FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 1

1. (10 PUNTOS)

   Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $20\ libras$, se cobra \$1.80 por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $30\ libras$, se cobra \$1.10 por cada $libra$ más un recargo de \$15 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.80x\,, & 0 \le x < 20 \\ mx + b\,, & 20 \le x < 30 \\ 1.10x + 15\,, & x \ge 30 \end{cases}$$

   Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

2. (10 PUNTOS)

   Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $20\ libras$, se cobra \$1.70 por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $30\ libras$, se cobra \$1.10 por cada $libra$ más un recargo de \$15 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.70x\,, & 0 \le x < 20 \\ mx + b\,, & 20 \le x < 30 \\ 1.10x + 15\,, & x \ge 30 \end{cases}$$

   Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

3. (10 PUNTOS)

Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $30\ libras$, se cobra \$2.10 por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $40\ libras$, se cobra \$1.30 por cada $libra$ más un recargo de \$25 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 2.10x\,, & 0 \leq x < 30 \\ mx + b\,, & 30 \leq x < 40 \\ 1.30x + 25\,, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

4. (10 PUNTOS)

Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $30\ libras$, se cobra \$1.90 por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $40\ libras$, se cobra \$1.05 por cada $libra$ más un recargo de \$30 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.90x\,, & 0 \leq x < 30 \\ mx + b\,, & 30 \leq x < 40 \\ 1.05x + 30\,, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

5. (10 PUNTOS)

Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $20\ libras$, se cobra \$2.20 por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $40\ libras$, se cobra \$1.05 por cada $libra$ más un recargo de \$34 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 2.20x\,, & 0 \leq x < 20 \\ mx + b\,, & 20 \leq x < 40 \\ 1.05x + 34\,, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 2

6. (14 PUNTOS)

   Dada la función de variable real biyectiva:

   $$f(x) = x^2 + 5x + 2 \quad ; \quad x \leq -\frac{5}{2}$$

   Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -2.

7. (14 PUNTOS)

   Dada la función de variable real biyectiva:

   $$f(x) = -x^2 - 3x - 2 \quad ; \quad x \leq -\frac{3}{2}$$

   Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -2.

8. (14 PUNTOS)

   Dada la función de variable real biyectiva:

   $$f(x) = x^2 + x - 3 \quad ; \quad x \leq -\frac{1}{2}$$

   Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -1.

9. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 5 \quad ; \quad x \leq -2$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -5.

10. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = x^2 - 7x + 3 \quad ; \quad x \leq \frac{7}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -3.

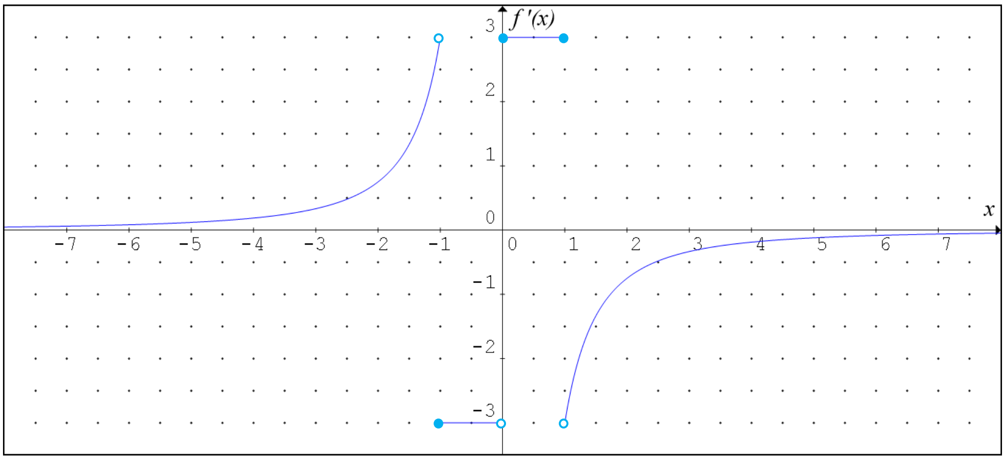
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 3

11. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ \ [0 < -x < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - 1| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x > N\ \Rightarrow\ \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon\right]$

