1 VECTORES en Rn

1.1 DEFINICIÓN
1.2 ENFOQUE GEOMÉTRICO
1.3 IGUALDAD
1.4 OPERACIONES

Los pares ordenados, que ya se han tratado, son los que llamaremos vectores de IR^2. Pero el interés ahora es ser más generales.

1.1 DEFINICIÓN

> Un vector de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto ordenado de n números reales, los cuales son llamados componentes. Lo denotaremos de la siguiente manera:
>
> $$\vec{v} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

Si el vector tiene dos componentes, un par ordenado (x, y), será un vector de $\mathbb{R}^2$.

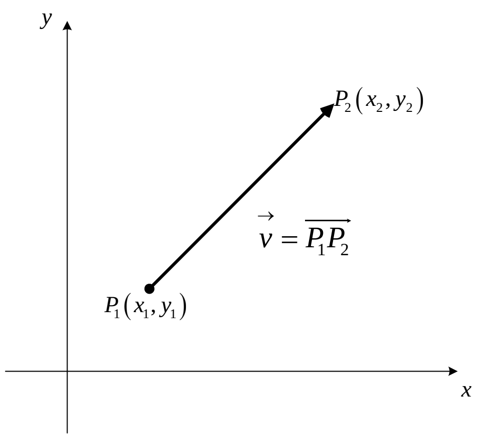
Si el vector tiene tres componentes, un terna ordenada (x, y, z), será un vector de $\mathbb{R}^3$.

Considerar a los vectores de $\mathbb{R}^2$ como pares ordenados o a los vectores de $\mathbb{R}^3$ como ternas ordenadas, nos permite obtener sus propiedades algebraicas, pero existen otras que resultan cuando se define una representación del vector en el plano cartesiano o en el sistema tridimensional.

1.2 ENFOQUE GEOMÉTRICO

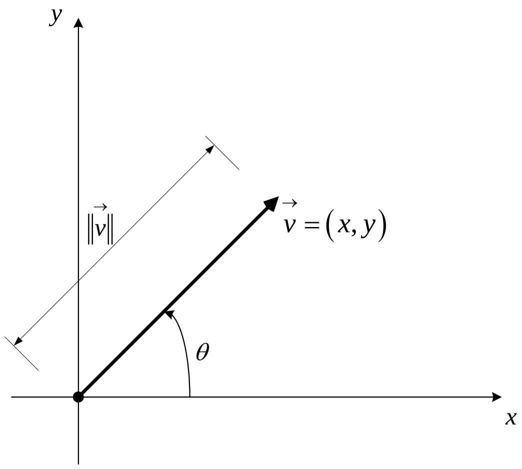
Un vector de $\mathbb{R}^2$ se lo representa en el Plano Cartesiano como un segmento de recta dirigido. Suponga que se tienen los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Si trazamos un segmento de recta dirigido desde P_1 hacia P_2 tenemos una representación del vector

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \left(x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\right)$$



Este vector puede tener muchas otras representaciones equivalentes en el plano cartesiano. Una representación equivalente útil es aquella que se realiza ubicando al vector con el origen como punto de partida.

Surgen características importantes cuando obtenemos una representación geométrica de un vector. Características como la longitud del segmento de recta, la medida de la inclinación de este segmento y hacia donde apunta la flecha que se ubica este segmento.



1.2.1 MAGNITUD O NORMA

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector de R^2. La ***magnitud o norma*** de $\vec{v}$ denotada como $\left\|\vec{v}\right\|$, se define como:

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Note que la norma sería la longitud del segmento de recta que define el vector. Es decir, sería la distancia entre los puntos que lo definen.

Para $\vec{v} = (x_2 - x_1 \ , \ y_2 - y_1)$ sería $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1.2.2 DIRECCIÓN

La ***dirección*** de $\vec{v} = (x, y)$ está definida por la medida del ángulo de inclinación de la línea de acción del segmento de recta; es decir, por el ángulo θ. Observe que:

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

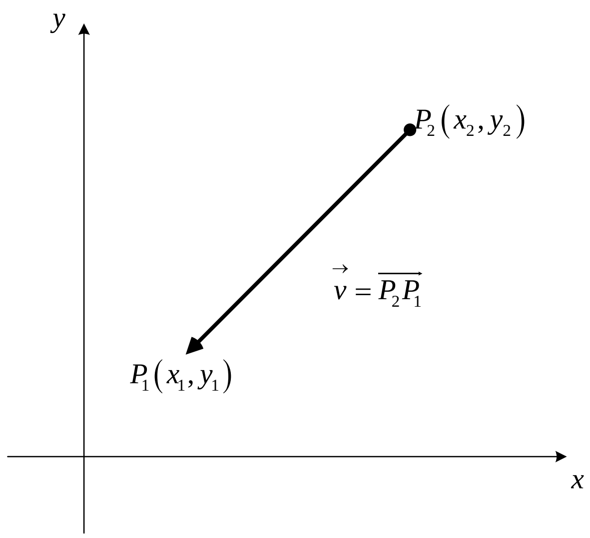
Si el ángulo θ es medido en sentido antihorario se dirá que tiene **dirección positiva**, caso contrario se lo considera **negativo**.

Para $\vec{v} = (x_2 - x_1 \,,\, y_2 - y_1)$ sería $\theta = \arctan \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

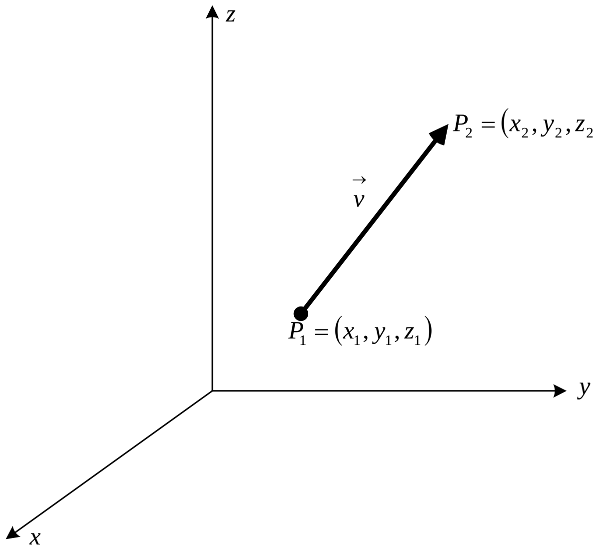
1.2.3 SENTIDO

El ***sentido*** de $\vec{v} = (x, y)$ lo define la flecha dibujada sobre el segmento de recta.

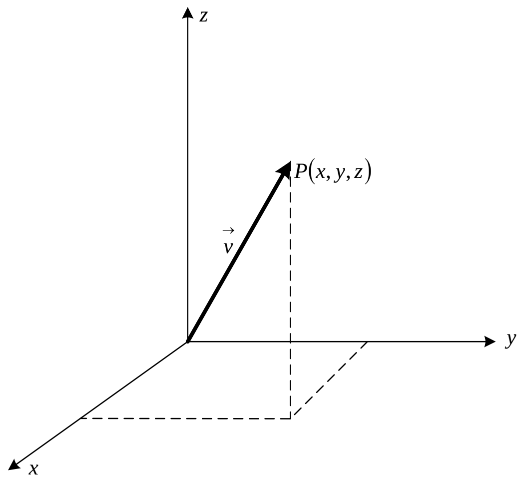
Para $\vec{v} = \overrightarrow{P_2P_1} = (x_1 - x_2 \,,\, y_1 - y_2)$ tenemos:



La representación Geométrica para un vector de $\mathbb{R}^3$ sería análoga a $\mathbb{R}^2$. Suponga que se tienen los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Si trazamos un segmento de recta dirigido desde P_1 hacia P_2 tenemos una representación del vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1, z_1 - z_2)$



Su representación con punto de partida el origen sería:.



