

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la  
Producción**

“Modelado, Simulación y Control de un Sistema Dinámico  
mediante el uso de Componentes Análogos Simples”

**TESIS DE GRADO**

Previo la obtención del Título de:

**INGENIERO MECÁNICO**

Presentada por:

Roberth Arturo Tinoco Romero.

**GUAYAQUIL – ECUADOR**

**AÑO: 2006**

## **AGRADECIMIENTO**

A todas las personas que de uno u otro modo colaboraron con la realización exitosa de este proyecto y en especial al Ing. Eduardo Orces por su invaluable ayuda

## **DEDICATORIA**

A las innumerables personas que han hecho posible mi formación académica de principio a fin, cuyo respaldo incondicional han sido un fuerte valuarte que llevaré siempre en consideración, entre ellos principalmente a mis padres.

## **TRIBUNAL DE GRADUACIÓN**

---

Ing. Eduardo Rivadeneira P.  
DECANO DE LA FIMCP  
PRESIDENTE

---

Ing. Eduardo Orces P.  
DIRECTOR DE TESIS

---

Ing. Federico Camacho B.  
VOCAL

---

Ing. Nelson Cevallos B.  
VOCAL

## **DECLARACIÓN EXPRESA**

“La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”

(Reglamento de graduación de la ESPOL).

---

Robert A. Tinoco R.

## RESUMEN

Como un sistema típico de control, el péndulo invertido es un excelente medio de comprobación y evaluación de diferentes métodos de control aplicados a sistemas inestables reales, además es muy conocido por su analogía en el diseño de un controlador de vibraciones en la plataforma para el lanzamiento de cohetes. Otras aplicaciones importantes es en la robótica, en el posicionamiento de un satélite con respecto a la tierra, en este caso el satélite esta en movimiento y las antenas que se encuentran en la tierra no pueden dejar que se mueva demasiado, ya que sino se saldría del rango de comunicación entre ellos. Es así como podríamos decir que están sujetos estos dos cuerpos (satélite y antena) por un vector virtual el cuál en la parte de la tierra se encuentra fijo y la parte en movimiento en el espacio, haciendo así la función del péndulo invertido.

Existen más aplicaciones para el péndulo invertido como lo es la estabilidad en grúas, edificios, aplicaciones didácticas, etc. Un péndulo invertido es un

dispositivo físico que consiste en una barra cilíndrica con libertad de oscilar alrededor de un pivote fijo. El pivote es montado sobre un carruaje el cual en su giro puede seguir una trayectoria horizontal.

Nuestro propósito final es conservar el péndulo perpendicular ante la presencia de perturbaciones, donde el péndulo inclinado regresa a la posición vertical cuando se aplica al carro una fuerza de control apropiada y al final de cada proceso de control, se pretende regresar el carro a la posición de referencia. La fuerza correcta tiene que ser establecida a través de las mediciones de los valores instantáneos de la posición horizontal y el ángulo de inclinación del péndulo, por lo que hacemos uso del diseño de un observador de orden mínimo.

El sistema péndulo, carro y actuador puede ser modelado como un sistema lineal si todos los parámetros son conocidos (masas, longitudes, etc.), bajo la premisa de que el ángulo de inclinación por parte del péndulo es pequeño, para así poder encontrar un controlador para estabilizarlo, basado en la tutela del uso de las diversas metodologías de control expuestas y así destacar los puntos relevantes de cada uno de ellas con las simulaciones pertinentes.

# ÍNDICE GENERAL

|                        | Pág. |
|------------------------|------|
| RESUMEN.....           | II   |
| INDICE GENERAL.....    | III  |
| ABREVIATURAS.....      | IV   |
| SIMBOLOGÍA.....        | V    |
| INDICE DE FIGURAS..... | VI   |
| INDICE DE TABLAS.....  | VII  |
| INTRODUCCIÓN.....      | 1    |

## CAPITULO 1

|  |    |
|--|----|
| 1. MODELADO Y RESPUESTA A LAZO ABIERTO DEL SISTEMA .....           | 4  |
| 1.1. Modelo Matemático del Sistema Dinámico Péndulo Invertido..... | 6  |
| 1.2. Representación del Sistema en Simulink .....                  | 15 |
| 1.3. Respuesta del Sistema a Lazo Abierto.....                     | 19 |
| 1.4. Estrategias de Control .....                                  | 35 |



