ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2021	**PERIODO ACADÉMICO:** 1
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES **COORDINADOR:** Antonio Chong Escobar	**PROFESORES:** **Paralelos 01 y 02:** Antonio Chong Escobar **Paralelos 03, 04, 05 y 06:** Hernando Sánchez Caicedo
EVALUACIÓN: TERCERA	**FECHA:** 13 DE SEPTIEMBRE DE 2021

COMPONENTE TEÓRICO	
TOTAL (100 Puntos)	

Para que el examen del estudiante sea calificado:

Antes de iniciar el examen, el estudiante debe imprimir esta página o escribirla a mano, completarla, tomarle una foto en disposición vertical, convertirla en un documento con formato PDF, y enviarla a través de la plataforma indicada por el profesor como un archivo con el nombre:

Paralelo ## Primer Apellido Primer Nombre Ex3 CH

COMPROMISO DE HONOR

Como estudiante de la asignatura, reconozco que en la presente evaluación:

1) debo **ubicar la cámara de mi teléfono celular** o tablet, de forma que los profesores encargados de la evaluación tengan una visión panorámica de mi área de trabajo, la cual incluya mi persona, las hojas en las que voy a desarrollar los temas y la pantalla del dispositivo que usaré para mantener abierta la plataforma que contenga los temas de la evaluación. Además, debo tener **suficiente iluminación** para que mi rostro sea visible.
2) **estoy autorizado a comunicarme sólo con** los profesores responsables de la recepción de la evaluación.
3) el uso de **teléfono celular sólo es permitido para** tomar fotos de mis resoluciones escritas a mano que subiré a la plataforma establecida por el profesor de la asignatura en los formatos requeridos.
4) debo **resolver la evaluación de manera individual**, sin consultar con alguna otra persona de forma presencial o a través de un instrumento de comunicación, como laptop o teléfono celular.
5) **no debo usar** gafas, gorras, ni audífonos; **mis manos estarán** siempre visibles en la vista panorámica detallada en el primer ítem, **y mi rostro y orejas** no estarán cubiertos.
6) **no estoy autorizado a consultar** en material de apoyo alguno, como apuntes o libros.
7) **no debo usar calculadora**, ni cualquier otro instrumento para hacer cálculos, como laptops.
8) **los temas los debo desarrollar de manera** ordenada y clara, siguiendo todos los lineamientos establecidos por el profesor.
9) **el incumplimiento** de cualesquiera de los 8 ítems anteriores se sancionará de acuerdo con los reglamentos de ética y disciplina de la ESPOL.

ACEPTACIÓN DEL COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____,
firmo a continuación, como constancia de haber leído y aceptado todos los 9 ítems del compromiso de honor.
"Como estudiante de la ESPOL **me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad**, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: _________________________ **NÚMERO DE MATRÍCULA:** ____________________ **PARALELO:** _____

Ubicar aquí una identificación que tenga su foto, como cédula, carné ESPOL o licencia de conducir, para proceder a tomar la foto de la presente página.

VERSIÓN EVALUADA A LOS PARALELOS 01 Y 02

Parte A (formato: escrito) - (70 Puntos) - (85 minutos)
Observación: Explique cada paso realizado en sus soluciones.

Tema 1 (25 puntos)
Determine la familia de soluciones de la EDO $3(y(x))^2 y''(x) + 3y(x)(y'(x))^2 - A = 0$, donde $A \in \mathbb{R}^+$.
(Sugerencia: utilice un cambio de variable para reducir el orden de la EDO)

Tema 2 (20 Puntos)
Resuelva la EDO $y'' - 2xy' - 3y = 0$ usando desarrollo en serie de potencia alrededor de $x_0 = 0$. En la solución general hallada muestre los 3 primeros términos diferentes de cero de cada una de las soluciones linealmente independientes.

Tema 3 (25 Puntos)
Halle las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones, donde el operador * denota el producto de convolución y δ denota la función delta de Dirac:

$$\begin{cases} x'(t) = sen(t) \\ x'(t) - z(t) + y(t) = (cos(t) * x(t)) \\ y'(t) = x'(t)\delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} ;\ x(0) = 1\ ;\ y(0) = 2\ ;\ t \in [0, \infty).$$

(Sugerencia: Note que la primera ecuación sólo tiene la función incógnita x, y por lo tanto la puede resolver de forma independiente a las demás ecuaciones)

Parte B (formato: oral) - (30 Puntos) - (35 minutos)
El estudiante debe realizar los siguientes 5 temas, cada uno de los cuales se califica sobre 6 puntos. Para obtener el puntaje total, el estudiante debe tener excelente expresión oral y mostrar un dominio amplio de lo que explica en cada uno de los temas.

1) Explique el criterio de la raíz absoluta para series numéricas.
2) Proporcione y explique alguno de los modelos matemáticos basados en EDO de primer orden que se utilizan para resolver problemas de poblaciones.
3) Proporcione una EDO no homogénea de 2do orden para la cual no se pueda aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Luego, explique de forma breve cómo se aplicaría el método de variación de parámetros al ejemplo que proporcionó.
4) Enuncie alguno de los teoremas de traslación de la transformada de Laplace y proporcione un ejemplo ilustrativo.
5) Proporcione un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2do orden, que sea de 3x3, no homogéneo y no lineal.