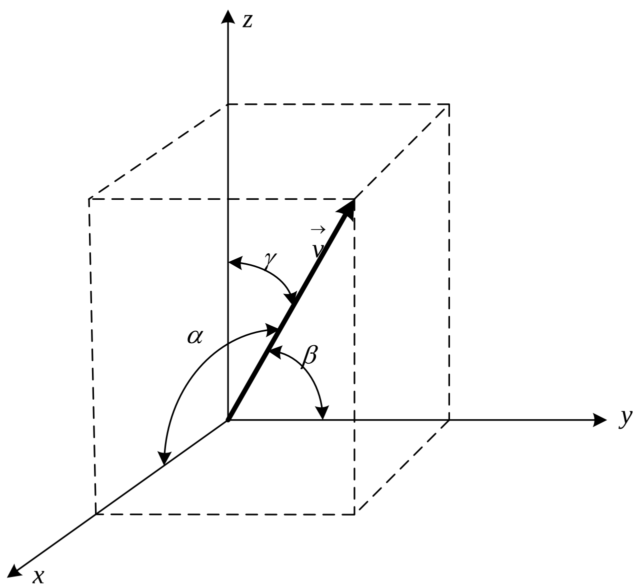
La ***magnitud o norma*** de $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ se define como:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Para $\overrightarrow{v} = \left(x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$ sería:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

La ***dirección*** de $\overrightarrow{v} = \left(x, y, z\right)$ está definida por la medida de los ángulo que forma la línea de acción del segmento de recta con los ejes x, y, z



Los ángulos α, β y γ son llamados **Ángulos Directores.**

Observe que:

$$Cos\alpha = \frac{x}{\left\|\overrightarrow{v}\right\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$Cos\beta = \frac{y}{\left\|\overrightarrow{v}\right\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$Cos\gamma = \frac{y}{\left\|\overrightarrow{v}\right\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ejercicio:

Demostrar que $\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$

Para más dimensiones no disponemos de interpretación geométrica. Pero podemos hacer generalizaciones.

Si $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, entonces la **norma** del vector $\overrightarrow{v}$ se define como:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}}$$

1.3 IGUALDAD

Sean $\overrightarrow{v}_1 = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ y $\overrightarrow{v}_2 = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2$, si y sólo si:

$$(x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge (x_3 = y_3) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)$$

1.4 OPERACIONES

1.4.1 SUMA Y RESTA

Sean $\overrightarrow{v}_1$ y $\overrightarrow{v}_2$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\overrightarrow{v}_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $\overrightarrow{v}_2 = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, Entonces:

1. La **suma** de $\overrightarrow{v}_1$ con $\overrightarrow{v}_2$, denotada como $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$, se define como:

$$\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = (x_1 + y_1\ , x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

2. La **resta** de $\vec{v}_1$ con $\vec{v}_2$, denotada como $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, se define como:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \left(x_1 - y_1\,,\, x_2 - y_2, \cdots, x_n - y_n\right)$$

Ejemplo

Sean $\vec{V}_1 = (-5, 2, 1)$ y $\vec{V}_2 = (3, 0, -2)$, dos vectores de $\mathbb{R}^3$, hallar $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ y $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$

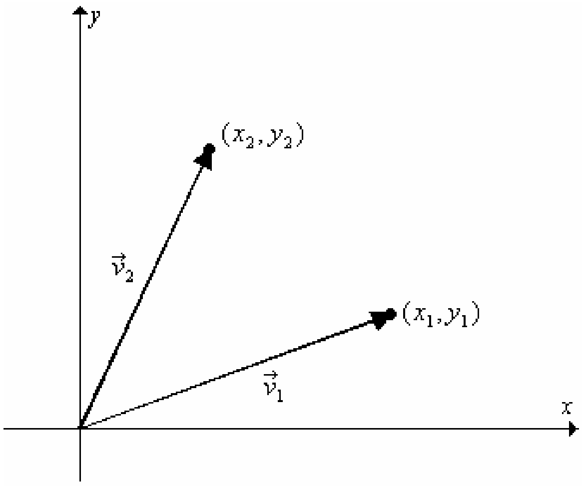
SOLUCIÓN:
Sumando algebraicamente las respectivas componentes tenemos:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \left(-5+3,\ 2+0,\ 1+(-2)\right) = (-2, 2, -1)$$

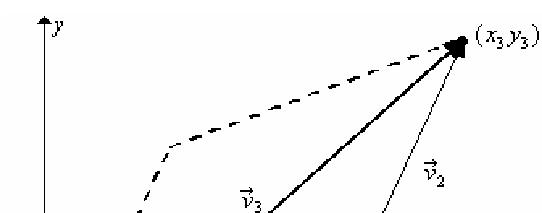
$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \left(-5-3,\ 2-0,\ 1-(-2)\right) = (-8, 2, 3)$$

1.4.1.1 ENFOQUE GEOMÉTRICO

Sea la representación que se muestra a continuación para los vectores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$



Considerando una representación equivalente de $\vec{v}_2$ de tal forma que esté ubicado a continuación de $\vec{v}_1$



Definiendo el vector $\overrightarrow{v_3} = (x_3, y_3)$, observe la figura anterior:

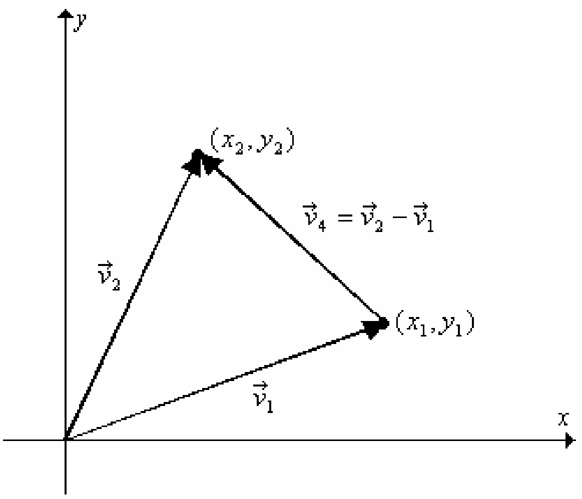
Ahora tenemos que $\overrightarrow{v_2} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1) = (x_3, y_3) - (x_1, y_1)$

Por tanto $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_1}$; es decir:

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$$

El vector de la diagonal mayor del paralelogramo que sustentan lo vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ es el vector suma de $\overrightarrow{v_1}$ con $\overrightarrow{v_2}$.

Por otro lado, definamos el vector $\overrightarrow{v_4}$, observe la figura:

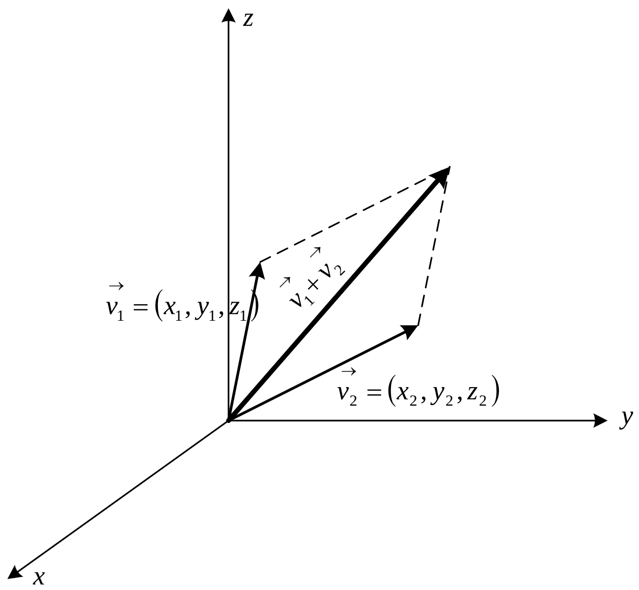


$$\overrightarrow{v_4} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$$

El vector de la diagonal menor del paralelogramo que sustentan lo vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es el vector diferencia.

