CÁLCULO VECTORIAL – PAE2 2021
SOLUCIÓN Y RÚBRICA DEL EXAMEN FINAL

N. Córdova, L. Pérez , L. Rodríguez y P. Ramos.

TEMA 1–A

Utilizando multiplicadores de Lagrange obtenga los valores extremos de la función $z = f(x, y) = xy$ bajo la restricción $9x^2 + y^2 = 4$

Tenemos que $f(x, y) = xy$ y $g(x, y) = 9x^2 + y^2 = 4$

Por lo tanto,

$\nabla f = \ < f_x, f_y > \ = \ < y, x >$
$\lambda \nabla g = \lambda < g_x, g_y > \ = \lambda \ < 18x, 2y > \ = \ < 18\lambda x, 2\lambda y >$

Entonces de $\nabla f = \lambda \nabla g$ se tiene :

$y = 18\lambda x \qquad (1)$
$x = 2\lambda y \qquad (2)$

Le adicionamos la restricción:

$9x^2 + y^2 = 4 \qquad (3)$

Reemplazando (1) en (2) :

$x = 2\lambda(18\lambda x) \Rightarrow x - 36\lambda^2 x = 0 \Rightarrow x(1 - 36\lambda^2) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \vee (1 - 36\lambda^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = \pm\frac{1}{6}$

<u>Caso 1</u> : $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$

Pero la restricción nos dice que $9x^2 + y^2 = 4$ lo que no se cumple en el punto $(0, 0)$, pues $9(0)^2 + 0^2 = 0 \neq 4$

<u>Caso 2</u> : $\lambda = \frac{1}{6} \Rightarrow^{(1)} y = 3x \Rightarrow^{(3)} 9x^2 + (3x)^2 = 4 \Rightarrow 9x^2 + 9x^2 = 4 \Rightarrow$

$18x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{18} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

Observe que el caso $\lambda = \ -\frac{1}{6}$ entrega las mismas soluciones que $\lambda = \frac{1}{6}$.

Ahora, $y = 3x \Rightarrow y = \pm\frac{3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

Luego los puntos críticos son :

$P_1 = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2})$; $P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2})$; $P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2})$
; $P_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2})$

Evaluemos en la función para saber cuáles son los puntos de máximo y cuáles son los de mínimo.

$$f(x,y) = xy \Rightarrow f(P_1) = f(\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}) = \frac{2}{3}$$

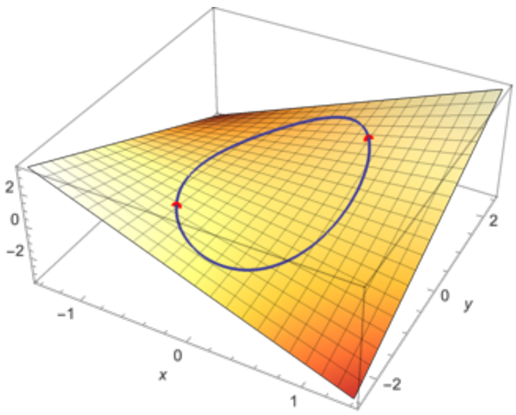
$$f(x,y) = xy \Rightarrow f(P_2) = f(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}) = -\frac{2}{3}$$

$$f(x,y) = xy \Rightarrow f(P_3) = f(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}) = -\frac{2}{3}$$

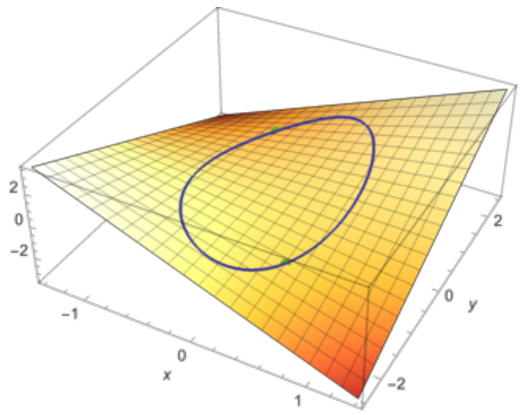
$$f(x,y) = xy \Rightarrow f(P_4) = f(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}) = \frac{2}{3}$$

De lo anterior concluimos que P_1 y P_4 son puntos de máximo y P_2 yP_3 puntos de mínimo.