## CAPITULO 2

|  |    |
|--|----|
| 2. METODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES PARA EL ANÁLISIS DEL SISTEMA DE CONTROL ..... | 41 |
| 2.1. Determinación de la Función de Transferencia del Controlador .....                    | 43 |
| 2.2. Análisis de la Variable no Controlada .....   | 79 |
| 2.3. Modelado en SIMULINK del Sistema de Control Obtenido.....                             | 84 |

## CAPITULO 3

|   |     |
|---|-----|
| 3. METÓDO DE UBICACIÓN DE POLOS PARA EL ANÁLISIS DEL SISTEMA DE CONTROL .....                               | 88  |
| 3.1. Controlabilidad y Observabilidad .....   | 90  |
| 3.2. Análisis del Sistema de Control mediante la Realimentación del Estado Observado de Orden Completo..... | 94  |
| 3.3. Modelado en SIMULINK del Sistema de Control Obtenido.....  | 121 |

## CAPITULO 4

|  |     |
|--|-----|
| 4. REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL EN EL DISEÑO FINAL DEL SISTEMA DE CONTROL .....                             | 125 |
| 4.1. Selección del Actuador .....  | 126 |
| 4.2. Control Óptimo de un Sistema Lineal Regulador .....   | 173 |
| 4.3. Diseño del Sistema de Control mediante Realimentación de Estados con Observador de Orden Mínimo ..... | 182 |

CAPITULO 5

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....214

APÉNDICES

BIBLIOGRAFÍA

## ABREVIATURAS

|            |                                 |
|------------|---------------------------------|
| A          | Amperio                         |
| op-amp     | Amplificador operacional        |
| AC         | Corriente Alterna               |
| DC         | Corriente Directa               |
| FEM        | Fuerza Contra-electromotriz     |
| H          | Henrio                          |
| Kg         | Kilogramo                       |
| K $\Omega$ | kilo-ohmio                      |
| LA         | Lazo Abierto                    |
| LC         | Lazo Cerrado                    |
| LGR        | Lugar Geométrico de las Raíces. |
| N          | Newton                          |
| N-m        | Newton-metro                    |
| e          | Número neperiano                |
| m          | Metro                           |
| m/s        | Metro por segundo               |
| $\Omega$   | Ohmio                           |
| rad        | Radian                          |
| rad/s      | Radian por segundo              |
| r.p.m.     | Revoluciones por minuto         |
| s          | Segundos                        |
| w          | Vatio                           |
| v          | Voltios                         |

## SIMBOLOGIA

|             |   |
|-------------|---|
| $\alpha$    | Aceleración Angular del Eje del Motor                           |
| $F_o$       | Amplitud de la Fuerza Excitatriz                                |
| $\nu$       | Coefficiente de Fricción viscosa equivalente del Motor reductor |
| $B$         | Coefficiente de Fricción Viscosa equivalente del Carro          |
| $b$         | Coefficiente de Fricción Viscosa equivalente del Péndulo        |
| $y_{cg}$    | Centro de Gravedad del  |
| $\chi_{cg}$ | Centro de Gravedad del Péndulo en el Eje de las abscisas        |
| $K_1$       | Constante del Par Motriz  |
| $K_2$       | Constante de la Fuerza contra-electromotriz                     |
| $P$         | Control Proporcional.   |
| $D$         | Control Derivativo  |
| $I$         | Control Integral  |
| $i_a$       | Corriente de Armadura del Motor                                 |
| $i_f$       | Corriente de Campo del Motor                                    |
| $\varphi$   | Desfase entre la Fuerza Excitatriz y el Desplazamiento angular. |
| $\phi$      | Desplazamiento Angular del eje del Motor                        |
| $d$         | Diámetro de la polea.   |
| $r$         | Radio de la polea.  |
| $\phi(s)$   | Polinomio Característico de la Matriz de Estados                |
| $\theta$    | Desplazamiento Angular del Péndulo                              |
| $X$         | Desplazamiento Lineal del Carro                                 |
| $FAD$       | Factor de Amplificación Dinámico.                               |
| $\zeta$     | Factor de Amortiguamiento Relativo                              |
| $\Psi$      | Flujo magnético en el entrehierro del Motor                     |
| $\omega_o$  | Frecuencia Natural  |
| $\omega_a$  | Frecuencia Amortiguada  |
| $\omega$    | Frecuencia Excitatriz   |
| $F_d$       | Fuerza excitatriz o disturbio externo                           |
| $G$         | Función de Transferencia del Sistema Péndulo Invertido.         |
| $\Delta V$  | Ganancia de Voltaje   |

