de $30°$ en dirección contrario a la manecillas del reloj, seguido de una proyección ortogonal sobre la recta $y = 2x$.

2. (10 puntos) Considere la transformación $T\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T \cdot p(t) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{bmatrix}$$

   a) Pruebe que T es una transformación lineal.
   b) Halle una base para $\mathcal{N}(T)$.
   c) Halle una base para $\mathcal{I}\mathrm{m}(T)$.
   d) Halle la matriz de la transformación lineal respecto a las bases canónicas de $\mathbb{P}_3$ y $\mathbb{R}^3$.

3. (10 puntos) Resuelva el PVI

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. Resuelva el PVI

$$y'' + y' = 3t^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

   usando transformadas de Laplace.

5. (10 puntos) Una masa está sujeta a un resorte y se libera desde dos unidades hacia abajo unidad de su posición de equilibrio. Después de que la masa vibra durante π segundos, se golpea con un martillo en dirección hacia abajo, ejerciendo una fuerza unitaria sobre la masa. Luego, después de que la masa vibra durante π segundos más, se golpea con un martillo en dirección hacia arriba, ejerciendo de nuevo una fuerza unitaria sobre la masa. Suponiendo que el sistema es gobernado por el problema del valor inicial

$$y'' + y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$$

   donde $y(t)$ representa el *desplazamiento hacia abajo* desde el equilibrio en tiempo t. Determine el movimiento subsecuente de la masa.