Rúbrica del primer examen de Cálculo Vectorial

PAO1 2023-2024

1. (10 p.) Sea $k \in \mathbb{R}$. Considere la recta $L : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{2-z}{4}$.

   a) Determine el valor de k para que la recta L **no** interseque al plano $\pi : 5x + ky + 4z = 5$. Justifique su respuesta.

   - Plantea de manera general condiciones necesarias para que la recta no interseque al plano y que conduzcan a hallar k. Por ejemplo, que el sistema de ecuaciones que forman L y π es inconsistente o que el vector normal de π y el director de L deben ser ortogonales...............2 p.
   - Mediante un procedimiento correcto obtiene que $k = 1$............2 p.
   - Prueba o argumenta de manera consistente que con el valor hallado de k la recta no interseca al plano..................2 p.

     Aquí se podría argumentar también el hecho que la distancia entre el plano y la recta obtenida en el literal *b*) es estrictamente positiva.

   b) Con el valor de k obtenido en el ítem *a*), calcule la distancia de L a π.

   - Escribe expresión general de la distancia de un punto a un plano.....1 p.
   - Selecciona un punto arbitrario de L.........1 p.
   - Evlaúa datos en la expresión de distancia y calcula
     la distancia correcta: $\frac{5\sqrt{42}}{42}$........................2 p.

2. (10 p.) Considere la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   a) Determine si f es continua en $(0,0)$.

   - Plantea criterio de continuidad en $(0,0)$.......1 p.
   - Establece la no existencia del límite mediante un procedimiento correcto.................2 p.
   - Concluye que f **no** es continua en $(0,0)$.......1 p.

   b) Analice la existencia de las derivadas direccionales $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, en toda dirección unitaria $u \in \mathbb{R}^2$.

   - Plantea vector unitario u en forma general...........1 p.
   - Plantea definición de límite para $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ en $(0,0)$.......1 p.
   - Evalúa el límite usando correctamente la regla de correspondencia e identifica que el límite existe únicamente en las direcciones $u = (\pm 1, 0)$ ....2 p.

   c) Determine si f es de clase C^1 en $(0,0)$, es decir, si las derivadas parciales de f son continuas en una vecindad de dicho punto.

   - Explica consistentemente con la información del literal *a*) o *b*), que f no es de clase C^1 en $(0,0)$.........2 p.

     Aquí también se podría analizar alguna de las derivadas parciales y mostrar que no es continua en $(0,0)$ usando su regla de correspondencia.

3. (10 p.) Sean $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dos funciones vectoriales dadas por

$$F(u,v) = (u + 2v^2, v - 3u),$$

$$G(x,y) = (2x + y, x^2 - y).$$

a) Construya la regla de correspondencia de la función $H = F \circ G$.

- Determina la función compuesta H..............................2 p.

$$(x,y) \mapsto H(x,y) = \big(2x + y + 2(x^2 - y)^2, x^2 - y - 3(2x + y)\big)$$

b) Calcule la matriz Jacobiana de H en el punto $(0,a)$, $a \in \mathbb{R}$, usando su regla de correspondencia obtenida en la parte anterior.

- Determina la Jacobiana de H para todo (x,y)..............1 p.

$$\begin{pmatrix} 2 + 8x(x^2 - y) & 1 - 4(x^2 - y) \\ 2x - 6 & -4 \end{pmatrix}$$

- Evalúa el punto $(0,a)$ y calcula correctamente $DH(0,a)$.............1 p.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 + 4a \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

c) Calcule la matriz Jacobiana de H en el punto $(0,a)$ usando el teorema de la función compuesta. Compare con lo obtenido en la parte *b*).

- Plantea teorema de la función compuesta en forma general..........1 p.
- Obtiene $G(0,a) = (a, -a)$...................1 p.
- Calcula $DG(0,a)$.........1 p.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calcula $DF(a,-a)$......1 p.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4a \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Realiza producto correctamente, $DF(a,-a) \times DG(0,a)$, y conlcuye que la respuesta es la misma que la obtenida en *b*)..............................2 p.

4. (10 p.) Considere la superficie S dada por la ecuación
$x^2y^3 - 3zy + xz^3 = 5$

   a) Con la debida justificación, determine si esta ecuación define a z como una función de clase C^1 en las variables x e y, en alguna vecindad del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1)$.

   - Define $F(x, y, z) = x^2y^3 - 3zy + xz^3 - 5$ y verifica que satisface las hipótesis del teorema de la derivada implícita, es decir,

     i) $F(-1, 1, -1) = 0$......................1 p.

     ii) F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$.............1 p.

     iii) $F_z(-1, 1, -1) \neq 0$.....................1 p.

   - Concluye que z es función de clase C^1 en una vecindad de $(-1, 1)$...1 p.

   b) En caso de ser afirmativo el ítem *a*), determine la ecuación del plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1)$.

   - Calcula las derivadas parciales en forma implícita (2 p. c/u)............4 p.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(-1, 1) = 1$$

   - Define un vector normal del plano tangente a S empleando las derivadas parciales obtenidas en forma implícita.......................1 p.

   - Determina término independiente usando el punto (x_0, y_0, z_0) y escribe la ecuación general correcta del plano tangente..........1 p.

$$x - 2y + 2z + 5 = 0.$$

5. (10 p.) Sea f escalar e infinitamente diferenciable para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$f(0,0,0) = 1$$
$$f_x(0,0,0) = f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 1$$
$$f_{xx}(0,0,0) = f_{zz}(0,0,0) = 2$$
$$f_{yy}(0,0,0) = 4$$
$$f_{xy}(0,0,0) = f_{xz}(0,0,0) = 2$$
$$f_{yz}(0,0,0) = 4.$$

a) Determine el polinomio de Taylor de 2do orden de f en $(0,0,0)$.

- Plantea forma general del polinomio de Taylor requerido...........1 p.
- Especifica el vector incremento $\mathbf{h} = (x, y, z)$.........1 p.
- Escribe correctamente términos de primer orden, $x + y + z$.......1 p.
- Escribe correctamente términos de segundo orden.....................3 p.

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

- Escribe el polinomio correctamente......................1 p.

$$P_2(x, y, z) = 1 + x + y + z + x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

b) Con el polinomio anterior, aproxime $f(0.1, 0.1, 0.1)$.

- Reemplaza $x = y = z = 0.1$ en P_2.................1 p.
- Simplifica correctamente y otiene $P_2(0.1, 0.1, 0.1) = 1.42$...........2 p.