|          |  |
|----------|--|
| $K_d$    | Ganancia Derivativa  |
| $K_i$    | Ganancia Integral  |
| $K_p$    | Ganancia proporcional  |
| $g$      | Gravedad   |
| $J$      | Índice de desempeño  |
| $L_m$    | Inductancia.   |
| $J_c$    | Inercia de Carga.  |
| $J_m$    | Inercia del eje del Motor  |
| $I$      | Inercia del Péndulo  |
| $Z_{Mi}$ | Impedancia Miller de entrada.  |
| $Z_{Mo}$ | Impedancia Miller de salida.   |
| $\ell$   | Longitud media del Péndulo   |
| $A$      | Matriz de Estado   |
| $B$      | Matriz de Entrada  |
| $K$      | Matriz de Ganancia de Realimentación del Estado  |
| $L$      | matriz de Ganancia del Observador  |
| $C$      | Matriz de Salida   |
| $D$      | Matriz de Transición Directa   |
| $M$      | Masa del Carro   |
| $m$      | Masa del Péndulo   |
| $i$      | Número imaginario  |
| $n$      | Número de Estados.   |
| $T$      | Par desarrollado por el Motor  |
| $\tau_o$ | Par desarrollado en la Polea   |
| $\tau$   | Período Fundamental  |
| $h_{fe}$ | Parámetro de la relación de la transferencia directa de la corriente a corto circuito para una configuración base común. |
| $h_{ie}$ | Parámetro de impedancia de entrada a cortocircuito para una configuración emisor común                                   |
| $\sigma$ | Parte real de un número complejo   |
| $\mu_i$  | Polos del sistema a lazo cerrado.  |
| $\beta$  | Relación entre la corriente del colector y la corriente de base en el transistor.  |
| $N$      | Reducción de velocidad   |
| $R_a$    | Resistencia de Armadura del Motor  |
| $\mu$    | Señal del Control  |
| $v$      | Señal del Control del Problema dual  |
| $M_p$    | Sobrepaso Máximo   |
| $t_s$    | Tiempo de Asentamiento o Estabilización  |
| $t_r$    | Tiempo de Levantamiento  |
| $s$      | Variable Compleja  |
| $\chi_i$ | Variables de Estado  |

|           |   |
|-----------|---|
| Z         | VARIABLES DE ESTADO DEL PROBLEMA DUAL.      |
| $\hat{x}$ | VARIABLES DE ESTADO ESTIMADAS               |
| $e_a$     | VOLTAJE APLICADO A LA ARMADURA DEL MOTOR DC |
| $e_b$     | VOLTAJE O FUERZA CONTRA-ELECTROMOTRIZ       |