PREGUNTA: ¿Cómo se representaría $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$?.

Para $\mathbb{R}^3$, el asunto es análogo



1.4.1.2 PROPIEDADES

Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces:

1. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ la suma es conmutativa
2. $\vec{v}_1 + \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) + \vec{v}_3$ la suma es asociativa
3. $\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

   Donde $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ es llamado **Vector Neutro**
4. $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\exists \left(-\vec{v}\right) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{v} + \left(-\vec{v}\right) = \vec{0}$

   Donde $\left(-\vec{v}\right)$ es llamado **Vector Inverso Aditivo** de $\vec{v}$

1.4.2 MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $\vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\alpha \vec{v} = \alpha (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

Ejemplo 1

Sea $\vec{v} = (-5, 2, 1)$ un vector de IR^3, hallar $3\vec{v}$

SOLUCIÓN:

$$3\vec{v} = 3(-5, 2, 1) = (-15, 6, 3)$$

Ejemplo 2

Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ dos vectores de IR^3 tales que: $\vec{v_1} = (3, 0, -2)$ y $\vec{v_2} = (-5, 2, 1)$. Hallar el vector $\vec{v} = 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2}$

SOLUCIÓN:

$$\vec{v} = 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2}$$
$$\vec{v} = (6, 0, -4) - (-15, 6, 3)$$
$$\vec{v} = (21, -6, -7)$$

1.4.2.1 ENFOQUE GEOMÉTRICO

Si $\alpha \in R$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ o $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces:

1. Si $\boxed{\alpha > 1}$, el vector $\alpha \vec{v}$ representa un vector de **mayor magnitud** que $\vec{v}$
2. Si $\boxed{0 < \alpha < 1}$ el vector $\alpha \vec{v}$ representa un vector de **menor magnitud** que $\vec{v}$
3. Si $\boxed{\alpha < -1}$ el vector $\alpha \vec{v}$ representa un vector de **mayor magnitud y de sentido contrario** que $\vec{v}$

4. Si $\boxed{-1 < \alpha < 0}$ el vector $\alpha \vec{v}$ representa un vector de **menor magnitud y de sentido contrario** que $\vec{v}$

1.4.2.2 PROPIEDADES

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overset{\rightarrow}{v_1}, \overset{\rightarrow}{v_2} \in \mathbb{R}^n \left[\alpha \left(\overset{\rightarrow}{v_1} + \overset{\rightarrow}{v_2} \right) = \alpha \overset{\rightarrow}{v_1} + \alpha \overset{\rightarrow}{v_2} \right]$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \left[(\alpha + \beta) \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v} \right]$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \left[\alpha \left(\beta \vec{v} \right) = (\alpha\beta) \vec{v} \right]$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \left[\left\| \alpha \vec{v} \right\| = |\alpha| \left\| \vec{v} \right\| \right]$

1.4.2.3 VECTORES UNITARIOS

Un vector $\vec{u}$ es ***UNITARIO*** si y sólo sí su norma es igual a 1, es decir: $\boxed{\left\| \vec{u} \right\| = 1}$

Ejemplo

El vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ es unitario porque

$$\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

Un vector $\vec{v}$ puede ser expresado de la forma $\vec{v} = \left\| \vec{v} \right\| \vec{u}$ por tanto

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}}$$

Ejemplo

Hallar un vector unitario $\vec{u}$ para el vector $\vec{v} = (1,2,3)$

SOLUCIÓN:

Aplicando la fórmula $\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}}$ tenemos:

$$\vec{u} = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$$
$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$$
$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

comprobando

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14}}$$
$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\frac{14}{14}}$$
$$\left\|\vec{u}\right\| = 1$$

1.4.2.4 VECTORES PARALELOS

Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos si y sólo si el uno es múltiplo escalar del otro; es decir:

$$\vec{v}_1 = k\,\vec{v}_2$$

Observe lo siguiente.

Si $\vec{v}_1 = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ y $\vec{v}_2 = \left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$; y si son paralelos entonces

$$\vec{v}_1 = k\,\vec{v}_2$$
$$\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = k\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$$
$$\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \left(ky_1, ky_2, \cdots, ky_n\right)$$

Por igualdad de vectores

$$\boxed{x_1 = kx_2 \wedge y_1 = ky_2 \wedge \cdots \wedge x_n = ky_n}$$

o también

$$\boxed{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} = k}$$

Se concluye que, cuando los **vectores** son **paralelos**, existe **proporcionalidad entre sus componentes**.

Ejemplo

El vector $\vec{v}_1 = (3,-2)$ es paralelo al vector $\vec{v}_2 = (6,-4)$ porque $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ o también porque $\frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} = 2$

Por otro lado. Note que cualquier vector de R^2, $\vec{v} = (x, y)$, puede ser expresado en términos de los vectores $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (x, y) = x(1,0) + y(0,1) \\ &= x\vec{i} + y\vec{j}\end{aligned}$$

Es decir, tenemos otra representación algebraica del vector.

Ejemplo

El vector $\vec{v} = (2,-3)$ puede ser expresado de la forma $\vec{v} = 2i - 3j$

Un vector de R^3, $\vec{v} = (x, y, z)$, puede ser expresado en término de los vectores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$

$$\vec{v} = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ejemplo

El vector $\vec{v} = (2,-5,3)$ también se lo puede denotar de la forma $\vec{v} = 2i - 5j + 3k$

Con lo anterior surge la siguiente definición

1.4.2.5 COMBINACIÓN LINEAL

Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \cdots, \vec{v}_n$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Una ***Combinación Lineal*** de estos vectores es una expresión de la forma: $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \ldots + a_n\vec{v}_n$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Observe que el resultado de la combinación lineal es otro vector de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

Con los vectores $\vec{v}_1 = (1,3)$ y $\vec{v}_2 = (5,2)$ al formar la siguiente combinación lineal $3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$ tenemos:

$$\begin{aligned} 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 &= 3(1,3) - 2(5,2) \\ &= (3,9) - (10,4) \\ &= (-7,5) \end{aligned}$$

El resultado el vector $\vec{v} = (-7,5)$

También puede ser posible expresar un vector en combinación lineal de otros vectores.

Ejemplo

Exprese y encuentre la combinación lineal del vector $\vec{v} = (1,1)$ en términos de $\vec{v}_1 = (1,3)$ y $\vec{v}_2 = (5,2)$

SOLUCIÓN:

La combinación lineal $\vec{v} = (1,1)$ en términos de $\vec{v}_1 = (1,3)$ y $\vec{v}_2 = (5,2)$ sería:

$$\begin{gathered} \vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \\ (1,1) = \alpha(1,3) + \beta(5,2) \end{gathered}$$

Ahora, el objetivo sería determinar el valor de α y β.