El valor máximo de f bajo la restricción dada es $\frac{2}{3}$ y el valor mínimo es $-\frac{2}{3}$ $\square$



Máximos



Mínimos

TEMA 1-B

Utilizando multiplicadores de Lagrange obtenga los valores extremos de la función $z = f(x, y) = 4xy$ bajo la restricción $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

Solución Para comenzar, sea

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Igualando $\nabla f(x, y) = 4y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$ y $\lambda\nabla g(x, y) = (2\lambda x/9)\mathbf{i} + (\lambda y/8)\mathbf{j}$, se puede obtener el sistema de ecuaciones siguiente.

$$4y = \frac{2}{9}\lambda x \qquad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y).$$

$$4x = \frac{1}{8}\lambda y \qquad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \qquad \text{Restricción.}$$

De la primera ecuación, se obtiene $\lambda = 18y/x$, que sustituido en la segunda ecuación da

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{16}y^2.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación x^2 por este valor se tiene:

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 = 8$$

$Así, y = \pm 2\sqrt{2}$

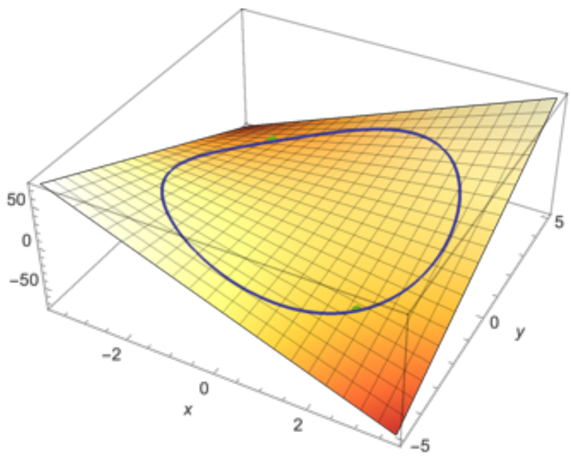
$$x^2 = \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{16}\,(8) = \frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Tenemos 4 puntos críticos:

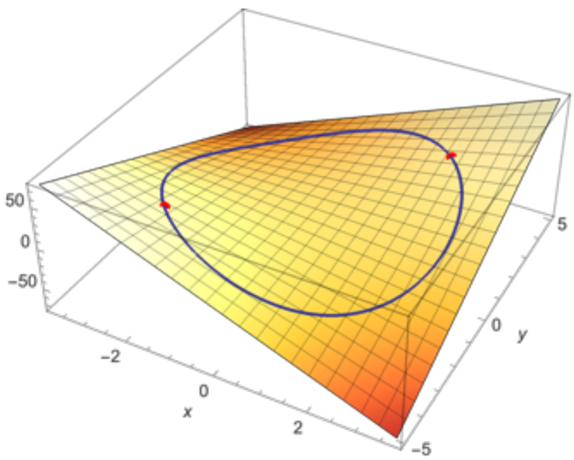
$$P_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right)\ ;\ P_2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right)\ ;\ P_3\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right)\ y\ P_4\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right)$$

De tal forma que:

$$f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) = f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right) = -24\ \ (mínimo)$$



$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right) = 24 \;\; (máximo)$$



Rúbrica general:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar elementos de optimización de funciones escalares para resolución de problemas.	No sabe cómo plantear el problema.	Esboza las fórmulas de optimización correctamente pero no las aplica bien o comete errores en el proceso.	Presenta y resuelve las ecuaciones de optimización de Lagrange o la condición de Kuhn-Tucker, encontrando correctamente los puntos críticos, pero no determina con precisión su naturaleza.	El estudiante presenta y resuelve las ecuaciones de optimización, hallando correctamente los extremos solicitados o comete errores poco significativos
	0	1-6	7-12	13-15

TEMA 2-A

Para el campo de fuerzas dado por $\vec{F}(x,y,z) = (e^x\, cos(y), -e^x\, sen(y), 2)$:

a) **Demuestre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria.**

b) **Obteniendo la función potencial f ,calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre una partícula ques e mueve a lo largo de una curva C desde le punto $\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ hasta el punto $(1, \pi, 3)$.**

