FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Año: 2023	**Período:** II PAO
Materia: Estadística Matemática	**Profesor:** Christian E. Galarza
Evaluación: Tercera	**Fecha:** 07/02/2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________ al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora *ordinaria* para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ______________ **Número de matrícula:** ______________ **Paralelo:** ______

Tema 1. [10 pts] Sean Y_1 e Y_2 dos v.a.'s i.i.d. exponenciales con media β. Determine la distribución de $W = Y_1 + Y_2$ usando dos métodos diferentes.

Tema 2. [10 pts] Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal con media 0 y varianza 1 y sea $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Sea Y_{n+1} otra observación independiente de la misma población. Encuentre la distribución de

$$\frac{\sqrt{n-1}\cdot Y_{n+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}},$$

así como su distribución asintótica. Justifique.

Tema 3. [20 pts] Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. $U(0,1)$. Demuestre que $X_{(n)} \xrightarrow{\text{P}} 1$ y que $n(1-X_{(n)}) \xrightarrow{\text{D}} \text{Exp}(1)$.

Tema 4. [20 pts] Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la variable aleatoria X con f.d.p. dada por

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, \quad 0 < x < 1,\ \theta > 0.$$

a) [**3 pts**] ¿Pertenece X a la familia exponencial de distribuciones? Justifique.

b) [**12 pts**] Es de interés probar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$. Encuentre el test UMP de nivel α.

c) [**5 pts**] Proponga un intervalo de confianza chi-cuadrado del $(1-\alpha)\times 100\,\%$ de confianza para θ a partir del estadístico del ítem anterior.

Tema 5. [**10 pts**] Un jugador realiza un juego que involucra lanzar 3 dados en una serie de intentos. Sus ganancias son directamente proporcionales al número de 6's registrados. Si los dados son balanceados, ¿cuál es la distribución de probabilidad que rige el resultado de cada lanzamiento? Las frecuencias de los 6's observados en 100 intentos se registran en la siguiente tabla:

Número de 6's	**Observado**
0	47
1	35
2	15
3	3

Se pide evaluar si es probable que los dados hayan sido cargados injustamente. ¿A qué conclusión se puede llegar a la luz de los datos?