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\alpha = \frac{3}{13}$ y $\beta = \frac{2}{13}$

Por tanto $\boxed{\begin{array}{l} \vec{v} = \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} \\ (1,1) = \frac{3}{13}(1,3) + \frac{2}{13}(5,2) \end{array}}$

Ejercicios propuestos 1.1

1. Sean $\vec{u} = (1,-2,3)$, $\vec{v} = (-3,2,5)$, $\vec{w} = (2,-4,1)$. Calcular:

   a) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $\vec{u} - \vec{w} - \vec{v}$

   b) $3\vec{v} + 5\vec{w}$ d) $2\vec{u} - 4\vec{v} + 7\vec{w}$

2. Dados los vectores $\vec{v}_1 = \langle -3,4,-2 \rangle$ $\vec{v}_2 = \langle 3,4,-6 \rangle$ $\vec{v}_3 = \langle 4,-1,5 \rangle$. Halle un vector $\vec{v}_4$ tal que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = (-1,4,5)$

   a) $\langle -5,-3,-8 \rangle$ b) $\langle -5,3,-8 \rangle$ c) $\langle -5,-3,8 \rangle$

   d) $\langle 5,-3,-8 \rangle$ e) $\langle -5,-3,-6 \rangle$

3. Sean los vectores de R^3, $\vec{v}_1 = (2,-3,4)$, $\vec{v}_2 = (2,3,-1)$, $\vec{v}_3 = (4,8,2)$, $\vec{v}_4 = (1,0,0)$. Entonces un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v} = \vec{v}_4$, es:

   a) $\vec{v} = (7,17,-4)$ b) $\vec{v} = (6,8,9)$ c) $\vec{v} = (6,8,9)$

   d) $\vec{v} = (-7,17,4)$ e) $\vec{v} = (7,-17,-4)$

4. Sean los vectores $\vec{v}_1 = (1,3,0)$, $\vec{v}_2 = (2,3,1)$ $\vec{v}_4 = (4,-1,-7)$, determine los valores de a y b para que la combinación $\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ sea verdadera:

   a) $\boldsymbol{a} = 20/3$. $\boldsymbol{b} = 7$ d) $\boldsymbol{a} = -14/3$. $\boldsymbol{b} = 13/3$

   b) $\boldsymbol{a} = 18$. $\boldsymbol{b} = -7$ e) Elija esta opción si a y b no existe

   c) $\boldsymbol{a} = 20/3$. $\boldsymbol{b} = -7$

5. Dados los vectores $\vec{v}_1 = (1,-2,2)$; $\vec{v}_2 = (2,-2,0)$; $\vec{v}_3 = (0,1,7)$; $\vec{v} = (-2,5,3)$, entonces para que se cumpla que $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = \vec{v}$; el valor de $k_1 + k_2 + k_3$ debe ser:

   a) -2 b) -5 c) -1 d) 5 e) 2

1.4.3 PRODUCTO PUNTO (PRODUCTO ESCALAR)

Sean $\vec{v_1} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $\vec{v_2} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. El **producto punto** de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$, denotado como $\vec{v_1} \bullet \vec{v_2}$, se define como:

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \bullet (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n$$

Note que el resultado del producto punto es un número real.

Ejemplo 1

Si $\vec{v_1} = (3,1)$ y $\vec{v_2} = (-1,4)$ entonces

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = (3)(-1) + (1)(4) = -3 + 4 = 1$$

Ejemplo 2

Hallar $\vec{v_1} \bullet \vec{v_2}$ para $\vec{v_1} = (3,0,-2)$ y $\vec{v_2} = (-5,2,1)$

SOLUCIÓN:

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = (3,0,-2) \bullet (-5,2,1)$$

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = (3)(-5) + (0)(2) + (-2)(1)$$

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = -15 + 0 - 2$$

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = -17$$

Ejemplo 3

Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que: $\vec{v_1} = (-2,1,3,-1)$ y $\vec{v_2} = (3,0,-1,2)$. Hallar $\vec{v_1} \bullet \vec{v_2}$

SOLUCIÓN:

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = (-2)(3) + (1)(0) + (3)(-1) + (-1)(2)$$

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = -11$$

1.4.3.1 PROPIEDADES

Sean $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

1. $\overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} \bullet \overrightarrow{v_1}$ El producto escalar es conmutativo

2. $\overrightarrow{v_1} \bullet \left(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} \right) = \overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2}$ El producto escalar es distributivo

3. $\left(\alpha \overrightarrow{v_1} \right) \bullet \left(\beta \overrightarrow{v_2} \right) = \alpha\beta \left(\overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2} \right)$

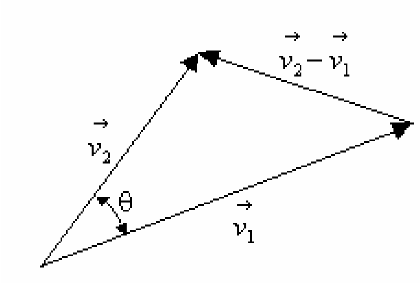
Además, si $\overrightarrow{v} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right)$ entonces

$$\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right) \bullet \left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}$$

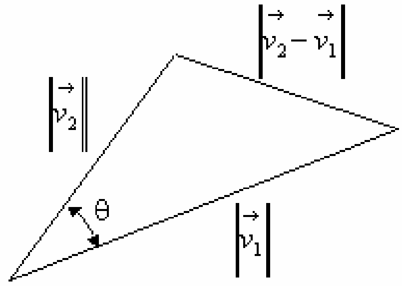
Por lo tanto $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} = \left\| \overrightarrow{v} \right\|^2$ o también $\left\| \overrightarrow{v} \right\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v}}$

1.4.3.2 ENFOQUE GEOMÉTRICO

Suponga que θ es el ángulo que forman entre si los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$.



Consideremos el triángulo:



Aplicando la ley del coseno, tenemos:

$$\left\|\vec{v}_2-\vec{v}_1\right\|^2=\left\|\vec{v}_1\right\|^2+\left\|\vec{v}_2\right\|^2-2\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\|\cos\theta$$

Aplicando propiedades y simplificando:

$$\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)\bullet\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)=\vec{v}_1\bullet\vec{v}_1+\vec{v}_2\bullet\vec{v}_2-2\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\|\cos\theta$$

$$\vec{v}_2\bullet\vec{v}_2-\vec{v}_2\bullet\vec{v}_1-\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2+\vec{v}_1\bullet\vec{v}_1=\vec{v}_1\bullet\vec{v}_1+\vec{v}_2\bullet\vec{v}_2-2\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\|\cos\theta$$

$$-2\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2=-2\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\|\cos\theta$$

Finalmente, resulta que:

$$\boxed{\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2=\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\|\cos\theta}$$

La utilidad de la última expresión la observamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Hallar el ángulo θ que forman los vectores $\vec{v}_1=\left(1,\sqrt{3}\right)$ y $\vec{v}_2=\left(-\sqrt{3},-1\right)$

SOLUCIÓN:

Aplicando la propiedad tenemos:

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2}{\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\|}=\frac{\left(1,\sqrt{3}\right)\bullet\left(-\sqrt{3},-1\right)}{\left\|\left(1,\sqrt{3}\right)\right\|\left\|\left(-\sqrt{3},1\right)\right\|}=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{(2)(2)}=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$\theta=\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=5\frac{\pi}{6}$$

Ejercicio Propuesto 1.2

1. Dados los vectores: $\vec{v}_1=(1,2,-1)$ y $\vec{v}_2=(2,1,0)$ el resultado de la operación:

$$\left(3\vec{v}_1-2\vec{v}_2\right)\bullet\left(\vec{v}_2-2\vec{v}_1\right)$$

es:

a) 13 b) -39 c) -68 d) 39 e) -13

2. Sean los vectores de R^3, $\vec{v}_1 = (-1,2,1)$, $\vec{v}_2 = (-1,-2,1)$ y $\vec{v}_3 = (0,-1,0)$. Entonces el valor de $2\left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)\left\|\vec{v}_2\right\|^2 - 2\left[\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) \bullet \vec{v}_3\right]$

   a) $(0,-24,0)$ b)-24 c) $(24,0,0)$ d)12 e)24

3. Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ vectores de R^2, tales que: $\vec{v}_1 = (5,2)$ y $\vec{v}_2 = (7,-2)$. Entonces un vector $\vec{v}_3$ tal que: $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_3 = 38$ y $\vec{v}_3 \bullet \vec{v}_2 = 34$ es:

   a) $\vec{v}_3 = (4,6)$ b) $\vec{v}_3 = (6,9)$ c) $\vec{v}_3 = (6,4)$

   d) $\vec{v}_3 = (6,0)$ e) $\vec{v}_3 = (4,9)$

4. Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ vectores de IR^3 tales que: $\vec{v}_1 = (3,-2,1)$, $\vec{v}_2 = (-5,1,0)$ y $\vec{v}_3 = (0.4,0)$. Entonces al efectuar la operación

$$3\left\|\vec{v}_1\right\|^2 - 4\left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right) - 6\left(\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_3\right) - 2\left\|\vec{v}_3\right\|^2$$

   se obtiene como resultado:
   a)54 b)110 c)84 d)184 e)52

1.4.3.3 VECTORES ORTOGONALES

> Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales si y sólo si $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$

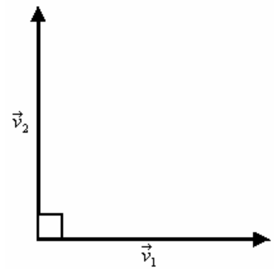
Ejemplo

Los vectores $\vec{v}_1 = (1,2,-1)$ y $\vec{v}_2 = (-3,2,1)$ son ortogonales, porque

$$\boxed{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = (1)(-3) + (2)(2) + (-1)(1) = 0}$$

El hecho de que $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$ significa que el ángulo entre ellos tiene medida de 90°, es decir $\theta = \frac{\pi}{2}$. ¿Porqué?