Solución Al expresar el campo de fuerzas en la forma $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, se tiene $M = e^x \cos y$, $N = -e^x \operatorname{sen} y$ y $P = 2$, y se sigue que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Por tanto, $\mathbf{F}$ es conservativo. Si f es una función potencial de $\mathbf{F}$, entonces

$$f_x(x, y, z) = e^x \cos y$$

$$f_y(x, y, z) = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$f_z(x, y, z) = 2.$$

Integrando con respecto a x, y y z por separado, se obtiene

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z)\, dx = \int e^x \cos y\, dx = e^x \cos y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_y(x, y, z)\, dy = \int -e^x \operatorname{sen} y\, dy = e^x \cos y + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_z(x, y, z)\, dz = \int 2\, dz = 2z + k(x, y).$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$, se concluye que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + 2z + K.$$

Así, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de *cualquier* curva C desde $(0, \pi/2, 1)$ hasta $(1, \pi, 3)$ es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \Big[e^x \cos y + 2z \Big]_{(0,\, \pi/2,\, 1)}^{(1,\, \pi,\, 3)} \\ &= (-e + 6) - (0 + 2) \\ &= 4 - e. \end{aligned}$$

Nota: el literal a) también puede ser realizado por medio del cálculo del rotacional del campo vectorial dado:

$$rot\, \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i(0-0) - j(0-0) + k(-e^x \operatorname{sen} y + e^x \operatorname{sen} y) = \vec{0}$$

TEMA 2-B

Para el campo de fuerzas dado por $\vec{F}(x,y,z) = (y + yz, x + 3z^3 + xz, 9yz^2 + xy - 1)$:

a) **Demuestre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria.**

b) **Obteniendo la función potencial f ,calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre una partícula ques e mueve a lo largo de una curva C desde le punto $(1,1,1)$ hasta el punto $(2,1,4)$.**

***a*)** Con las identificaciones

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + yz)\mathbf{i} + (x + 3z^3 + xz)\mathbf{j} + (9yz^2 + xy - 1)\mathbf{k},$$

$$P = y + yz, \qquad Q = x + 3z^2 + xz \qquad \text{y} \qquad R = 9yz^2 + xy - 1,$$

vemos que las igualdades

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 9z^2 + x = \frac{\partial R}{\partial y}$$

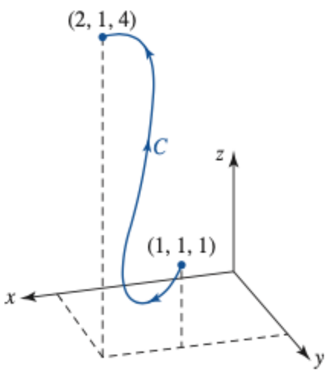
O por medio del cálculo del rotacional de $\vec{F}$:

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y + yz & x + 3z^2 + xz & 9yz^2 + xy - 1 \end{vmatrix}$$

$$= i(9z^2 + 1 - 9z^2 - 1) - j(y - y) + k(1 + z - 1 - z) = \vec{0}$$

Se concluye que el campo es conservativo y por ende independiente de la trayectoria.

b) La trayectoria C que se muestra en la figura representa cualquier trayectoria con punto inicial (1,1,1) y punto final (2,1,4). Para evaluar la integral encontramos una función potencial $\phi(x, y, z)$ para $\vec{F}$:



En primer lugar sabemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R.$$

Integrando la primera de estas tres ecuaciones con respecto a x se obtiene

$$\phi = xy + xyz + g(y, z).$$

La derivada de esta última expresión con respecto a y debe ser entonces igual a Q:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z^3 + xz.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3z^3 \qquad \text{implica} \qquad g = 3yz^3 + h(z).$$

En consecuencia, $\qquad \phi = xy + xyz + 3yz^3 + h(z).$

La derivada parcial de esta última expresión con respecto a z debe ser ahora igual a la función R:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + 9yz^2 + h'(z) = 9yz^2 + xy - 1.$$

De esto obtenemos $h'(z) = -1$ y $h(z) = -z + K$. Descartando K, es posible escribir

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 - z.$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} (y + yz)\, dx + (x + 3z^3 + xz)\, dy + (9yz^2 + xy - 1)\, dz$$

$$= (xy + xyz + 3yz^3 - z)\Big]_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} = 198 - 4 = 194.$$

