Año:	2023	Periodo:	I PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín
Evaluación:	Primera	Fecha:	3 de julio de 2023

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ____________________________ Número de matrícula: __________________ Paralelo: __________

1. (10 puntos) Halle todas las soluciones de la EDO

$$y' = y + \sqrt{y}.$$

Solución: Si reescribimos la EDO en la forma

$$y' - y = y^{1/2},$$

podemos identificar que se trata de una EDO de Bernoulli con $\alpha = 1/2$. Note primero que $y(t) \equiv 0$ es una solución de equilibrio de la EDO dada. Suponga que $y \neq 0$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por $y^{-1/2}$ se obtiene:

$$y^{-1/2}y' - y^{1/2} = 1.$$

Sea $v = y^{1/2}$. Entonces, $v' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$. La EDO se transforma entonces en

$$2v' - v = 1,$$

que es equivalente a

$$v' - \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}.$$

La solución homogénea es $v_h(t) = ce^{t/2}$. Por simple inspección se puede obtener la solución particular $v_p(t) \equiv -1$. Por lo tanto, se tiene que

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = ce^{t/2} - 1.$$

Finalmente, $y(t) = v(t)^2 = (ce^{t/2} - 1)^2$.

Rúbrica:

Halla la solución de equilibrio	1 punto
Identifica que se trata de una EDO de Bernoulli y hace el cambio de variable $v(t) = y^{1/2}$ para transformar la EDO en una EDO lineal de primer orden	1–4 puntos
Resuelve la EDO lineal resultante	1–3 puntos
Calcula $y(t)$ a partir de $v(t)$	1–2 puntos

2. (10 puntos) Considere un tanque usado en ciertos experimentos hidrodinámicos. Después de un experimento, el tanque contiene 150 litros de una solución de tinte con una concentración de 3 g/l. Para preparar el siguiente experimento, el tanque debe enjuagarse con agua dulce que fluya a una velocidad de 3 l/min, y que la solución bien agitada fluya hacia afuera a la misma velocidad. Encuentre el tiempo que transcurrirá antes de que la concentración de tinte en el tanque alcance el 2 % de su valor original.

Solución: Sea $y(t)$ la cantidad de tinte en el tanque, en gramos, en el tiempo t medido en minutos. Entonces,

$$y'(t) = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida},$$

donde

$$\begin{aligned} \text{tasa de entrada} &= (\text{concentración entrante})(\text{tasa de flujo entrante}); \\ \text{tasa salida} &= (\text{concentración saliente})(\text{tasa de flujo saliente}). \end{aligned}$$

En vista de el líquido que entra en el tanque es agua dulce, la concentración entrante es nula, y en consecuencia la tasa de entrada también será nula. Como la solución fluye hacia afuera con la misma velocidad a la que entra el agua dulce, en todo momento habrá 150 l de líquido en el tanque. Luego, la concentración saliente será $(y(t)/150)$ g/l. Por lo tanto, $y(t)$ satisface la EDO

$$y' = -\frac{y}{150} \cdot 3 = -\frac{y}{50}.$$

La solución a esta EDO es $y(t) = y_0 e^{-t/50}$ g. Para hallar y_0 usamos la concentración inicial:

$$\frac{y_0}{150} = 3 \implies y_0 = 450.$$

Sea t_0 el tiempo transcurrido antes de que la concentración de tinte en el tanque alcance el 2 % de su valor original. Estonces,

$$\begin{aligned} \frac{y(t_0)}{150} = 0,02 \cdot 3 = 0,06 &\implies 450 e^{-t_0/50} = 9 \\ &\implies e^{-t_0/50} = \frac{1}{50} \\ &\implies -\frac{t_0}{50} = -\ln 50 \\ &\implies t_0 = 50 \ln 50. \end{aligned}$$

Rúbrica:

Plantea correctamente la EDO que modela el fenómeno.	1–3 puntos
Resuelve la EDO correctamente.	1–2 puntos
Usa la concentración inicial para calcular la cantidad de tinte inicial.	1–2 puntos
Halla tiempo que transcurrirá antes de que la concentración de tinte en el tanque alcanza el 2 % de su valor original.	1–3 punto

3. En $\mathbb{M}_{2\cdot 2}$, sea

$$\mathbb{W} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}.$$

(a) (5 puntos) ¿Cuál es la forma general de una matriz en $\mathbb{W}$?