En este caso se dice que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores perpendiculares.



Este concepto puede se utilizado en problemas de diseño, como el siguiente:

Ejemplo

Dados los vectores $\overrightarrow{v_1} = \left(a^2 - 1, 2, 3\right)$ y $\overrightarrow{v_2} = \left(-2, -a, 5/24\right)$, encontrar los valores de " a " para que sean ortogonales.

SOLUCIÓN:

Para que $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ sean ortogonales se debe cumplir que $\overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2} = 0$ **,** entonces

$\overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2} = \left(a^2 - 1, 2, 3\right) \bullet \left(-2, -a, \frac{5}{24}\right) = -2a^2 + 2 - 2a + \frac{5}{8}$ por lo tanto

$$-2a^2 - 2a + \frac{21}{8} = 0$$

$$16a^2 + 16a - 21 = 0$$

$$a = -\frac{7}{4} \quad \vee \quad a = \frac{3}{4}$$

1.4.3.4 VECTORES ORTONORMALES

Los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ de $\mathbb{R}^n$ son ***ORTONORMALES*** si y sólo si:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_i} \bullet \overrightarrow{v_j} = 1 & cuando \quad i = j \\ \overrightarrow{v_i} \bullet \overrightarrow{v_j} = 0 & cuando \quad i \neq j \end{cases}$$

Es decir, un conjunto de vectores es ortonormal si y sólo si está constituido por vectores que son unitarios y ortogonales a la vez.

Ejemplo 1

Los vectores $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$ son ortonormales porque $\|i\| = 1$, $\|j\| = 1$ y $i \bullet j = 0$

Ejemplo 2

Los vectores $\hat{\boldsymbol{i}} = (1,0,0)$, $\hat{\boldsymbol{j}} = (0,1,0)$, $\hat{\boldsymbol{k}} = (0,0,1)$ son ortonormales, porque $\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{k} = 0$ y además $\|\boldsymbol{i}\| = \|\boldsymbol{j}\| = \|\boldsymbol{k}\| = 1$

Ejercicios Propuestos 1.3

1. Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores en IR^3, tales que $\vec{v}_1 = \langle 2,1,1 \rangle$ y $\vec{v}_2 = \langle 1,1,1 \rangle$. Una de las siguientes proposiciones es VERDADERA identifíquela:
   a) $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales.
   b) $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos.
   c) $\left\| 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_1 \right\| = 3\sqrt{2}$
   d) $2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_1 = \langle 1,0,-1 \rangle$
   e) $\left\| 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_1 \right\| = \sqrt{3}$

2. Sea los vectores de: $\vec{v}_1 = (k, 3, k-1)$ y $\vec{v}_2 = (3, -1, k)$. Determine los valores de k tales que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sean ORTOGONALES.
   a)3 y 1 b)3 y -1 c)-3 y -1 d)-3 y 1 e)0 y -3

3. La SUMA DE LOS VALORES de "a" que hacen que los vectores $\vec{v}_1 = \langle 1-a, 3a, 1 \rangle$ y $\vec{v}_2 = \langle a, -1, 3 \rangle$ SEAN ORTOGONALES, es:
   a)-3 b)-1 c)-2 d) 0 e) 3

4. Sean los vectores $\vec{A} = (1,-2,3)$, $\vec{B} = (4,-1,2)$ y $\vec{C} = (2,0,-3)$ encontrar el valor de t, tal que $\vec{A} + t\vec{B}$ sea ortogonal a $\vec{C}$.

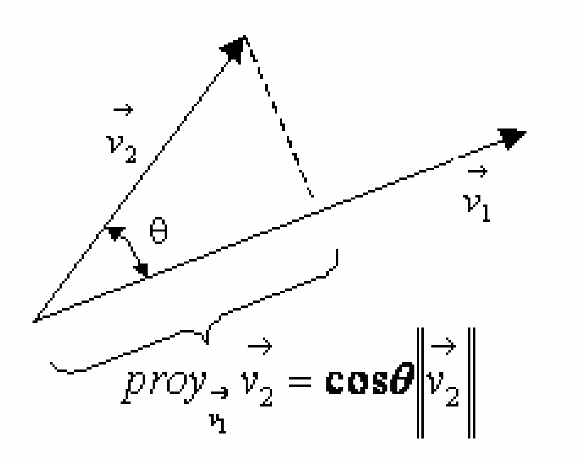
5. Si se tienen los vectores $\vec{v}_1 = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v}_2 = (b-1, 2a, -3)$, si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales y $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 - 2\left(a, a-1, -\frac{3}{2}\right)$, entonces los valores de a y b, respectivamente son:.
   a) 2 y $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ y -2 c) -1 y $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ y -1 e) $-\frac{1}{2}$ y 1

6. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ vectores de R^3 tales que: $\vec{v}_1 = (3,1,2)$, $\vec{v}_2 = (2,1,-1)$ y $\vec{v}_3 = b\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.
   Entonces el VALOR de "b" para que $\vec{v}_3$ sea ortogonal a $\vec{v}_2$ es:
   a) $-5/7$ b) $-2/7$ c) $12/5$ d) $-5/12$ e) $-12/5$

1.4.3.5 PROYECCIONES

1.4.3.5.1 PROYECCIÓN ESCALAR

La proyección escalar de $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$, denotada como $proy_{\vec{v}_1} \vec{v}_2$, es la magnitud de la sombra que hace $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$. Observe la figura.



Del triángulo tenemos : $\cos\theta = \dfrac{proy_{\vec{v}_1} \vec{v}_2}{\left\| \vec{v}_2 \right\|}$.

Despejando, resulta: $proy_{\vec{v}_1} \vec{v}_2 = \cos\theta \left\| \vec{v}_2 \right\|$

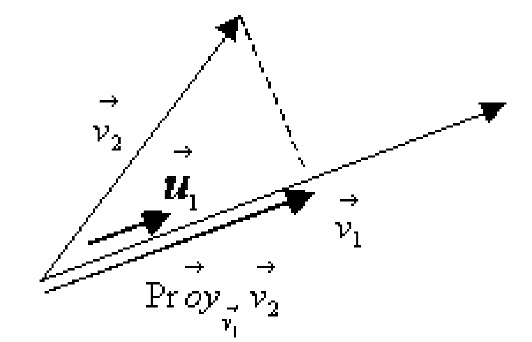
Multiplicando y dividiendo por $\left\| \vec{v}_1 \right\|$ resulta:

$$proy_{\vec{v}_1} \vec{v}_2 = \frac{\cos\theta \left\| \vec{v}_2 \right\| \left\| \vec{v}_1 \right\|}{\left\| \vec{v}_1 \right\|} = \frac{\left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 \right)}{\left\| \vec{v}_1 \right\|} = \left(\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 \right)$$