Rúbrica general:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar elementos de campos vectoriales a la determinación de independencia de trayectoria y cálculo de trabajo.	No sabe cómo plantear el problema.	Demuestra que el campo es conservativo o demuestra que la integral es independiente de la trayectoria, pero tiene problemas para obtener la función potencial.	Determina correctamente la función potencial pero comete errores al aplicar el teorema fundamental u otro método de solución para hallar el trabajo.	Utiliza la función potencial o aplica otro camino para resolver la integral, llegando correctamente a la respuesta o comete algún error poco significativo.
	0	1-6	7-12	13-15

TEMA 3-A

Una región R en el plano está definida por las rectas: $x+y=6$, $x-y=2$, $y=0$

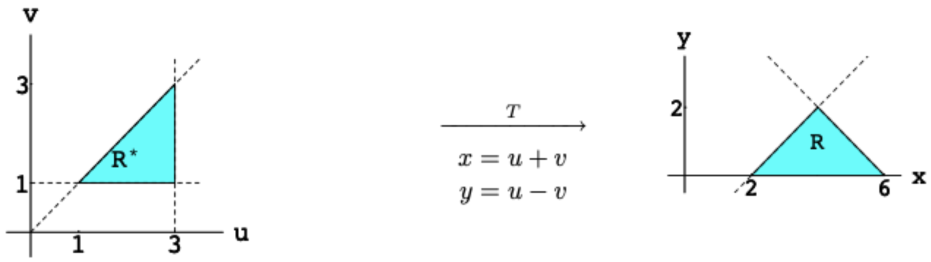
a) Determine y bosqueje la región R' en el plano que se produce al aplicar la transformación $x=u+v$, $y=u-v$.

b) Calcule el Jacobiano de la transformación $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

c) Compare el resultado obtenido en b) con las relaciones de las áreas entre R y R'. Qué puede concluir al respecto?

Solución

La gráfica siguiente muestra las regiones R y R^*:



a) La región R sombreada en la parte derecha de la figura es un triángulo limitado por las rectas dadas. Mediante la transformación dada, la recta $x+y=6$ se transforma en $(u+v)+(u-v)=6$, es decir la recta $u=3$. Análogamente, la recta $x-y=2$ se transforma en $(u+v)-(u-v)=2$ o bien la recta $v=1$. De la misma manera el eje $y=0$ se convierte en la recta $u=v$. La región transformada R^* es el triángulo de la izquierda en el plano UV.

b) Calculando las derivadas parciales obtenemos directamente

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

c) El área de la región triangular R es 4, en tanto que la de la región R^* es 2. Luego la relación entre ambas es $4/2=2$ que coincide con el valor absoluto del jacobiano. Como el jacobiano es constante (lo que ocurre con las transformaciones lineales), las áreas de cualesquiera regiones R del plano XY son el doble de las áreas de las regiones correspondientes transformadas R^* del plano UV.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar el proceso de cambio de variables de integrales dobles para poder evaluarlas en otro sistema de referencia.	No sabe cómo plantear el problema.	Bosqueja ambas regiones correctamente utilizando la transformación solicitada, pero no calcula correctamente el Jacobiano.	Calcula correctamente el jacobiano pedido, pero no imterpreta correctamente lo solicitado en c)	Resueleve todo el ejercicio y establece la relación entre el valor de las áreas y el Jacobiano obtenido correctamente, o comete algún error no significativo.
	0	1-8	9-16	17-20

TEMA 3-B

Una región D^* en el plano está definida por $D^* = [0,1]X[1,2]$

a) Determine y bosqueje la región D en el plano que se produce al aplicar la transformación $x = u$, $y = v(1+u)$.

b) Calcule el Jacobiano de la transformación $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

c) Evalúe la integral $\iint_D xy\, dx\, dy$

Solución

Busquemos las imágenes de los segmentos que forman la frontera de D^*:

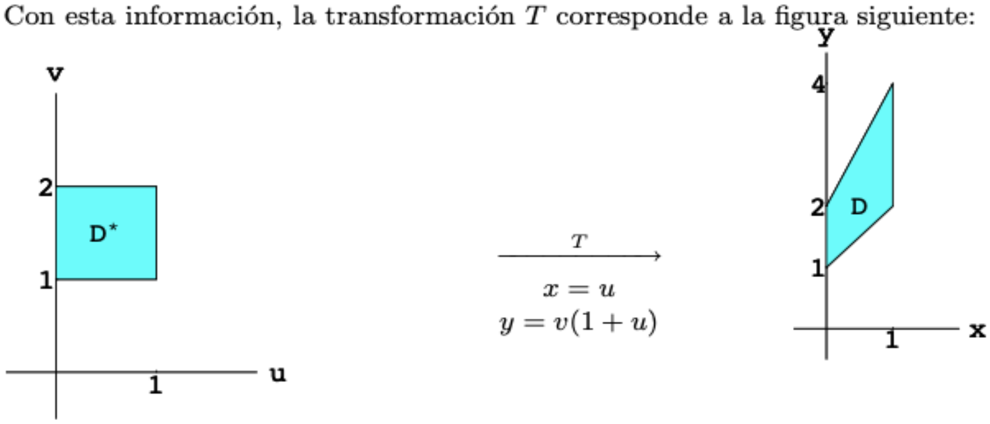
$$\left.\begin{array}{l} v=1 \\ 0\le u\le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=u \\ y=1+u \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=1+x \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=1 \\ 1\le v\le 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2v \\ 1\le v\le 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ 2\le y\le 4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v=2 \\ 0\le u\le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=u \\ y=2(1+u) \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2+2x \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=0 \\ 1\le v\le 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=v \\ 1\le v\le 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ 1\le y\le 2 \end{array}\right\}$$

Con esta información, la transformación T corresponde a la figura siguiente:



b) Con la fórmula del cambio de variables:

Como $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1+u \end{vmatrix} = 1+u$, entonces

$$I = \int_0^1 du \int_1^2 uv(1+u)^2\, dv = \int_0^1 (u+2u^2+u^3)\, du \cdot \int_1^2 v\, dv = \frac{17}{8}.$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar el proceso de cambio de variables de integrales dobles para poder evaluarlas en otro sistema de referencia.	No sabe cómo plantear el problema	Bosqueja ambas regiones correctamente utilizando la transformación solicitada, pero no calcula correctamente el Jacobiano.	Calcula correctamente el Jacobiano solicitado, pero comete errores en el cálculo solicitado de la integral doble.	Desarrolla ordenada y correctamente el ejercicio en todos sus pasos o comete errores poco significativos.
	0	0-8	9-16	17-20

TEMA 4-A

Considere la integral $I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz\,dy\,dx$

a) Determine los límites de integración para escribir I de la forma:

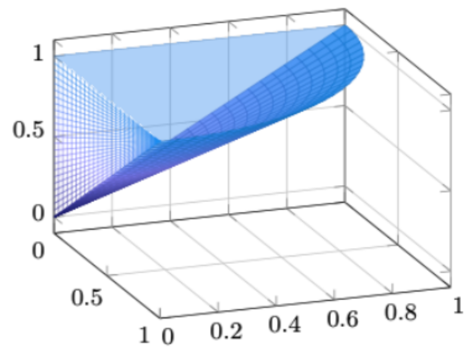
$$I=\int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{\dots}\frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx\,dz$$

b) Cambiando a un sistema de coordenadas cilíndricas calcule el valor de la integral del literal anterior.

<u>SOLUCIÓN</u>

a) Observemos que la región de integración de I está dada por:

$$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le\sqrt{1-x^2},\quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$$



Se quiere expresar la integral I con el orden de integración $dy\,dx\,dz$, para ello es necesario proyectar el sólido sobre el plano XZ.

Como $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$, al proyectar en el plano XZ ($Y=0$), observamos que:

$0\le z\le 1$ y $0\le x=\sqrt{x^2}\le z$ pues el sólido se encuentra en el primer octante.

Por otro lado, despejando y de la ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$ se obtiene: $y=\sqrt{z^2-x^2}$, por lo tanto;

La integral será

$$\int_0^1\int_0^z\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}}\frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx\,dz.$$

b) Usando coordenadas cilíndricas:

$$x=r\cos(\theta),\quad y=r\,sen(\theta),\quad z=z;\quad x^2+y^2=r^2$$

Y observando que:

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz\,dy\,dx$$

Tenemos, al proyectar en el plano XY, que: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le r\le 1$, $r\le z\le 1$.