## INDICE DE FIGURAS

|  | Pág. |
|--|------|
| Figura 1-1: Diagrama de Cuerpo libre del Sistema Péndulo Invertido.....  | 7    |
| Figura 1-2: Comportamiento Dinámico del Sistema en Lazo Cerrado ante una señal Escalón con el uso de la Función de Transferencia ..... | 23   |
| Figura 1-3: Comportamiento Dinámico del Sistema en Lazo Cerrado ante una señal Escalón en el Espacio de estados.....                   | 31   |
| Figura 1-4: Subsistema del Modelado Sistema Péndulo Invertido en Simulink.....   | 33   |
| Figura 1-5: Respuesta de la Desviación Angular del Péndulo ante una señal Escalón como disturbio en Simulink.....                      | 34   |
| Figura 1-7: Respuesta del Desplazamiento del Carro ante una señal Escalón como disturbio en Simulink .....                             | 34   |
| Figura 1-8: Sistema Retroalimentado .....  | 40   |
| Figura 2-1: Diagramas de Bloques del Sistema Péndulo Invertido.....  | 45   |
| Figura 2-2: Diagramas de Bloques Simplificado del Sistema Péndulo Invertido.....   | 46   |
| Figura 2-3: Trazo del LGR usando Matlab .....  | 51   |
| Figura 2-4: Respuesta del Sistema ante una Señal Escalón como disturbio omitiendo los efectos de amortiguamiento .....                 | 65   |
| Figura 2-5: Respuesta del Sistema ante una Señal Escalón como disturbio considerando los efectos de amortiguamiento .....              | 66   |
| Figura 2-6: Trazo del LGR para establecer el parámetro de ajuste .....   | 72   |
| Figura 2-7: Trazo del LGR amplificado para establecer el parámetro de ajuste .....   | 73   |

|              |  |     |
|--------------|--|-----|
| Figura 2-8:  | Respuesta del Sistema de Control bajo una señal escalón como disturbio en base al método del LGR.....                                | 74  |
| Figura 2-9   | Respuesta Transitoria para una señal impulso con el uso del Controlador PID .....  | 78  |
| Figura 2-10  | Diagrama de Bloques Global del Sistema Péndulo Invertido.....  | 80  |
| Figura 2-11: | Diagrama de Bloques Simplificado del Sistema Péndulo Invertido.....  | 80  |
| Figura 2-12: | Respuesta de las Variables de Salida del Sistema de control ante una señal escalón como Disturbio .....                              | 83  |
| Figura 2-13: | Configuración Resultante del Sistema de Control utilizando Simulink.....   | 85  |
| Figura 2-14: | Velocidad de Respuesta del desplazamiento Angular del Péndulo por medio de Simulink en presencia de una señal escalón.....           | 86  |
| Figura 2-15: | Velocidad de Respuesta del desplazamiento Lineal del Carro por medio de Simulink en presencia de una señal escalón.....              | 86  |
| Figura 3-1:  | Plano Complejo S .....   | 101 |
| Figura 3-2:  | Velocidad de Respuesta mediante el uso del Método de Ubicación de Polos.....   | 104 |
| Figura 3-3:  | Diagrama de Bloques usando Realimentación de Estado .....  | 105 |
| Figura 3-4:  | Diagrama de Bloques incluyendo el Observador de orden Completo .....   | 116 |
| Figura 3-5:  | Velocidad de Respuesta de las Variables Controladas con el uso de un Observador de Orden completo .....                              | 120 |
| Figura 3-6:  | Diagrama de Bloques del Sistema Péndulo Invertido en Simulink usando Realimentación de Estado .....                                  | 122 |
| Figura 3-7:  | Velocidad de Respuesta de Desplazamiento Angular del Péndulo usando Realimentación de estado y una señal Escalón como disturbio..... | 123 |
| Figura 3-8.  | Velocidad de Respuesta de Desplazamiento lineal del Carro usando Realimentación de estado y una señal Escalón como disturbio.....    | 123 |
| Figura 4-1:  | Ilustración que muestra la Energía requerida por el motor .....  | 138 |
| Figura 4-2:  | Circuito Equivalente de un Motor DC controlado por Armadura .....  | 140 |
| Figura 4-3:  | Conexión Dinámica del Péndulo-Motor .....  | 144 |