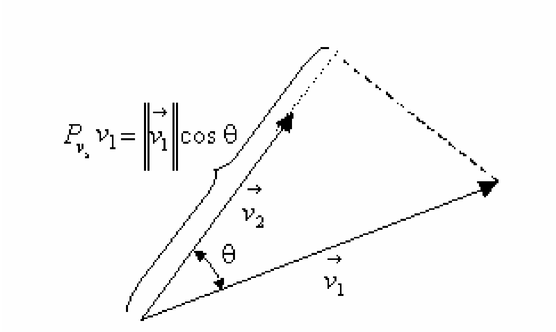
1.4.3.5.2 PROYECCIÓN VECTORIAL

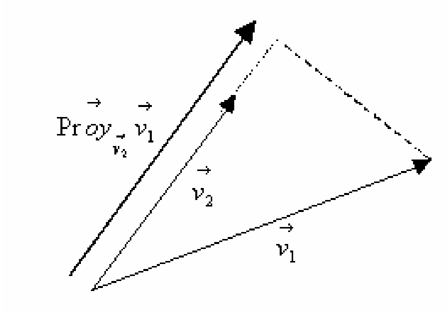
El vector proyección de $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$, denotada como $\overrightarrow{proy}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2$, es:

$$\overrightarrow{proy}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2 = \left(\frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2}{\left\|\vec{v}_1\right\|}\right)\frac{\vec{v}_1}{\left\|\vec{v}_1\right\|} = \left(\vec{u}_1 \bullet \overrightarrow{v_2}\right)\vec{u}_1$$



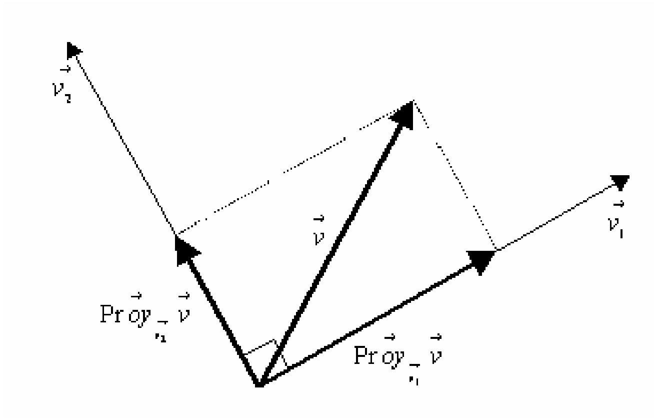
Realice el trabajo análogo para obtener la proyección escalar y la proyección vectorial de $\vec{v}_1$ sobre $\vec{v}_2$.





1.4.3.6 DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL

Suponga que se tiene dos vectores ortogonales $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y otro vector $\vec{v}$, como se muestra en la figura.



Suponga que se desea descomponer (expresar) $\vec{v}$ en términos de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. En la expresión $\vec{v} = C_1 \vec{v}_1 + C_2 \vec{v}_2$ realizando el producto punto con $\vec{v}_1$ y despejando, tenemos:

$$\vec{v} \bullet \vec{v}_1 = C_1 \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1 + C_2 \underbrace{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_1}_{0}$$

$$\vec{v} \bullet \vec{v}_1 = C_1 \left\| \vec{v}_1 \right\|^2$$

$$C_1 = \frac{\vec{v} \bullet \vec{v}_1}{\left\| \vec{v}_1 \right\|^2}$$

Análogamente, realizando el producto punto ahora con $\vec{v}_2$, encontramos:

$$\vec{v} \bullet \vec{v}_2 = C_1 \underbrace{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2}_{0} + C_2 \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2$$

$$\vec{v} \bullet \vec{v}_2 = C_2 \left\| \vec{v}_2 \right\|^2$$

$$C_2 = \frac{\vec{v} \bullet \vec{v}_2}{\left\| \vec{v}_2 \right\|^2}$$

Es decir:

$$\vec{v} = C_1 \vec{v}_1 + C_2 \vec{v}_2$$

$$= \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{v}_1}{\left\| \vec{v}_1 \right\|^2} \right) \vec{v}_1 + \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{v}_2}{\left\| \vec{v}_2 \right\|^2} \right) \vec{v}_2$$

$$\vec{v} = \left(\vec{v} \bullet \vec{u}_1 \right) \vec{u}_1 + \left(\vec{v} \bullet \vec{u}_2 \right) \vec{u}_2$$

Observe que:

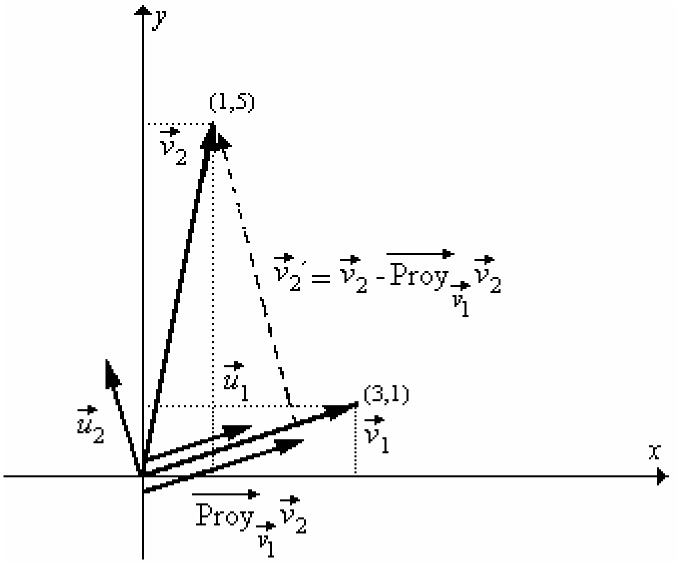
$$\boxed{\vec{v} = \operatorname{Pr} oy_{\vec{v}_1} \vec{v} + \operatorname{Pr} oy_{\vec{v}_2} \vec{v}}$$

Ejemplo

Sean $\vec{v}_1 = (3,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,5)$ vectores de R^2. Hallar dos vectores ortonormales $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, Tal que $\vec{u}_1$ sea paralelo a $\vec{v}_1$ y $\vec{u}_2$ sea ortogonal a $\vec{v}_1$.

SOLUCIÓN

Lo que queremos hacer, es encontrar dos vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ tales que:



Primero, hallamos un vector unitario en la misma dirección (paralelo) de $\vec{v}_1$.

Entonces $\vec{u}_1 = \dfrac{(3,1)}{\sqrt{10}} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$

SEGUNDO, hallamos un vector $\vec{v}_2\,'$ que sea ortogonal a $\vec{v}_1$.

Observe que $\vec{v}_2\,' = \vec{v}_2 - \overrightarrow{\Pr oy}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2$ entonces:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2\,' &= \vec{v}_2 - \overrightarrow{\Pr oy}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2 \\
&= \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \frac{8}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}24/10\\8/10\end{pmatrix} \\
\vec{v}_2\,' &= \begin{pmatrix}-7/5\\21/5\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego $\vec{u}_2 = \dfrac{\vec{v}_2\,'}{\left\|\vec{v}_2\,'\right\|} = \dfrac{\frac{7}{5}(-1,3)}{\frac{7}{5}\sqrt{10}} = \dfrac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

Ejemplo

Exprese y determine la combinación lineal del vector $\vec{v} = (1,1)$ en término de los vectores ortogonales $\vec{u}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ y $\vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

SOLICIÓN:

Como $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son vectores ortonormales, empleamos la formula

$$\vec{v} = \Pr oy_{\vec{v}_1} \vec{v} + \Pr oy_{\vec{v}_2} \vec{v}$$

$$\vec{v} = \left(\vec{v} \bullet \vec{u}_1\right)\vec{u}_1 + \left(\vec{v} \bullet \vec{u}_2\right)\vec{u}_2$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-1/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-1/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 4/\sqrt{10}\begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix} + 2/\sqrt{10}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}\end{pmatrix}$$

Utilizando esta propiedad no es necesario resolver sistema alguno

Ejercicios Propuestos 1.4

1. Sean $\vec{v}_1 = (1,3)$ y $\vec{v}_2 = (1,1)$. Descomponer $\vec{v}_1$ en dos vectores, un vector $\vec{X}$ paralelo a $\vec{v}_2$ y un vector $\vec{Y}$ ortogonal a $\vec{v}_2$.