Así,

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_r^1 \frac{e^{z^2}}{r} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_r^1 e^{z^2} \, dz \, dr \, d\theta$$

Para poder resolver esta última integral debemos hacer un cambio de orden de integración de $\boldsymbol{dz\, dr\, d\theta}$ a $\boldsymbol{dr\, dz\, d\theta}$, es decir cambiamos, $0 \leq r \leq 1$, $r \leq z \leq 1$ por , $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq r \leq z$; por lo tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_r^1 e^{z^2} \; dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^z e^{z^2} \; dr\, dz\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 z\, e^{z^2} \; dz\, d\theta = \frac{\pi}{4} \; (e-1)$$

Rúbrica:

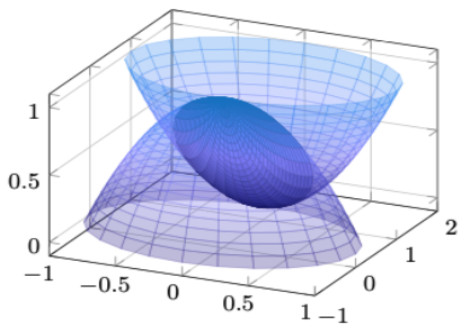
Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe aplicar cambios en el orden de integración para integrales triples y además sabe utilizar un cambio de coordenadas adecuado para resolver dichas integrales.	No sabe cómo identificar los límites de cada variable para realizar un cambio de orden de integración. No sabe utilizar un cambio de coordenadas adecuado para resolver la integral triple.	Identifica los límites de cada variable de la integral dada, pero plantea mal los nuevos límites de integración. Define un cambio de variables adecuado, pero no identifica bien la nueva región de integración.	Identifica los límites de cada variable de la integral dada y plantea los nuevos límites de integración, pero comete errores al escribir la integral. Utiliza correctamente un cambio de variables para la integral triple e identifica la región de integración, pero comete errores en el cálculo de la integral.	Identifica los límites de cada variable y escribe correctamente los nuevos límites planteando la integral con el cambio de orden de integración indicado. Utiliza adecuadamente un cambio de variables para la integral triple e identifica la región de integración resolviendo correctamente dicha integral.
	0	1-7	8-14	15

TEMA 4-B

Utilizando integrales triples y un sistema de coordenadas cilíndricas determine el volumen comprendido entre las superficies $x^2+y^2+z=1$ y $x^2+(y-1)^2-z=0$.

SOLUCIÓN

Se trata de encontrar el volumen encerrado por los dos paraboloides



Observemos que el sólido, Q, está acotado superiormente por $z=1-(x^2+y^2)$ e inferiormente por $z=x^2+(y-1)^2$.

La intersección de las dos superficies se obtiene de la siguiente manera:

$$1-(x^2+y^2)=z=x^2+(y-1)^2$$

$$\Longrightarrow \mathbf{2}\,(x^2+y^2)-2y=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2-y=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}$$

Al proyectar dicha intersección sobre el plano XY se obtiene el círculo de centro $c\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}$. Usando coordenadas cilíndricas:

$$x=r\cos(\theta)\,, \quad y=r\,sen(\theta)\,, \quad x^2+y^2=r^2$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Longrightarrow x^2+y^2-y=0 \Longrightarrow r^2-r\,sen(\theta)=0 \Longrightarrow r=sen(\theta)$$

Así, $0\le\theta\le\pi$, $0\le r\le sen(\theta)$ y

$$x^2+(y-1)^2\le z\le 1-(x^2+y^2) \Longrightarrow x^2+y^2-2y+1\le z\le 1-(x^2+y^2)$$
$$\Longrightarrow r^2-2\,r\,sen(\theta)+1 \le z \le 1-r^2$$

Por lo tanto,

$$V(Q)=\int_0^{\pi}\int_0^{sen(\theta)}\int_{r^2-2\,r\,sen(\theta)+1}^{1-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{sen(\theta)}(1-r^2-r^2+2\,r\,sen(\theta)-1)\ r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{sen(\theta)}(2\,r\,sen(\theta)-2\,r^2)\ r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\left[\frac{2}{3}r^3 sen(\theta)-\frac{1}{2}r^4\right]_0^{sen(\theta)} d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\tfrac{2}{3}(sen(\theta))^4-\tfrac{1}{2}(sen(\theta))^4\right]d\theta=\tfrac{1}{6}\int_0^{\pi}sen^4(\theta)\ d\theta$$

$$\left(sen^4(\theta)=\left[\tfrac{1-\cos(2\theta)}{2}\right]^2=\tfrac{1-2\cos(2\theta)+cos^2(2\theta)}{4}=\tfrac{1}{4}\left[1-2\cos(2\theta)+\tfrac{1+\cos(4\theta)}{2}\right]=\right.$$
$$\left.=\tfrac{1}{8}[3-4\cos(2\theta)+\cos(4\theta)]\right)$$

$$=\tfrac{1}{48}\int_0^{\pi}[3-4\cos(2\theta)+\cos(4\theta)]\,d\theta=\tfrac{1}{48}\left[3\theta-2\,\mathrm{sen}(2\theta)+\tfrac{1}{4}sen(4\theta)\right]_0^{\pi}=\tfrac{\pi}{16}$$

