espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2023	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín
Evaluación:	Segunda	Fecha:	29 de enero de 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ____________________ Número de matrícula: ________________ Paralelo: ________

1. (7 puntos) Sea $T:\mathbb{R}^3 \to P_2$ una transformación lineal con regla de correspondencia:

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}(x) = (2a-b-c)+(a+3b-c)x+(3a-5b-c)x^2$$

Encuentre una base y determine la dimensión del núcleo de T y de la imagen de T.

Solución:

Sea (a,b,c) un vector tal que $T(a,b,c)(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{cases} 2a-b-c=0 \\ a+3b-c=0 \\ 3a-5b-c=0 \end{cases}$$

La matriz de este sistema es

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix},$$

cuya matriz escalón reducida por filas es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el sistema arriba es equivalente a

$$\begin{cases} a - 4/7c = 0 \\ b - 1/7c = 0 \end{cases}$$

Por tanto, un vector (a, b, c) está en el núcleo de T si, y solamente si, $a = 4/7c$ y $b = 1/7c$. De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(T) &= \{(a, b, c) \colon a = 4/7c \text{ y } b = 1/7c\} \\ &= \{(4/7c, 1/7c, c) \colon c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{gen}\{(4/7, 1/7, 1)\}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\{(4/7c, 1/7c, c)\}$ es una base para $\mathrm{N}(T)$ y en consecuencia $\dim \mathrm{N}(T) = 1$. Por otro lado, el teorema del núcleo y la imagen nos dice que

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 1 + \dim \mathrm{Im}(T),$$

de donde $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$. Para hallar una base para la imagen, note que podemos extender la base $\{(4/7, 1/7, 1)\}$ de $\mathrm{N}(T)$ a la base

$$\{(4/7, 1/7, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (para verlo, note que $(1, 0, 0)$ no es múltiplo de $(4/7, 1/7, 1)$, y es imposible generar $(0, 1, 0)$ con los vectores $(4/7, 1/7, 1)$ y $(1, 0, 0)$). Luego, por los argumentos de la demostración del teorema del núcleo y la imagen obtenemos que

$$\{T(1, 0, 0)(x), T(0, 1, 0)(x)\} = \{2 + x + 3x^2, -1 + 3x - 5x^2\}$$

es una base para $\mathrm{Im}(T)$.

Rúbrica:

Halla una base y la dimensión de $\mathrm{N}(T)$ o de $\mathrm{Im}(T)$.	1–6 puntos
Usa el Teorema del Núcleo y la Imagen para hallar la dimensión de $\mathrm{N}(T)$ o de $\mathrm{Im}(T)$.	1–4 puntos

2. Sea $T : P_2 \to W$ una transformación lineal donde $W = \text{gen}\left\{\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3}\right\}$, con $s > 0$, y para todo $p(x) \in P_2$:

$$T\,p(t) = \mathscr{L}\{p(t)\},$$

donde $\mathscr{L}$ es el operador transformada de Laplace.

(a) (4 puntos) Encuentre la representación matricial de T usando la base $B_1 = \{2, 1-t, t-t^2\}$ de P_2 y la base $B_2 = \{\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3}\}$ de W.

Solución: Sea $p(t) = a + bt + ct^2$ un polinomio de grado menor o igual que 2 arbitrario. Entonces,

$$\mathscr{L}\{p(t)\} = \mathscr{L}\{a + bt + ct^2\} = a\mathscr{L}\{1\} + b\mathscr{L}\{t\} + c\mathscr{L}\{t^2\} = a\frac{1}{s} + b\frac{1}{s^2} + 2c\frac{1}{s^3}.$$

Por tanto, el vector de coordenadas de $p(x)$ respecto a la base B_2 es

$$[p(x)]_{B_2} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2c \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$[2]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [1-t]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [t-t^2]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$[\mathscr{L}]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Halla los vectores de coordenadas de cada uno de las imágenes de lo vectores de la base B_1.	1–2 puntos
Halla la matriz de T respecto a las bases B_1 y B_2.	1–2 puntos

(b) (4 puntos) Usando la matriz del literal anterior, encuentra $\mathscr{L}\{1-t-2t^2\}$.

Solución: Primero, observamos que

$$[1-t-2t^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$[\mathscr{L}\{1-t-2t^2\}]_{B_2} = [\mathscr{L}]_{B_2}^{B_1}[1-t-2t^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

De aquí, se obtiene

$$\mathscr{L}\{1-t-2t^2\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^2}.$$

Rúbrica:

Halla el vector de coordenadas de $1-t-2t^2$ respecto a la base B_1.	1 punto
Usa la matriz $[\mathscr{L}]_{B_2}^{B_1}$ para hallar $\mathscr{L}\{1-t-2t^2\}$.	1–3 puntos

3. (10 puntos) Encuentre la solución general de $2y'' - 7y' + 3y = t^2 - 4\cos t$.

