

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

<b>AÑO:</b> 2022	<b>PERIODO:</b> PRIMER TERMINO
<b>MATERIA:</b> Álgebra Lineal	<b>PROFESORES:</b> Laveglia F, Martínez M, Ramírez J, Sánchez J, Valdiviezo J, Vielma J.
<b>EVALUACIÓN:</b> SEGUNDA	<b>FECHA:</b> 01/09/2022

1. Califique justificadamente el grado de verdad de las siguientes proposiciones (S=siempre verdadera, A=a veces verdadera, N=nunca verdadera)

a. (10 Puntos)

Sean A y B matrices cuadradas  $n \times n$ .

Si  $\lambda = 0$  es un valor propio de AB, entonces A y B son invertibles.

b. (10 Puntos)

Sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un operador lineal con valores propios  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  y correspondientes vectores propios  $v_1$  y  $v_2$ , entonces T es diagonalizable de manera ortogonal

2. (20 Puntos)

Considere el espacio vectorial  $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ , dotado del producto interno  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ .

a. Si  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$ , encuentre  $H^\perp$ .

b. Encuentre una base ortonormal para  $H^\perp$ .

c. Encuentre el vector de  $H^\perp$  más próximo a  $v = (1, 2, 3)$ .

3. (20 Puntos)

Sea  $V = \text{Gen}\{\sin(x), x^2, x\}$ . Sea  $T: V \rightarrow V$  el operador lineal tal que:

$$T(\sin(x)) = x^2$$

$$T(x^2) = 2x^2$$

$$T(x) = \sin(x)$$

Determine:

a. El núcleo y la imagen de  $T$ , así como su nulidad y rango.

b. La matriz asociada a  $T$  en la base  $B = \{\sin(x), x^2, x\}$

4. (20 Puntos)

Sea  $A_{3 \times 3}$  diagonalizable, con polinomio característico  $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$ .

Determine  $A^2$ .

5. (20 Puntos)

Probar que toda matriz simétrica  $2 \times 2$  es diagonalizable