   Resp. $\vec{X} = (2,2)$ y $\vec{Y} = (-1,1)$

2. Sean los vectores $\vec{V}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$.

   a) Determinar la proyección vectorial de $\vec{V}_1$ sobre el vector $\vec{V}_2$.

   b) Calcular la componente de $\vec{V}_1$ perpendicular a $\vec{V}_2$.

   Resp. a) $\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{V}_2} \vec{V}_1} = \left(-\frac{15}{22}, -\frac{15}{22}, \frac{10}{22}\right)$ b)

1.4.4. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO CRUZ

Sean $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vectores de R^3. El **Producto Vectorial** de $\vec{v}_1$ con $\vec{v}_2$ denotado como $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ se define como:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(y_1 z_2 - z_1 y_2, -\left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right), x_1 y_2 - y_1 x_2\right)$$

Una manera práctica para obtener el resultado de la operación Producto Cruz entre dos vectores es resolver el siguiente determinante, para la primera fila:

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo.

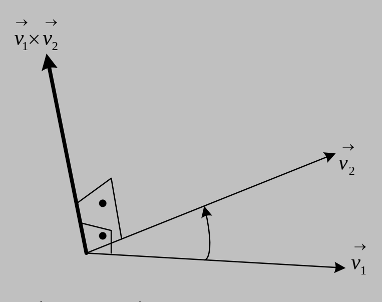
Sea $\overrightarrow{v_1} = (1,2,-1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (2,-1,0)$ entonces

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - 5k$$

1.4.4.1 PROPIEDADES.

Sean $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ vectores de $\mathbb{R}^3$

1. El vector $\left(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right)$ es tanto perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ como a $\overrightarrow{v_2}$
2. El sentido del vector $\left(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right)$ se lo puede obtener empleando la mano derecha. Mientras los dedos se dirigen desde $\overrightarrow{v_1}$ hacia $\overrightarrow{v_2}$, el pulgar indica la dirección de $\left(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right)$.



3. $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = -\left(\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_1}\right)$

4. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{0}$
5. Si $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$ entonces $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$
6. $\left(\alpha_1 \vec{v}_1\right) \times \left(\alpha_2 \vec{v}_2\right) = \alpha_1 \alpha_2 \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$
7. $\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) + \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_3\right)$
8. $\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|^2 = \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)^2$

De la última expresión, empleando la propiedad del producto escalar, se obtiene un resultado muy importante:

$$
\begin{aligned}
\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|^2 &= \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)^2 \\
&= \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\| \cos\theta\right)^2 \\
&= \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 \cos^2\theta \\
&= \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 \left[1 - \cos^2\theta\right] \\
\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|^2 &= \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 sen^2\theta
\end{aligned}
$$

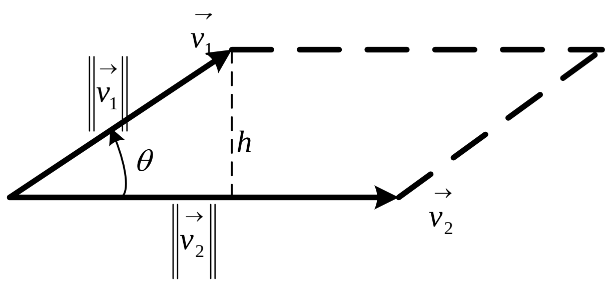
Finalmente:

$$\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\| = \left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\| sen\theta$$

1.4.4.2 APLICACIONES

1.4.4.2.1 CALCULO DEL ÁREA DEL PARALELOGRAMO SUSTENTADO POR DOS VECTORES.

Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dos vectores, no paralelos. Observe la figura:



Tomando como base a $\vec{v}_2$, tenemos:

$$Area = base \bullet altura$$
$$= \left\| \vec{v}_2 \right\| h$$

Observe que $\boxed{sen\theta = \dfrac{h}{\left\| \vec{v}_1 \right\|}}$ entonces $\boxed{Area = \left\| \vec{v}_2 \right\| \left\| \vec{v}_1 \right\| sen\theta}$

Y por la propiedad del producto cruz:

$$Area = \left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|$$

Ejemplo 1

Hallar el área del triángulo sustentado por los vectores $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$ y $\vec{v}_2 = (2, -1, 0)$

SOLUCIÓN:

El área del triángulo sustentado por dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es la mitad del área del paralelogramo sustentado por los vectores, es decir:

$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|}{2}$$

Como $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - 5k$

entonces

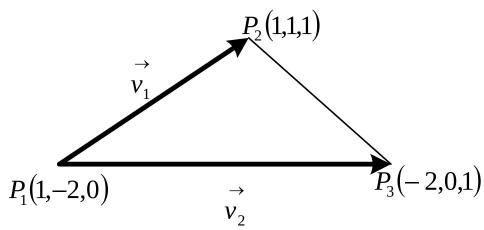
$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|}{2} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

Ejemplo 2

Hallar el área del triángulo que tiene por vértices los puntos $(1, -2, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(-2, 0, 1)$

SOLUCIÖN:

Primero se forman dos vectores entre los puntos dados, tomando arbitrariamente el orden de estos puntos; luego se procede de manera análoga a lo mencionado anteriormente debido a que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.



En este caso, $\vec{v_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1-1, 1-(-2), 1-0) = (0,3,1)$

$\vec{v_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = (-2-1, 0-(-2), 1-0) = (-3,2,1)$

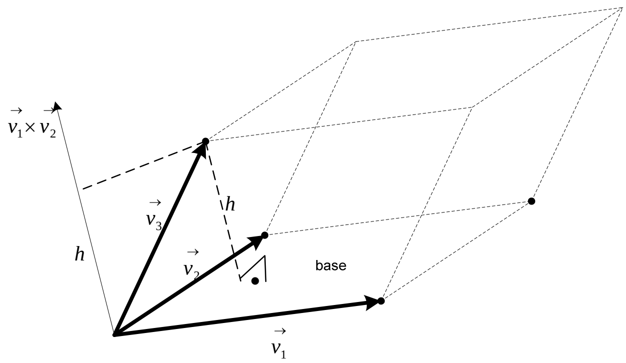
Entonces,

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i - 3j - 9k$$

$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \right\|}{2} = \frac{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (9)^2}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2}$$

1.4.4.2.2 CALCULO DEL VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO SUSTENTADO POR TRES VECTORES

Sean $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ tres vectores. Observe la figura.



Tomando como base el paralelogramo sustentado por $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$, la altura h del paralelepípedo será la proyección escalar de $\vec{v_3}$ sobre $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$, entonces:

$$Volumen = Area\ base \times altura$$

Donde $Area\ base = \left\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \right\|$

$$altura = h = \left| \operatorname{Pr} oy_{\vec{v_1} \times \vec{v_2}} \vec{v_3} \right| = \left| \frac{\left(\vec{v_1} \times \vec{v_2} \right) \bullet \vec{v_3}}{\left\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \right\|} \right|$$

Por tanto.

$$Volumen = \left\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \right\| \left| \frac{\left(\vec{v_1} \times \vec{v_2} \right) \bullet \vec{v_3}}{\left\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \right\|} \right|$$

Finalmente, simplificando resulta:

$$Volumen = \left| \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3 \right|$$

Esta última expresión es denominada, EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, y su interpretación es el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$. Observe además que no importa el orden de operación de los vectores, ¿por qué?.