Solución: Una matriz en $\mathbb{W}$ es una matriz de la forma

$$a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

Rúbrica:

Halla la forma general de una matriz en $\mathbb{W}$.	1–5 puntos

(b) (5 puntos) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos matrices en $\mathbb{W}$. Verifique que $\mathbf{AB}$, el producto matricial de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$, también pertenece a $\mathbb{W}$.

Solución: Por la parte (a) podemos escribir $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}c & -d\\ d & c\end{bmatrix}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & -d\\ d & c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ac-bd & -ad-bc\\ bc+ad & ac-bd\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ac-bd & -(ad-bc)\\ bc+ad & ac-bd\end{bmatrix}.$$

Ciertamente esta matriz cumple con las condiciones para pertenecer a $\mathbb{W}$, lo que prueba la afirmación.

Rúbrica:

Demuestra que $\mathbf{AB} \in \mathbb{W}$.	1–5 puntos

4. (a) (7 puntos) Sea $p(x) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ un polinomio arbitrario, con $c_2 \neq 0$. Calcule el wronskiano del conjunto $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$ y determine si tal conjunto es l.i. ¿Es $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$ una base para $\mathbb{P}_2$? Justifique su respuesta.

Solución: Primero calculemos el wronskiano de $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$:

$$\begin{aligned}
W[p_1,p_2,p_3](t) &= \begin{vmatrix} p(t) & p'(t) & p''(t) \\ p'(t) & p''(t) & p'''(t) \\ p''(t) & p'''(t) & p''''(t) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} c_0+c_1t+c_2t^2 & c_1+2c_2t & 2c_2 \\ c_1+2c_2t & 2c_2 & 0 \\ 2c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3+1}(2c_2)\begin{vmatrix} c_1+2c_2t & 2c_2 \\ 2c_2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2c_2[-(2c_2)(2c_2)] \\
&= -8c_2^3.
\end{aligned}$$

Como $c_2 \neq 0$, se tiene que el wronskiano es siempre distinto de cero y concluimos que $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$ es l.i. Para determinar si este conjunto es una base de $\mathbb{P}_2$, recordemos que $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, por lo tanto cualquier conjunto de tres polinomios l.i. también genera $\mathbb{P}_2$. En particular, $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$ es una base de $\mathbb{P}_3$.

Rúbrica:

Calcula correctamente el wronskiano de $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$	1–3 puntos
Usa el criterio del wronskiano para concluir que $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$ es l.i.	1–2 puntos
Demuestra que $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$	2 puntos
Demuestra que las únicas constantes a, b, c para las cuales $p(t)$ es solución de $ay''+by'+cy=0$, son $a=b=c=0$.	1–3 puntos

(b) (3 puntos) Determine todos los números reales a, b, c para los cuales $p(x)$ es solución de la EDO

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

Solución: Si $p(t)$ es solución de una tal EDO entonces

$$a\,p''(t) + b\,p'(t) + c\,p(t) = 0, \ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

pero de la parte (a) $\{p(t), p'(t), p''(t)\}$ es un conjunto l.i. y consecuencia tal igualdad solo puede ocurrir si $a = b = c = 0$.

Rúbrica:

Demuestra que las únicas constantes a, b, c para las cuales $p(t)$ es solución de $ay''+by'+cy=0$, son $a=b=c=0$.	1–3 puntos

5. (10 puntos) Use el hecho de que $y_1(t)=t$ es una solución de la EDO

$$t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=0,\ t>0,$$

para hallar su solución general.

Solución: Reescribimos la EDO en la forma

$$y''-\left(1+\frac{2}{t}\right)y'+\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)y=0,\ t>0.$$

Una segunda solución linealmente independiente de $y_1(t)$ es dada por $y_2(t)=v(t)y_1(t)$, donde

$$\begin{aligned}
v(t)&=\int \frac{1}{y_1(t)^2}e^{-\int p(t)\,dt}\,dt\\
&=\int \frac{1}{t^2}e^{-\int -\left(1+\frac{2}{t}\right)dt}\,dt\\
&=\int \frac{1}{t^2}e^{\int \left(1+\frac{2}{t}\right)dt}\,dt\\
&=\int \frac{1}{t^2}e^{t}e^{2\ln t}\,dt\\
&=\int e^{t}\,dt\\
&=e^{t}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la segunda solución buscada es

$$y_2(t)=te^{t}.$$

La solución general es entonces

$$y(t)=c_1t+c_2te^{t}.$$

Rúbrica:

Usa el método de reducción de orden para hallar una segunda solución	1–2 puntos
Halla la segunda solución	1–6 puntos
Halla la solución general	1–2 puntos