ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Año: 2023	Período: PAO1
Materia: CÁLCULO VECTORIAL	Profesores: Mario Célleri, Nelson Córdova, Carlos Martín, María Nela Pastuizaca, Ebner Pineda, Pedro Ramos, Soraya Solís
Evaluación: Primera	Fecha: 3 de julio del 2023

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……….……………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que no puedo usar calculadoras, celulares u otros dispositivos electrónicos, que sí puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que no debo hacer ruidos molestos durante el mismo; y, cualquier objeto que hubiere traído que sea de mi propiedad, debo depositarlo en la parte inferior del pupitre. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

Firma ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ……………………………….…. ***PARALELO:*** ……….

1. (10 p.) Sea $k \in \mathbb{R}$. Considere la recta $L : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{2-z}{4}$.

   a) Determine el valor de k para que la recta L **no** interseque al plano $\pi : 5x + ky + 4z = 5$. Justifique su respuesta.

   b) Con el valor de k obtenido en el ítem *a*), calcule la distancia de L a π.

2. (10 p.) Considere la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Determine si f es continua en $(0,0)$.

b) Analice la existencia de las derivadas direccionales $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, en toda dirección unitaria $u \in \mathbb{R}^2$.

c) Determine si f es de clase C^1 en $(0,0)$, es decir, si las derivadas parciales de f son continuas en una vecindad de dicho punto.

3. (10 p.) Sean $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dos funciones vectoriales dadas por

$$F(u,v) = (u + 2v^2, v - 3u),$$

$$G(x,y) = (2x + y, x^2 - y).$$

a) Construya la regla de correspondencia de la función $H = F \circ G$.

b) Calcule la matriz Jacobiana de H en el punto $(0, a)$, $a \in \mathbb{R}$, usando su regla de correspondencia obtenida en la parte anterior.

c) Calcule la matriz Jacobiana de H en el punto $(0, a)$ usando el teorema de la función compuesta. Compare con lo obtenido en la parte *b*).

4. (10 p.) Considere la superficie S dada por la ecuación
$x^2y^3 - 3zy + xz^3 = 5$

a) Con la debida justificación, determine si esta ecuación define a z como una función de clase C^1 en las variables x e y, en alguna vecindad del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1)$.

b) En caso de ser afirmativo el ítem *a*), determine la ecuación del plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1)$.

5. (10 p.) Sea f escalar e infinitamente diferenciable para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{gathered}
f(0,0,0) = 1 \\
f_x(0,0,0) = f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 1 \\
f_{xx}(0,0,0) = f_{zz}(0,0,0) = 2 \\
f_{yy}(0,0,0) = 4 \\
f_{xy}(0,0,0) = f_{xz}(0,0,0) = 2 \\
f_{yz}(0,0,0) = 4.
\end{gathered}$$

a) Determine el polinomio de Taylor de 2do orden de f en $(0, 0, 0)$.

b) Con el polinomio anterior, aproxime $f(0.1, 0.1, 0.1)$.