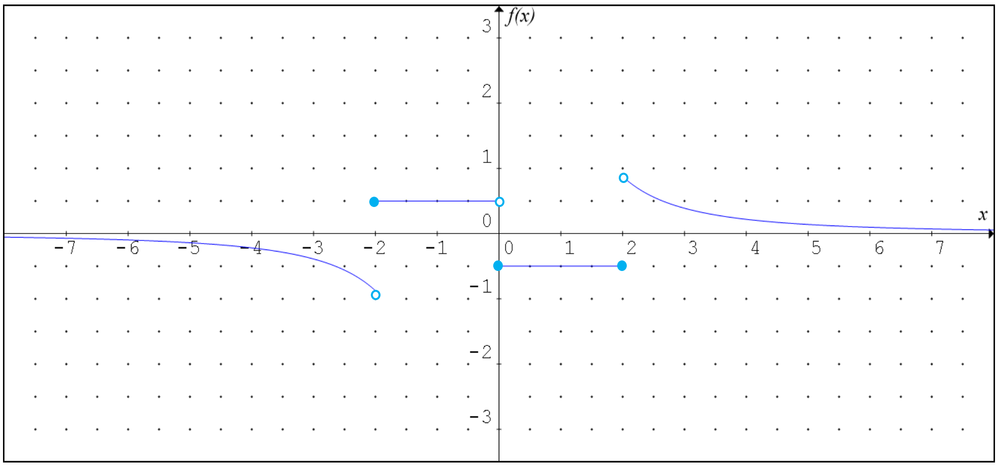
(c) $\forall x \in [0, 1]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_0^1 f(x)dx = 2$.

(d) $\forall x \in dom\, f\ ,\ f(-x) = f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

12. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\ f\ \ [0 < -x < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - 2| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\ f\ \left[x > N\ \Rightarrow\ \left|f(x) - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon\right]$

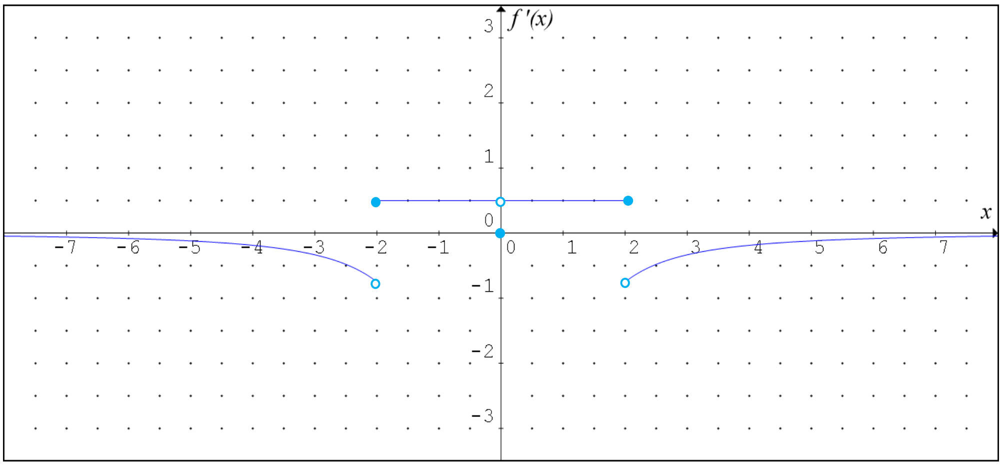
(c) $\forall x \in [0, 2]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_0^2 f(x)dx = 3$.

(d) $\forall x \in dom\ f\ ,\ f(-x) = f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

13. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ \ [0 < x < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - 1| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x < -N\ \Rightarrow\ \left|f(x) + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right]$

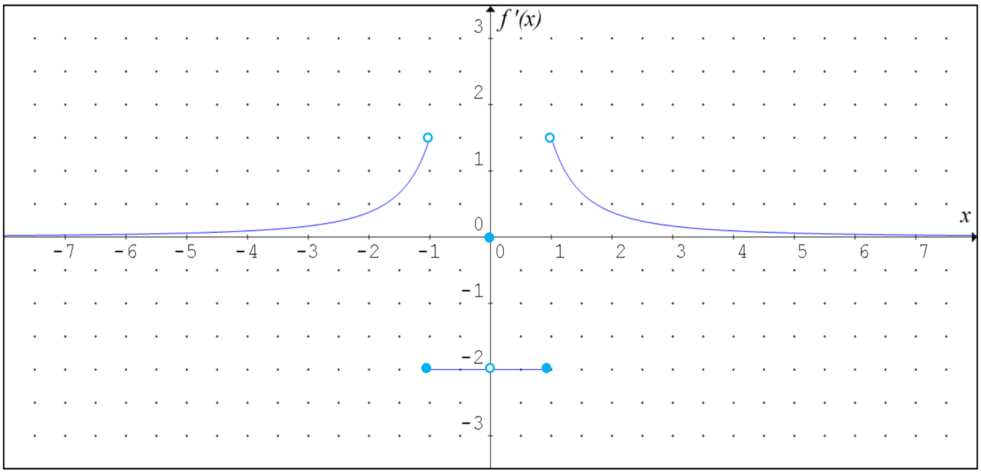
(c) $\forall x \in [0, 2]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_0^2 f(x)dx = 3$.