Finalmente, $V(Q) = \frac{\pi}{16}\ u^3$.

RÚBRICA:

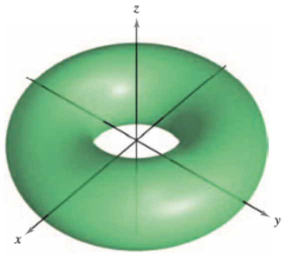
Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe plantear el volumen de un sólido a través de integrales triples y usa cambios de variables adecuado para resolver dicha integral.	El estudiante no sabe identificar el sólido para plantear el volumen usando integrales triples y por ende no puede resolver el problema.	El estudiante identifica el sólido al realizar el gráfico, encuentra la intersección de las superficies dadas, pero comete errores al proyectar dicha intersección y no puede plantear correctamente los límites de la integral impidiendo el cálculo del volumen.	El estudiante identifica el sólido al realizar el gráfico, encuentra la intersección de las superficies dadas, proyecta correctamente dicha intersección e identifica los límites de la integral triple usando un cambio de coordenadas adecuado, pero comete pequeños errores al plantear la integral y no logra resolverla.	El estudiante identifica el sólido al realizar el gráfico, encuentra la intersección de las superficies realizando la proyección correctamente, identifica los límites de la integral triple planteándola y resolviéndola con un cambio de variable adecuado para dar solución al problema.
	0	1-7	8-14	15

TEMA 5-A

Determine el área de la superficie del Toro dado por:

$$\boldsymbol{r(u,v) = (2 + \cos u)\cos v\,\vec{i} + (2 + \cos u)\,\operatorname{sen} v\,\vec{j} + \operatorname{sen} u\,\vec{k}}$$

Donde el dominio D está dado por $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$



Solución Para empezar se calculan $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$.

$$\mathbf{r}_u = -\operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos u\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v = -(2 + \cos u)\operatorname{sen} v\mathbf{i} + (2 + \cos u)\cos v\mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} u \cos v & -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \cos u \\ -(2 + \cos u)\operatorname{sen} v & (2 + \cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -(2 + \cos u)(\cos v \cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen} v \cos u\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\mathbf{k})$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= (2 + \cos u)\sqrt{(\cos v \cos u)^2 + (\operatorname{sen} v \cos u)^2 + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= (2 + \cos u)\sqrt{\cos^2 u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= (2 + \cos u)\sqrt{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= 2 + \cos u. \end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie del toro es

$$\begin{aligned} A = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2 + \cos u)\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 4\pi\, dv \\ &= 8\pi^2. \end{aligned}$$

TEMA 5-B

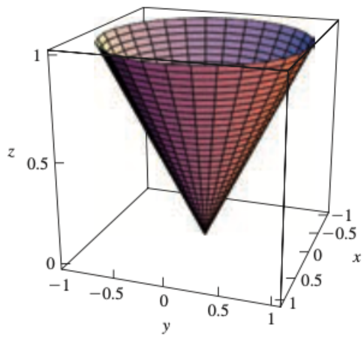
Determine el área de la superficie del cono dado por:

$$\boldsymbol{r(u,v) = (u\cos v)\,\vec{i} + (u\,\operatorname{sen} v)\,\vec{j} + u\,\vec{k}}$$

Donde el dominio D está dado por $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$

Solución:

La superficie es una porción superior del cono mostrado en la figura:



Primero calculamos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j}$$

y después formamos el producto cruz

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 1 \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -u \cos v\mathbf{i} - u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}.$$

La magnitud del vector en (12) es

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \operatorname{sen}^2 v + u^2} = \sqrt{2}u.$$