VERSIÓN EVALUADA A LOS PARALELOS 03, 04, 05 Y 06

Temas de opción múltiple
De cada banco de preguntas, la plataforma AulaVirtual selecciona aleatoriamente una pregunta para el estudiante.

Banco 1 (12 puntos)
1.1.- Dada la serie $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s(1+s)^k$, determine su convergencia en el intervalo $0 < s < 1$.
a.- Diverge b.- Converge a Cero c.- Converge a -1 d.- Converge a 1/2

1.2.- Para la siguiente sucesión determine su convergencia, y si converge calcule su límite: $a_n = \frac{(n+1/2)\cos(n\pi)}{2n-1}$.
a.- Diverge b.- Converge a 1/2 c.- Converge a -1 d.- Converge a -1/2

1.3.- Para la serie $S(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16}$ ..., determine su región de convergencia, y evalúe su suma en x=-2.
a.- En x=-2 diverge. Converge para -2<x<2. b.- En x=-2 , S(-2)=2. Converge para -1<x<1.
c.- En x=-2 , S(-2)=2. Converge para cualquier x. d.- En x=-2 , S(-2)=-1. Converge para cualquier x.

Banco 2 (10 puntos)
2.1.- Dada la ecuación diferencial $t^2v' - 4tv + 4 = 0$, cuál de las siguientes funciones es una solución particular.
a.- $v = \frac{4}{5t}$ b.- $v = \frac{4t}{5}$ c.- $v = \frac{2t^2}{5}$ d.- $v = \frac{2}{5t^2}$

2.2.- Sabiendo que la rapidez de enfriamiento de una taza de café obedece a la Ley de enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt} = -0.01(T-20)$, (donde T se mide en grados, y t se mide en minutos) cual debe ser la rapidez de enfriamiento cuando la temperatura alcanza los 40 grados?
a.- $R = -0.2\,\frac{grados}{minut0}$ b.- $R = -20\,\frac{grados}{minut0}$ c.- $R = -2\,\frac{grados}{minut0}$ d.- $R = -200\,\frac{grados}{minut0}$

2.3.- Para el problema $y' - y^{\frac{1}{3}} = 0$; $y(0) = 0$, ¿Cuál de las siguientes <u>funciones no es solución</u>? (Señale solo una)
a.- $y(x) = \frac{2}{3}x^{1/3}$ b.- $y(x) = (\frac{2}{3}x)^{3/2}$ c.- $y(x) = -(\frac{2}{3}x)^{3/2}$ d.- $y(x) = 0$

Banco 3 (11 puntos)
3.1.- Para la ecuación diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$, ¿cuál de las siguientes <u>funciones no es solución</u>? (Señale solo una)
a.- $y(x) = 1 + \sqrt{x}$ b.- $y(x) = 1$ c.- $y(x) = \sqrt{x}$ d.- $y(x) = 0$

3.2.- Para la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, ¿cuál de las siguientes funciones es su solución?
a.- $y(x) = c_1 sen(x + c_2)$ b.- $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$
c.- $y(x) = c_1e^x sen(x) + c_2e^{-x}\cos(x)$ d.- $y(x) = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/2}$

3.3.- Para las soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 de la ecuación diferencial $xy'' + 3y' + xe^x y = 0$, su Wronskiano en x=1 es W(1)=2, encuentre el valor del Wronskiano en x=1/2.
a.- W(1/2)=16 b.- W(1/2)=2/25 c.- W(1/2)=1/16 d.- W(1/2)=25/2

Banco 4 (11 puntos)
4.1.- ¿Cuáles son las tres soluciones linealmente independientes de la EDO $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0 \therefore x > 0$?
a.- $\{x\,;\ x^{-2}\,;\ x^{-2}\ln(x)\}$ b.- $\{x\,;\ x^{-1}\,;\ x^{-2}\}$ c.- $\{e^x\,;\ e^{-2x}\,;\ xe^{-2x}\}$ d.- $\{e^x\,;\ e^{-x}\,;\ e^{-2x}\}$

4.2.- ¿Cuáles serían las tres soluciones linealmente independientes de la ecuación $y''' + y = 0$?
a.- $\left\{e^{-x}\,;\ e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right);\ e^{\frac{x}{2}}\text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right\}$ b.- $\{x\,;\ x^{-1}\,;\ x^{-2}\}$
c.- $\left\{e^{x}\,;\ e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\,;\ e^{-\frac{x}{2}}\text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right\}$ d.- $\{e^x\,;\ e^{-x}\,;\ e^{-2x}\}$

4.3.- Si las soluciones de la parte homogénea de la ecuación están dadas, ¿cuál podría ser una solución particular para la ecuación: $y''' - y' = 5sen(2x)$; $\{1, e^x, e^{-x}\}$?
a.- $y = \frac{1}{2}\cos(2x)$ b.- $y = 10\cos(2x)$ c.- $y = \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$ d.- $y = 10\cos(2x)$