Ejemplo

Hallar el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\vec{v}_1 = (1,-2,1)$, $\vec{v}_2 = (2,0,-1)$ y $\vec{v}_3 = (1,2,3)$.

SOLUCIÖN.

Por lo definido anteriormente,

$$Volumen = \left| \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3 \right| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 14 + 4 = 20u^3$$

Ejercicios propuestos 1.4

1. Sean los vectores $\vec{A} = A_x\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - B_z\hat{k}$. Calcule los valores de A_x y B_z para los cuales $\vec{A} \times \vec{B}$ es paralelo a: a) al eje x b) al eje y

   Resp. a) $A_x = \frac{15}{2}$ $B_z = \frac{4}{5}$ b) $A_x = \frac{15}{2}$ $B_z = \frac{4}{5}$

2. Calcular el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos (-3,2,4); (2,1,7) ; (4,2,6)

   Resp. $Area = \frac{\sqrt{174}}{2}$

3. Dados tres vectores $\vec{v}_1 = (5,2,6)$, $\vec{v}_2 = (-1,8,3)$, $\vec{v}_3 = (2,-7,4)$ forman un tetraedro con vértice en el origen. Determinar su altura desde el origen. Resp. $h = \frac{77}{\sqrt{746}}$

4. Un tetraedro tiene por base el triángulo de vértices (3.-6,-1) , (4,4,-2) y (-3,-1,2); Si el vértice opuesto es el punto (8,10,6) , determine su altura. Resp. $h = \frac{67}{\sqrt{5459}}$

5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores no nulos, diferentes tales que: $\vec{w}_1 = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{w}_3 = \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$. Hallar $\vec{w}_1 \bullet \left(\vec{w}_2 \times \vec{w}_3\right)$ Resp. 0

Misceláneos

1. Demuestre que:

   a. $\left|\vec{v_1} \bullet \vec{v_2}\right| \leq \left\|\vec{v_1}\right\|\left\|\vec{v_2}\right\|$ (DESIGUALD DE SCHWARZ)

   b. $\left\|\vec{v_1} + \vec{v_2}\right\| \leq \left\|\vec{v_1}\right\| + \left\|\vec{v_2}\right\|$ (DESIGUALDAD TRIANGULAR)

   c. $\left\|k\vec{v}\right\| = |k|\left\|\vec{v}\right\|$; $k \in \mathbb{R}$

2. Determine si las proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique formalmente.

   a. Si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores unitarios entonces $\left\|\vec{v_1} + \vec{v_2}\right\| = 2$

   b. Si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores ortogonales entonces $\left\|\vec{v_1} + \vec{v_2}\right\| = 2$

   c. Si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores ortogonales entonces $\left\|\vec{v_1} - \vec{v_2}\right\|^2 = \left\|\vec{v_1} + \vec{v_2}\right\|^2$

   d. Si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores ortogonales entonces $\left\|\vec{v_1} + \vec{v_2}\right\|^2 = \left\|\vec{v_1}\right\|^2 + \left\|\vec{v_2}\right\|^2$

   e. Si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores ortogonales entonces $\left\|v_1 - v_2\right\|^2 = \left\|v_1\right\|^2 + \left\|v_2\right\|^2$

   f. Si $\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = \vec{v_1} \bullet \vec{v_3}$ entonces $\vec{v_2} = \vec{v_3}$

   g. Si los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son paralelos entonces $\left|\left(\vec{v_1} \bullet \vec{v_2}\right)\right| = \left\|\vec{v_1}\right\|\left\|\vec{v_2}\right\|$

   h. Si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores de R^2, donde $\left\|\vec{v_1}\right\| = \left\|\vec{v_2}\right\|$ entonces $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ y $\vec{v_1} - \vec{v_2}$ son ortogonales.

   i. Sean $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ vectores en el plano tales que $\left\|\vec{u_1}\right\| = \sqrt{7}$, $\left\|\vec{u_2}\right\| = \sqrt{2}$, $\vec{v_1} = 2\vec{u_1} - 5\vec{u_2}$ y $\vec{v_2} = -\vec{u_1} + 3\vec{u_2}$. Si $\vec{u_1} \bullet \vec{u_2} = 4$ entonces $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son ortogonales.

   j. Si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores de R^2 y $\alpha \in R$. Si $\left\|\vec{v_1} + \vec{v_2}\right\| = \left\|\vec{v_1}\right\| + \left\|\vec{v_2}\right\|$, entonces $\vec{v_1} = \alpha\vec{v_2}$

   k. Si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores de R^2 entonces $\left\|\vec{v_1} + \vec{v_2}\right\| + \left\|\vec{v_1} - \vec{v_2}\right\| = 2\left\|\vec{v_1}\right\|$.

   l. Si los vectores $\vec{v_1} = (0,0,a)$, $\vec{v_2} = (3,4,0)$ y $\vec{v_3} = (0,4,6)$ forman un paralelepípedo cuyo volumen es $120\,u^3$, entonces $a = 10$.

3. Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores unitarios. Si los vectores $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ y $\vec{v}_4 = 5\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2$ son ortogonales. Hallar la medida del ángulo θ que forman entre sí los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

   Resp. $\theta = \frac{\pi}{3}$

4. Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores de $\mathbb{R}^2$, tales que $\vec{v}_1 = (2,3)$ y $\vec{v}_2 = (-1,0)$. Determine los valores de λ, de tal forma que los vectores $\left(\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2\right)$ y $\left(\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_2\right)$ sean ortogonales.

   Resp. $\lambda = \pm\sqrt{13}$

5. Sean $\vec{v}_1 = -4i + 3j$, $\vec{v}_2 = 2i - j$ y $\vec{v}_3 = 6i - 7j$; determinar escalares k y m tales que $\vec{v}_3 = k\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$. **Resp.** $k = -4$, $m = -5$

6. Sea θ $(0 \le \theta \le \pi)$, el ángulo que forman los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, Si $\vec{v}_1 = \vec{v}_3 - 2\vec{v}_2$, $\vec{v}_2 = \frac{5\vec{v}_1 - \vec{v}_4}{4}$, $\left\|\vec{v}_1\right\| = \left\|\vec{v}_2\right\| = 1$ y $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_4$, determine el valor de la $\tan\theta$.

   Resp. $\tan\theta = \sqrt{3}$

7. Determine un vector $\vec{X}$, perpendicular al vector $\vec{v} = 4i - 5j$ que tenga una longitud de 10 unidades.

   Resp. $\vec{X} = \frac{50}{\sqrt{41}}i + \frac{40}{\sqrt{41}}j$

8. Sean $\vec{v}_1 = 3i - 2j$, $\vec{v}_2 = -3i + 4j$ y $\vec{v}_3 = 7i - 8j$; determinar escalares k y m tales que $\vec{v}_3 = k\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$. **Resp.** $k = \frac{2}{3}$, $m = -\frac{5}{3}$

9. Sea $\vec{V}$ un vector diferente de cero, entonces, demostrar que si $\vec{U}$ es un vector cualquiera, el vector $\vec{W} = \vec{U} - \frac{\vec{U} \bullet \vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|^2}\vec{V}$ es ortogonal a $\vec{V}$.

10. Demuestre que si $\vec{U}$ es ortogonal a $\vec{V}$ y a $\vec{W}$, entonces $\vec{U}$ es ortogonal a $c\vec{V} + d\vec{W}$ para escalares cualquiera c y d .

11. Demostrar que el área del triángulo, cuyos vértices son los extremos de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, es $\frac{1}{2}\left|\left(\vec{B} - \vec{A}\right) \times \left(\vec{C} - \vec{A}\right)\right|$

12. Demostrar que el volumen del tetraedro de aristas $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{B} + \vec{C}$ y $\vec{C} + \vec{A}$ y es el doble del volumen del tetraedro de aristas $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

13. Pruebe que las diagonales de un rombo (paralelogramo con lados iguales) son perpendiculares.