De tal modo, de (11) el área es

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_R \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dA = \iint_R \sqrt{2}u\, du\, dv \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\, du\, dv \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}u^2\Big]_0^1 dv \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^{2\pi} dv \end{aligned}$$

$$A(S) = \sqrt{2}\,\pi\, u^2$$

Rúbrica:

El estudiante debe estar en la capacidad de resolver ejercicios de áreas de superficies.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No resuelve el ejercicio o solo calcula r_u y r_v. Pero no calcula el producto cruz entre r_u y r_v, no calcula la norma del producto cruz, ni plantea las integrales del área de la superficie.	calcula r_u y r_v, calcula el producto cruz entre r_u y r_v, pero no calcula la norma del producto cruz, ni plantea las integrales del área de la superficie.	Calcula r_u y r_v, calcula el producto cruz entre r_u y r_v, calcula la norma del producto cruz y plantea las integrales del área de la superficie, pero no plantea correctamente las cotas de integración.	Calcula r_u y r_v, calcula el producto cruz entre r_u y r_v, calcula la norma del producto cruz, plantea las integrales del área de la superficie con sus respectivas cotas de integración y resuelve correctamente el ejercicio.
	0-2	3-6	7-12	13-15

TEMA 6-A

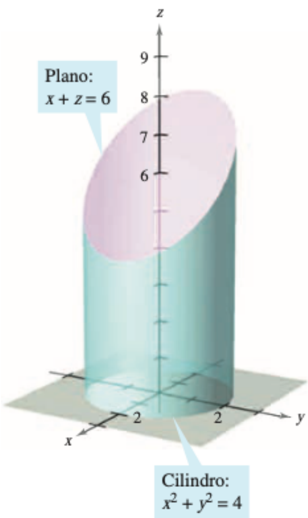
Dada la región Q limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Aplicando el Teorema de Gauss, determine la cantidad de flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (2x^3, 2y^3, 2z^3)$ dirigido hacia afuera a través de la esfera.

Solución Por el teorema de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Flujo a través de } S &= \int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \\
&= \iiint_Q 6(x^2 + y^2 + z^2)\, dV \\
&= 6\int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho \qquad \text{Coordenadas esféricas.} \\
&= 6\int_0^2 \int_0^\pi 2\pi\rho^4 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\rho \\
&= 12\pi \int_0^2 2\rho^4\, d\rho \\
&= 24\pi\left(\frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{768\pi}{5}.
\end{aligned}$$

TEMA 6-B

Dada la región Q limitada por el cilindro $x^2+y^2=4$, el plano $x+z=6$ y el plano XY. Aplicando el Teorema de Gauss, determine la cantidad de flujo del campo vectorial $F(x,y,z)=(x^2+sen\,z, xy+cos\,z, e^y)$ dirigido hacia afuera a través del cilindro.



Solución La evaluación directa de esta integral de superficie sería difícil. Sin embargo, por el teorema de la divergencia, se puede evaluar la integral como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_S\!\!\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_Q \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV \\
&= \iiint_Q (2x + x + 0)\,dV \\
&= \iiint_Q 3x\,dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{6-r\cos\theta} (3r\cos\theta)r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (18r^2\cos\theta - 3r^3\cos^2\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (48\cos\theta - 12\cos^2\theta)d\theta \\
&= \left[48\,\text{sen}\,\theta - 6\left(\theta + \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= -12\pi
\end{aligned}$$

Rúbrica:

<table>
<tr><td rowspan="3">El estudiante debe estar en la capacidad de Conocer y aplicar el Teorema de Gauss</td><th>Inicial</th><th>En desarrollo</th><th>Desarrollado</th><th>Excelente</th></tr>
<tr><td>Reconoce y plantea el Teorema de Gauss, pero no hace ningún calculo.</td><td>Reconoce y plantea el Teorema de Gauss, calcula correctamente la divergencia del campo, pero no plantea correctamente las cotas de integración de las integrales.</td><td>Reconoce y plantea el Teorema de Gauss, calcula correctamente la divergencia del campo vectorial, plantea correctamente las cotas de integración, pero se equivoca integrando.</td><td>Reconoce y plantea el Teorema de Gauss, calcula correctamente la divergencia del campo vectorial, plantea correctamente las cotas de integración y llega al resultado correcto.</td></tr>
<tr><td>0-2</td><td>3-9</td><td>10-17</td><td>18-20</td></tr>
</table>