Banco 5 (10 puntos)
5.1.- Determine el intervalo para el cual le serie converge $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k}(x-5)^k$.
a.- $-5 < x < 15$ b.- $-5 \le x < 5$ c.- $-15 < x < 15$ d.- $5 < x < 20$

5.2.- Identifique y clasifique los puntos singulares de la ecuación $x^2(x-1)y'' + (x^2+1)y' + 2y = 0$.
a.- x=0 singular irregular, x=1 singular regular b.- x=0 singular regular, x=1 singular irregular, x=-1 singular regular
c.- x=-1 singular irregular, x=1 singular regular d.- x=0 singular irregular, x=-1 singular regular

5.3.- Identifique y clasifique los puntos singulares de la ecuación $(x^2 - x - 6)y'' + (x - 3)y' + (x + 2)y = 0$.
a.- x=3 singular regular, x=-2 singular regular
b.- x=3 singular irregular, x=-2 singular irregular
c.- x=3 singular regular, x=-2 singular irregular
d.- x=3 singular irregular, x=-2 singular irregular

Banco 6 (10 puntos)
6.1.- Si $f(t) = u(t - \pi)[1 + \cos(t)]$ ¿cuál sería su transformada de Laplace?
a.- $F(s) = e^{-\pi s}\frac{1}{s(s^2+1)}$
b.- $F(s) = e^{-\pi s}\frac{s-1}{s(s^2+1)}$
c.- $F(s) = e^{-s}\frac{\pi}{s(s^2+1)}$
d.- $F(s) = e^{-s}\frac{\pi s-1}{s(s^2+1)}$

6.2.- Si $f(t) = t^3 e^{-2t}$ ¿cuál sería su transformada de Laplace?
a.- $F(s) = \frac{6}{(s+2)^4}$
b.- $F(s) = e^{-\pi s}\frac{1}{(s+2)}$
c.- $F(s) = e^{-s}\frac{1}{(s+2)^3}$
d.- $F(s) = e^{-3s}\frac{1}{s+2}$

6.3.- Si $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2-1)}$ ¿cuál sería su transformada inversa de Laplace?
a.- $f(t) = senh(t) - t$
b.- $f(t) = u(t - 1)senh(t)$
c.- $f(t) = senh(t) + t$
d.- $f(t) = sen(t)\delta(t - 1)$

Banco 7 (11 puntos)
7.1.- Para el sistema $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X$, encuentre su solución.
a.- $X = \begin{pmatrix} c_1e^{3t} + 2c_2e^{-t} \\ 2c_1e^{3t} - c_2e^{-t} \end{pmatrix}$
b.- $X = \begin{pmatrix} 2c_1e^{3t} + c_2e^{-t} \\ -c_1e^{3t} + 2c_2e^{-t} \end{pmatrix}$
c.- $X = \begin{pmatrix} c_1e^{t} + 2c_2e^{-t} \\ 2c_1e^{t} - c_2e^{-t} \end{pmatrix}$
d.- $X = \begin{pmatrix} c_1e^{3t} + 2c_2e^{-3t} \\ 2c_1e^{3t} - c_2e^{-3t} \end{pmatrix}$

7.2.- ¿Cuál de los siguientes vectores es solución del sistema $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} X$?
a.- $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -19 \end{pmatrix}$
b.- $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$
c.- $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$
d.- $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -19 \end{pmatrix}$

7.3.- Para el par de vectores $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t}$, calcule su Wronskiano y verifique si son linealmente independientes.
a.- $W = -2e^{-8t} \neq 0 \to son\ linealmente\ independientes.$
b.- $W = -2 \neq 0 \to son\ linealmente\ independientes.$
c.- $W = -te^{-8t} = 0 \to no\ son\ linealmente\ independientes.$
d.- $W = te^{-4t} = 0 \to no\ son\ linealmente\ independientes.$

Temas de desarrollo
De cada banco de preguntas, la plataforma AulaVirtual selecciona aleatoriamente una pregunta para el estudiante.

Banco 1 (25 puntos)
8.1 (Muestre todo el desarrollo) Encuentre la solución al siguiente problema de valor inicial usando Transformada de Laplace: $z'' + z' - \frac{3z}{4} = 1 - u(t - \pi)\,;\ z(0) = 0\,; z'(0) = 0.$

8.2.- Para la siguiente ecuación, a) encuentra su solución, b) evalúe su solución bajo la condición y(0)=2:
$$y' = x - y - 1 + (y - x + 2)^{-1}$$
8.3.- Para la ecuación a) determine sus puntos singulares, b) clasifique los singulares en regulares o irregulares, c) estime el radio de convergencia de la solución en serie de potencias centrada en x=0, d) encuentre los coeficientes $a_0\,;\ a_1\,;\ a_2\,;\ a_3\,;\ a_4\,;\ a_5$ de la serie de potencias, solución de la ecuación centrada en x=0.
$$(x^2 - 2)y'' + 6y = 0 \ \ \therefore y(0) = 1 \therefore y'(0) = -1.$$