|              |  |     |
|--------------|--|-----|
| Figura 4-4:  | Equipo de Prueba para la determinación de la constante Par Motriz .....                                | 148 |
| Figura 4-5:  | Ilustración de los Equipos usados para determinar las constantes del motor .....                       | 150 |
| Figura 4-6:  | Ilustración del Reductor .....   | 155 |
| Figura 4-7:  | Ilustración de la Prueba para determinar la Inercia del eje del Motor .....                            | 158 |
| Figura 4-8:  | Diagrama de Cuerpo Libre del Rotor por una barra adherida a su eje .....                               | 159 |
| Figura 4-9:  | Descripción del Sistema Motor, Reductos y Conjunto Carro – Péndulo.....                                | 163 |
| Figura 4-10: | Trazo del LGR para determinar la reducción óptima.....   | 167 |
| Figura 4-11: | Trazo del LGR para determinar la reducción óptima amplificada.....                                     | 168 |
| Figura 4-12: | Modelo AC del Driver del Motor mediante parámetros Híbridos.....                                       | 191 |
| Figura 4-13: | Modelo AC del Driver del Motor mediante parámetros Híbridos en base al Teorema Millar .....            | 192 |
| Figura 4-14: | Amplificador Operacional Sumador Inversor .....  | 194 |
| Figura 4-15: | Respuesta Transitoria del Sistema de Control en base a LQR con una señal Escalón como disturbio .....  | 199 |
| Figura 4-16: | Diagrama de la Señal de flujo del Controlador .....  | 205 |
| Figura 4-17: | Configuración del modelo Sistema Péndulo Invertido en Simulink con LQR .....                           | 208 |
| Figura 4-18: | Comportamiento Dinámico del Péndulo en base al Diseño LQR y con una señal Escalón como Disturbio ..... | 209 |
| Figura 4-19: | Comportamiento Dinámico del Carro en base al Diseño LQR y con una señal Escalón como Disturbio .....   | 209 |

## ÍNDICE DE TABLAS

|  | Pág. |
|--|------|
| Tabla 1-1: Parámetros del Sistema Físico Péndulo Invertido .....   | 22   |
| Tabla 1-2: Instrucciones en Matlab con el Uso del la Función de Transferencia.....   | 22   |
| Tabla 1-3: Instrucciones en Matlab con el uso del Espacio de Estados .....   | 30   |
| Tabla 2-1: Instrucciones en Matlab para el trazo del LGR .....   | 50   |
| Tabla 2-2: Instrucciones en Matlab para obtener la Respuesta del Sistema ante una señal Escalón como disturbio omitiendo los efectos e amortiguamiento ..... | 64   |
| Tabla 2-3: Instrucciones en Matlab para establecer el Parámetro de Ajuste con las especificaciones de Desempeño en base el criterio de Routh y al LGR.....   | 71   |
| Tabla 2-4: Comportamiento Habitual de Kp, Ki y Kd en la respuesta transitoria.....   | 76   |
| Tabla 2-5: instrucciones en Matlab para la determinación de la respuesta transitoria en base al control PID .....  | 77   |
| Tabla 2-6: Instrucciones en Matlab para el Análisis de la Variable no Controlada .....   | 82   |
| Tabla 3-1: Instrucciones en Matlab para determinar la matriz de Ganancia de realimentación de Estado. ....   | 102  |
| Tabla 3-2: Lista de sustituciones necesarias para escribir la ecuación para el observador de Orden Mínimo .....  | 112  |
| Tabla 3-3: Instrucciones en Matlab para determinar K y L .....   | 119  |
| Tabla 4-1: Tipos de Actuadores a considerar .....  | 128  |
| Tabla 4-2: Potencia del Motor.....   | 138  |
| Tabla 4-3: Parámetros para determinar la Constante Par Motriz.....   | 150  |
| Tabla 4-4: Parámetros para determinar la Constante Fuerza Electromotriz.....   | 151  |
| Tabla 4-5: Parámetros para determinar la Resistencia de Armadura .....   | 151  |
| Tabla 4-6: Valores experimentales para determinar la inercia del eje del Motor .....   | 161  |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Tabla 4-7:  | Parámetros Parciales Físicos del sistema .....   | 161 |
| Tabla 4-8:  | Parámetros del Sistema Péndulo Invertido .....   | 172 |
| Tabla 4-9:  | Instrucciones en Matlab para determinar los<br>eigenvalores de la Matriz de Estado ..... | 186 |
| Tabla 4-10: | Instrucciones en Matlab para determinar K .....  | 198 |
| Tabla 4-11: | Instrucciones en Matlab para determinar L .....  | 202 |
| Tabla 4-12: | Lista de Componentes .....   | 212 |