(d) $\forall x \in dom\, f\ ,\ f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

14. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ \ [0 < -x < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - 1| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x < -N\ \Rightarrow\ \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon\right]$

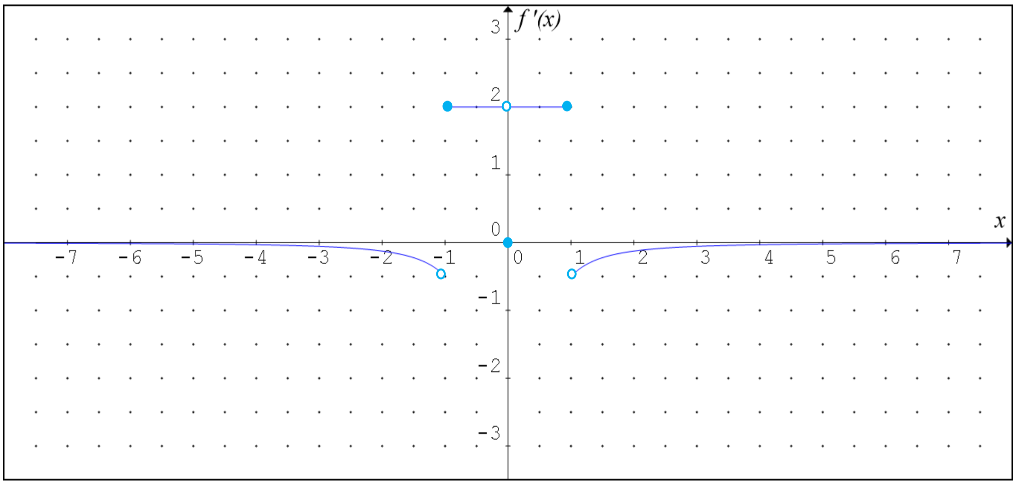
(c) $\forall x \in [0, 1]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$.

(d) $\forall x \in dom\, f\ ,\ f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

15. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ \ [0 < -x < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - 3| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x < -N\ \Rightarrow\ \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon\right]$

(c) $\forall x \in [-1, 0]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$.

(d) $\forall x \in dom\, f\ ,\ f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 4

16. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \left(e^{t^2} - 1\right) dt}{sen(x) - x}$$

17. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x ln\big(sen(t)\big) dt}{(2x - \pi)^3}$$

18. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x [arctan(t)]^2 dt}{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}$$

19. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (arctan(t) - t) dt}{x^4}$$

20. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \left(2sen^2(t) + 4t\ sen(2t) + 2t^2 cos(2t)\right)dt}{2x - sen(2x)}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 5

21. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $\int_a^b f^2(x)dx = 0$."

22. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Si f no es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f no es integrable en el intervalo $[a, b]$."

23. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

$$\int_1^{n+1} [\![x]\!]\, dx = \frac{n(n+1)}{2} \;\; ; \;\; n \in \mathbb{N}$$

24. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Si $\int_a^b f(x)dx = c$, entonces $\int_a^b (b^3 f(x) - 3cx^2)dx = a^3 c$."

25. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $f(x) = 0$."

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 6

26. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x} \quad ; \quad x \in [1, 4]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

27. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} \quad ; \quad x \in [-3, -1]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

28. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x} \quad ; \quad x \in [1, 4]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

29. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad ; \quad x \in [4, 9]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

30. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x} \quad ; \quad x \in [1, 5]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 7

31. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2\,, & |x|\le 1 \\ ln(|x|)\,, & (-e\le x<-1)\vee(1<x\le e) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x=e$, $x=-e$; y finalmente, calcule su área.

32. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{\pi}arctan(|x|)\,, & |x|\le 1 \\ 3-|x|\,, & (-3\le x<-1)\vee(1<x\le 3) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica y el eje X; y finalmente, calcule su área.

33. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6}{\pi}arcsen(|x|)\,, & |x|\le \dfrac{1}{2} \\ |x|+\dfrac{1}{2}\,, & \left(-2\le x<-\dfrac{1}{2}\right)\vee\left(\dfrac{1}{2}<x\le 2\right) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x=2$, $x=-2$; y finalmente, calcule su área.

34. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3-|3x|\,, & |x|\le 1 \\ log_2(|x|)\,, & (-4\le x<-1)\vee(1<x\le 4)\end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x=4$, $x=-4$; y finalmente, calcule su área.

35. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right|\,, & |x|\le 2 \\ 2+log_{\frac{1}{2}}(|x|)\,, & (-4\le x<-2)\vee(2<x\le 4)\end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica y el eje X; y finalmente, calcule su área.