Solución: La solución general será la suma de la solución homogénea y la solución particular. Encuentre la solución homogénea resolviendo la EDO homogénea asociada

$$2y'' - 7y' + 3y = 0$$

La ecuación característica de esta EDO homogénea es

$$2r^2 - 7r + 3 = (r-3)(2r-1),$$

de donde obtendremos la base $\{e^{3t}, e^{1/2t}\}$ para el espacio de soluciones homogénea, y así la solución homgóenea asociada

$$y_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{1/2t}$$

Ahora, determinamos una solución particular para $2y''t - 7y' + 3y = t^2 - 4\cos t$ mediante el método de coeficientes indeterminados. La solución particular será suma de soluciones particulares para $2y'' - 7y' + 3y = t^2$ y $2y'' - 7y' + 3y = -4\cos(t)$. La solución particular para $2y'' - 7y' + 3y = t^2$ tiene la forma:

$$y_{p_1}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$$

La solución particular para $2y'' - 7y' + 3y = -4\cos t$ tiene la forma:

$$y_{p_2}(t) = a_4 \sin t + a_5 \cos t$$

La solución particular total es:

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 \sin t + a_5 \cos t$$

Calculemos $y_p'(t)$:

$$y_p'(t) = a_2 + 2a_3 t + a_4 \cos t - a_5 \sin t$$

Calculemos $y_p''(t)$:

$$y_p''(t) = 2a_3 - a_4 \sin t - a_5 \cos t$$

Sustituyamos la solución particular $y_p(t)$ en la ecuación diferencial:

$$2y_p''(t) - 7y_p'(t) + 3y_p(t) = t^2 - 4\cos t$$

Simplifiquemos y resolvamos el sistema de ecuaciones resultante para las constantes desconocidas:

$$a_1 = \frac{86}{27}, \quad a_2 = \frac{14}{9}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{14}{25}, \quad a_5 = -\frac{2}{25}$$

Sustituyamos a_1, a_2, a_3, a_4, y a_5 en $y_p(t)$:

$$y_p(t) = \frac{86}{27} + \frac{14t}{9} + \frac{t^2}{3} + \frac{14\sin t}{25} - \frac{2\cos t}{25}$$

Finalmente, la solución general es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{1/2t} + \frac{86}{27} + \frac{14t}{9} + \frac{t^2}{3} + \frac{14\sin t}{25} - \frac{2\cos t}{25}$$

Rúbrica:

Halla la solución general homogénea.	1-2 puntos
Usa superposición no homogénea para determinar la forma de la solución particular.	1 punto
Usa el método de los coeficientes indeterminados (u otro método) para hallar la solución particular	1–6 puntos

4. (10 puntos) Usando valores y vectores propios, encuentre la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

Solución: La matriz asociada a este sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio caracter'sitico de esta matriz es

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x-5)(x+1)^2$$

De donde se obtienen los valores propios 5 y −1. Los espacios propios correspondientes son

$$E_5 = \text{gen}\{(1,-1,1)\},$$

y

$$E_{-1} = \text{gen}\{(-1,0,1),(1,1,0)\}.$$

De aquí obtenemos las soluciones l.i.

$$y_1(t) = e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ y_2(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad y_3(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

y la solución general es por tanto

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_3(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{5t} + (-c_2+c_3)e^{-t} \\ -c_1e^{5t} + c_3e^{-t} \\ c_1e^{5t} + c_2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

5. (a) (4 puntos) Use la definición de transformada de Laplace para verificar que si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > \alpha$. entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \text{ para } s > a+\alpha.$$

Solución: Aplicamos la definición de transformada de Laplace:

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a).$$

Como $F(s)$ está definida para $s > \alpha$, tiene que $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ está definida para $s-a > \alpha$, o equivalentemente, para $s > a+\alpha$.

Rúbrica:

Demuestra que $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$.	3 punto
Justifica que $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}$ para $s > a+\alpha$.	1 punto

(b) (3 puntos) Sea A una matriz cuadrada de cualquier tamaño. Verifique que si v es un vector propio de A que está asociado al valor propio λ, entonces para todo número natural n, v es un vector propio de A^n asociado al valor propio λ^n. *Sugerencia*: Use inducción matemática.

Solución: El resultado es claro para $n = 1$. Suponga que, para un n natural dado, v es vector propio de A^n asociado al valor propio que λ^n, *i.e.*, $A^n = \lambda^n v$. Entonces,

$$\begin{aligned} A^{n+1}v &= (A^nA)v \\ &= A^n(Av) \\ &= A^n(\lambda v) \\ &= \lambda A^n v \\ &= \lambda(\lambda^n v) \\ &= \lambda^{n+1}v \end{aligned}$$

Por lo tanto, v es vector propio de A^{n+1} asociado al valor propio λ^{n+1}.Por el Principio de Inducción Matemática, se tiene que el enunciado es válido para todo n natural.

Rúbrica:

Demuestra el resultado usando inducción matemática.	1-4 puntos

6. (8 puntos) Use transformadas de Laplace para resolver el PVI

$$y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Solución: Sea $y(t)$ la solución a este PVI. Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$y''(t) - y'(t) = e^t \cos t.$$

Aplicamos transformadas de Laplace a ambos lados de esta igualdad:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y''(t)\} - \mathscr{L}\{y'(t)\} &= \mathscr{L}\{e^t \cos t\} \\
s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - (sY(s) - y(0)) &= \frac{s-1}{(s-1)^2+1} \\
Y(s)(s^2 - s) &= \frac{s-1}{(s-1)^2+1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s((s-1)^2+1)} \\
Y(s) &= \frac{1/2}{s} + \frac{-1/2(s-1)+1/2}{(s-1)^2+1} \\
y(t) &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} \\
y(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t
\end{aligned}$$

Rúbrica:

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1 punto
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1–5 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1–3 puntos
Resuelve el PVI.	1 punto